

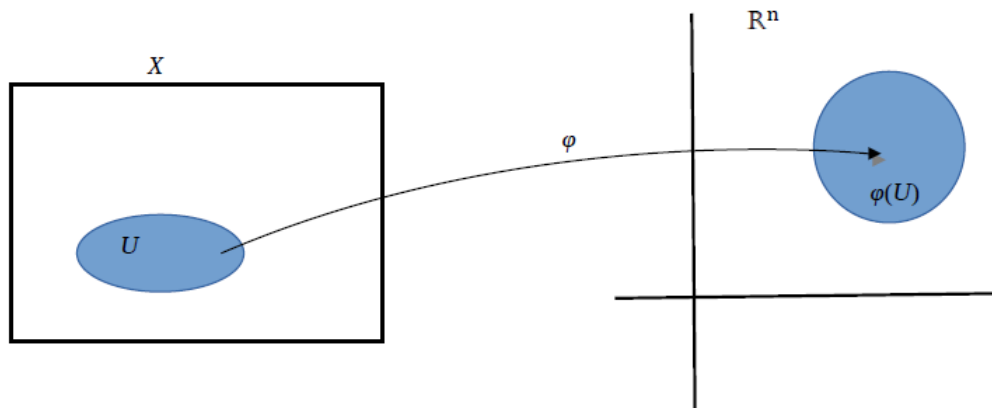
# ΜΑΘΗΜΑ 01

## 1 Χάρτες

**1.1 Ορισμός.** Έστω  $M \neq \emptyset$  ένα σύνολο. Ένας ( $n$ -διάστατος) **χάρτης επί του  $M$**  είναι ένα ζεύγος  $(U, \phi)$ , όπου  $U \subseteq M$  και

$$\phi : U \rightarrow \phi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$$

είναι μια 1-1 απεικόνιση (επί του  $\phi(U)$ ), με  $\phi(U)$  ανοιχτό στον  $\mathbb{R}^n$ .



Αν  $U$  είναι ένα γνήσιο υποσύνολο του  $M$ , το ζεύγος  $(U, \phi)$  ονομάζεται **τοπικός** χάρτης, ενώ, αν  $U = M$ , ονομάζεται **ολικός** χάρτης.

Αν υπάρχει ένας ολικός χάρτης  $(M, \phi)$ , τότε το  $M$  ταυτίζεται, μέσω της  $\phi$ , με το υποσύνολο  $\phi(M)$  του  $\mathbb{R}^n$ , επομένως, με τριμμένο τρόπο, μπορεί να

θεωρηθεί σαν ένα σύνολο πάνω στο οποίο μπορούν να οριστούν διαφορίσιμες απεικονίσεις. Στην γενική περίπτωση, ολικοί χάρτες δεν υπάρχουν. Συνήθως, ένας χάρτης θα είναι ένας τοπικός χάρτης.

Συχνά λέμε ότι ένας τοπικός χάρτης  $(U, \phi)$  ορίζει ένα **τοπικό σύστημα συντεταγμένων**, αφού, για κάθε  $x \in U$ , μπορούμε να ορίσουμε τις **συντεταγμένες** (που γενικεύουν τις συνήθεις συντεταγμένες της Αναλυτικής Γεωμετρίας)

$$x_i(x) := pr_i(\phi(x)), \quad i = 1, \dots, n,$$

όπου  $pr_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  είναι η προβολή στην  $i$ -συντεταγμένη.

**1.2 Παραδείγματα. (Α) Τα ανοιχτά υποσύνολα του  $\mathbb{R}^n$ .** Θεωρούμε ένα ανοιχτό  $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}^n$  και το ζεύγος  $(A, id_A)$ , και παρατηρούμε ότι η ταυτοτική  $id_A : A \rightarrow A \subseteq \mathbb{R}^n$  είναι 1-1 και η εικόνα της  $id_A(A) = A$  είναι ένα ανοιχτό υποσύνολο του  $\mathbb{R}^n$ , δηλαδή το ζεύγος  $(A, id_A)$  είναι ένας  $n$ -διάστατος ολικός χάρτης του  $A$ .

**(Β) Οι πεπερασμένης διάστασης διανυσματικοί χώροι.** Έστω  $V$  ένας  $n$ -διάστατος πραγματικός διανυσματικός χώρος. Τότε, υπάρχει ένας ισομορφισμός  $\psi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Το ζεύγος  $(V, \psi)$  είναι προφανώς ένας  $n$ -διάστατος ολικός χάρτης του  $V$ . Τα ανωτέρω ισχύουν ιδιαίτερος για το χώρο  $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$  των  $m \times n$  πραγματικών πινάκων.

**(Γ) Οι κανονικές επιφάνειες στο  $\mathbb{R}^3$ .** Στη Διαφορική Γεωμετρία των Επιφανειών συναντούμε τις έννοιες της κανονικής παραμέτρησης και της κανονικής επιφάνειας. Για διευκόλυνση του αναγνώστη υπενθυμίζουμε αυτές τις έννοιες εδώ: Έστω  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  ένα ανοιχτό σύνολο, έστω  $r : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  μια διαφορίσιμη απεικόνιση και έστω  $W := r(U)$ . Η τριάδα  $(U, r, W)$  ονομάζεται **κανονική παραμέτρηση**, αν ικανοποιούνται οι επόμενες συνθήκες:

(i) Αν  $W \subseteq \mathbb{R}^3$  είναι εφοδιασμένο με την σχετική τοπολογία,  $r : U \rightarrow W$  είναι ένας ομοιομορφισμός.

(ii) Για κάθε  $q \in U$ , το διαφορικό  $Dr(q) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  είναι 1-1.

Ένα υποσύνολο  $S \subseteq \mathbb{R}^3$  ονομάζεται **κανονική επιφάνεια**, αν υπάρχει μια οικογένεια  $\mathcal{A} = \{(U_i, r_i, W_i)\}_{i \in I}$  από κανονικές παραμετρήσεις, έτσι ώστε  $\{W_i\}_{i \in I}$  να είναι μια ανοιχτή κάλυψη του  $S$ .

Κάθε κανονική παραμέτρηση  $(U, r, W)$  μιας κανονικής επιφάνειας  $S$  ορίζει ένα 2-διάστατο χάρτη της  $S$ , τον  $(W, r^{-1})$ .

**(Δ) Ο μοναδιαίος κύκλος.** Θεωρούμε τον μοναδιαίο κύκλο, δηλαδή το σύνολο

$$S^1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}.$$

Επάνω στον κύκλο θα ορίσουμε χάρτες με τρεις τρόπους :

**(Δ1) Οι στερεογραφικές προβολές.** Σταθεροποιούμε τα σημεία του κύκλου  $N = (0, 1)$  και  $S = (0, -1)$  και θεωρούμε τα ζεύγη  $(U_N, \phi_N)$  και  $(U_S, \phi_S)$ , όπου  $U_N = S^1 \setminus \{N\}$ ,  $U_S = S^1 \setminus \{S\}$ , και

$$\begin{aligned}\phi_N : U_N &\longrightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \phi_N(x, y) := \frac{x}{1-y}, \\ \phi_S : U_S &\longrightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \phi_S(x, y) := \frac{x}{1+y},\end{aligned}$$

(στερεογραφικές προβολές). Ελέγχουμε αμέσως ότι οι απεικονίσεις  $\phi_N$  και  $\phi_S$  είναι 1-1 και επί του  $\mathbb{R}$ , με αντίστροφες τις απεικονίσεις

$$\begin{aligned}\phi_N^{-1}(a) &= \left( \frac{2a}{a^2+1}, \frac{a^2-1}{a^2+1} \right), \\ \phi_S^{-1}(a) &= \left( \frac{2a}{a^2+1}, \frac{1-a^2}{a^2+1} \right).\end{aligned}$$

Άρα τα ζεύγη  $(U_N, \phi_N)$  και  $(U_S, \phi_S)$  είναι 1-διάστατοι χάρτες του  $S^1$ .

**(Δ2) Τα ημικύκλια.** Ορίζουμε το σύνολο

$$\begin{aligned}U_y^+ &:= \{(x, y) \in S^1 : y > 0\}, \\ U_y^- &:= \{(x, y) \in S^1 : y < 0\}.\end{aligned}$$

Δηλαδή,  $U_y^+$  (αντίστ.  $U_y^-$ ) είναι το θετικό (αντίστ. το αρνητικό) ημικύκλιο πάνω (αντίστ. κάτω) από τον άξονα  $x'Ox$ . Ακόμη, ορίζουμε τις απεικονίσεις

$$\begin{aligned}\phi_y^+ : U_y^+ &\longrightarrow (-1, 1) : (x, y) \mapsto x, \\ \phi_y^- : U_y^- &\longrightarrow (-1, 1) : (x, y) \mapsto x,\end{aligned}$$

δηλαδή,  $\phi_y^+$ ,  $\phi_y^-$  είναι οι προβολές των προηγούμενων ημικυκλίων στη διάμετρο που τα χωρίζει. Τότε τα ζεύγη  $(U_y^+, \phi_y^+)$ ,  $(U_y^-, \phi_y^-)$  είναι χάρτες. Είναι άμεσο ότι οι απεικονίσεις  $\phi_y^+$ ,  $\phi_y^-$  είναι 1-1. Ακόμη είναι επί του  $(-1, 1)$  με

$$\begin{aligned}(\phi_y^+)^{-1}(x) &= (x, \sqrt{1-x^2}) \\ (\phi_y^-)^{-1}(x) &= (x, -\sqrt{1-x^2})\end{aligned}$$

για κάθε  $x \in (-1, 1)$ . Άρα οι εικόνες  $\phi_y^+(U_y^+) := \phi_y^-(U_y^-) = (-1, 1) \subseteq \mathbb{R}$  είναι ανοιχτές.

Συνολικά μπορούμε να ορίσουμε τέσσερις 1-διάστατους χάρτες  $(U_i^\alpha, \phi_i^\alpha)$ , με  $i = x, y$  και  $\alpha = +, -$  στο  $S^1$ .

(Δ3) **Το όρισμα.** Θεωρούμε πάλι τα υποσύνολα  $U_N$  και  $U_S$  του  $S^1$  και ορίζουμε τις απεικονίσεις  $\theta_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = N, S$ , που στέλνουν κάθε σημείο  $A = (x, y) \in U_i$  στη γωνία  $\theta_i(x, y)$  που σχηματίζεται μεταξύ  $OA$  και  $Ox$  και με την υπόθεση  $\theta_N(x, y) \in (\pi/2, 5\pi/2)$  και  $\theta_S(x, y) \in (-\pi/2, 3\pi/2)$ .

Είναι γνωστό ότι οι απεικονίσεις  $\theta_i$ ,  $i = N, S$ , είναι 1-1 και επί των αντίστοιχων διαστημάτων, που είναι ανοιχτά υποσύνολα του  $\mathbb{R}$ , επομένως τα ζεύγη  $(U_N, \theta_N)$ ,  $(U_S, \theta_S)$  είναι 1-διάστατοι χάρτες του  $S^1$ .

(Ε) **Η επιφάνεια της σφαίρας.** Επάνω στην σφαίρα

$$S^2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

θα ορίσουμε χάρτες με δύο τρόπους, ανάλογους των (Δ1) και (Δ2):

(Ε1) **Η στερεογραφική προβολή.** Θεωρούμε τα σημεία  $N = (0, 0, 1)$  (βόρειος πόλος) και  $S = (0, 0, -1)$  (νότιος πόλος) της σφαίρας, και θεωρούμε τα ζεύγη  $(U_N, \phi_N)$  και  $(U_S, \phi_S)$ , όπου  $U_N = S^2 \setminus \{N\}$ ,  $U_S = S^2 \setminus \{S\}$ , και

$$\begin{aligned} \phi_N : U_N &\longrightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \rightarrow \phi_N(x, y, z) := \left( \frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z} \right), \\ \phi_S : U_S &\longrightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \rightarrow \phi_S(x, y, z) := \left( \frac{x}{1+z}, \frac{y}{1+z} \right), \end{aligned}$$

(στερεογραφικές προβολές). Ελέγχουμε ότι η απεικόνιση  $\phi_N$  είναι 1-1: Αν  $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in U_N$  με

$$\phi_N(x_1, y_1, z_1) = \phi_N(x_2, y_2, z_2),$$

δηλαδή,

$$\left( \frac{x_1}{1-z_1}, \frac{y_1}{1-z_1} \right) = \left( \frac{x_2}{1-z_2}, \frac{y_1}{1-z_2} \right)$$

τότε προσθέτοντας τα τετράγωνα των συντεταγμένων και λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι  $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2$ , έχουμε ότι  $z_1 = z_2$ , απ' όπου αμέσως συμπεραίνουμε ότι  $x_1 = x_2$  και  $y_1 = y_2$ . Ανάλογα, δείχνουμε ότι και η  $\phi_S$  είναι 1-1. Επίσης, παρατηρούμε ότι  $\phi_N$  είναι επί του  $\mathbb{R}^2$ . Πράγματι, αν  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ , εύκολα επαληθεύουμε ότι

$$\phi_N^{-1}(a, b) = \left( \frac{2a}{1+a^2+b^2}, \frac{2b}{1+a^2+b^2}, \frac{-1+a^2+b^2}{1+a^2+b^2} \right).$$

Άρα  $\phi_N(U_N) = \mathbb{R}^2$  είναι ένα ανοιχτό υποσύνολο του  $\mathbb{R}^2$ . Με ανάλογο τρόπο, επαληθεύουμε ότι, για κάθε  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ ,

$$\phi_S^{-1}(a, b) = \left( \frac{2a}{1+a^2+b^2}, \frac{2b}{1+a^2+b^2}, \frac{1-a^2-b^2}{1+a^2+b^2} \right),$$

δηλαδή,  $\phi_S$  είναι επί του  $\mathbb{R}^2$  και  $\phi_S(U_S) = \mathbb{R}^2 \subseteq \mathbb{R}^2$  είναι ανοιχτό.

Έτσι έχουμε δείξει ότι  $(U_N, \phi_N)$ ,  $(U_S, \phi_S)$  είναι 2-διάστατοι χάρτες της  $S^2$ .

**(E2) Τα ημισφαίρια.** Ορίζουμε το σύνολα

$$\begin{aligned} U_z^+ &:= \{(x, y, z) \in S^2 : z > 0\}, \\ U_z^- &:= \{(x, y, z) \in S^2 : z < 0\}, \\ D_z &:= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}. \end{aligned}$$

Δηλαδή,  $U_z^+$  (αντίστ.  $U_z^-$ ) είναι το θετικό (αντίστ. το αρνητικό) ημισφαίριο πάνω (αντίστ. κάτω) από το επίπεδο των  $x, y$ , χωρίς τον ισημερινό, ενώ  $D_z$  είναι ο ανοιχτός δίσκος με κέντρο  $(0, 0, 0)$  και ακτίνα 1 στο επίπεδο των  $x, y$ . Ακόμη, ορίζουμε τις απεικονίσεις

$$\begin{aligned} \phi_z^+ : U_z^+ &\rightarrow D_z : (x, y, z) \rightarrow (x, y), \\ \phi_z^- : U_z^- &\rightarrow D_z : (x, y, z) \rightarrow (x, y), \end{aligned}$$

δηλαδή,  $\phi_z^+, \phi_z^-$  είναι οι προβολές των προηγούμενων ημισφαιρίων στο δίσκο που τα χωρίζει. Τότε τα ζεύγη  $(U_z^+, \phi_z^+)$ ,  $(U_z^-, \phi_z^-)$  είναι χάρτες. Είναι άμεσο ότι οι απεικονίσεις  $\phi_z^+, \phi_z^-$  είναι 1-1. Ακόμη είναι επί του  $D_z$  με

$$\begin{aligned} (\phi_z^+)^{-1}(x, y) &= (x, y, \sqrt{1-x^2-y^2}) \\ (\phi_z^-)^{-1}(x, y) &= (x, y, -\sqrt{1-x^2-y^2}) \end{aligned}$$

για κάθε  $(x, y) \in D_z$ . Άρα  $\phi_z^+(U_z^+) := \phi_z^-(U_z^-) = D_z \subseteq \mathbb{R}^2$  είναι ανοιχτά.

Συνολικά μπορούμε να ορίσουμε έξι 2-διάστατους χάρτες  $(U_i^\alpha, \phi_i^\alpha)$ , με  $i = x, y, z$  και  $\alpha = +, -$  στο  $S^2$ .

**(Z) Ο προβολικός χώρος  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ .** Θεωρούμε τον ευκλείδειο χώρο  $\mathbb{R}^3$  και ορίζουμε στον  $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$  τη σχέση

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, x_3) &\sim (y_1, y_2, y_3) \Leftrightarrow \\ \exists \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} & : y_i = \lambda x_i, \quad \forall i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Εύκολα επαληθεύουμε ότι η ανωτέρω σχέση είναι μια ισοδυναμία και συμβολίζουμε με  $[(x_1, x_2, x_3)]$  την κλάση ισοδυναμίας του στοιχείου  $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ . Το σύνολο των ανωτέρω κλάσεων, δηλαδή το σύνολο-πηλίκο

$$\mathbb{P}_2(\mathbb{R}) := (\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}) / \sim,$$

καλείται **προβολικός χώρος**.

Θεωρούμε  $U_i = \{[(x_1, x_2, x_3)] \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) : x_i \neq 0\}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) και ορίζουμε τις απεικονίσεις

$$\begin{aligned}\phi_1 : U_1 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 : [(x_1, x_2, x_3)] \longmapsto \left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}\right), \\ \phi_2 : U_2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 : [(x_1, x_2, x_3)] \longmapsto \left(\frac{x_1}{x_2}, \frac{x_3}{x_2}\right), \\ \phi_3 : U_3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 : [(x_1, x_2, x_3)] \longmapsto \left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}\right).\end{aligned}$$

Αποδεικνύουμε ότι  $(U_1, \phi_1)$  είναι 2-διάστατος χάρτης του  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ : πρώτα παρατηρούμε ότι  $\phi_1$  είναι 1-1, διότι, αν  $\phi_1([(x_1, x_2, x_3)]) = \phi_1([(y_1, y_2, y_3)])$ , τότε

$$\frac{x_i}{x_1} = \frac{y_i}{y_1},$$

για  $i = 2, 3$ , δηλαδή

$$\frac{y_i}{x_i} = \frac{y_1}{x_1} = \lambda \neq 0,$$

απ' όπου συμπεραίνουμε ότι  $[(x_1, x_2, x_3)] = [(y_1, y_2, y_3)]$ . Ακόμη  $\phi_1(U_1) = \mathbb{R}^2$ . Πράγματι, για κάθε  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  έχουμε ότι

$$\phi_1([(1, a, b)]) = (a, b),$$

δηλαδή η απεικόνιση  $\phi_1$  είναι επί. Άρα,  $\phi_1(U_1)$  είναι ανοιχτό υποσύνολο του  $\mathbb{R}^2$  και  $(U_1, \phi_1)$  είναι χάρτης. Με ανάλογο τρόπο δείχνουμε ότι τα ζεύγη  $(U_2, \phi_2)$  και  $(U_3, \phi_3)$  είναι 2-διάστατοι χάρτες.

## 2 Συμβιβαστότητα χαρτών

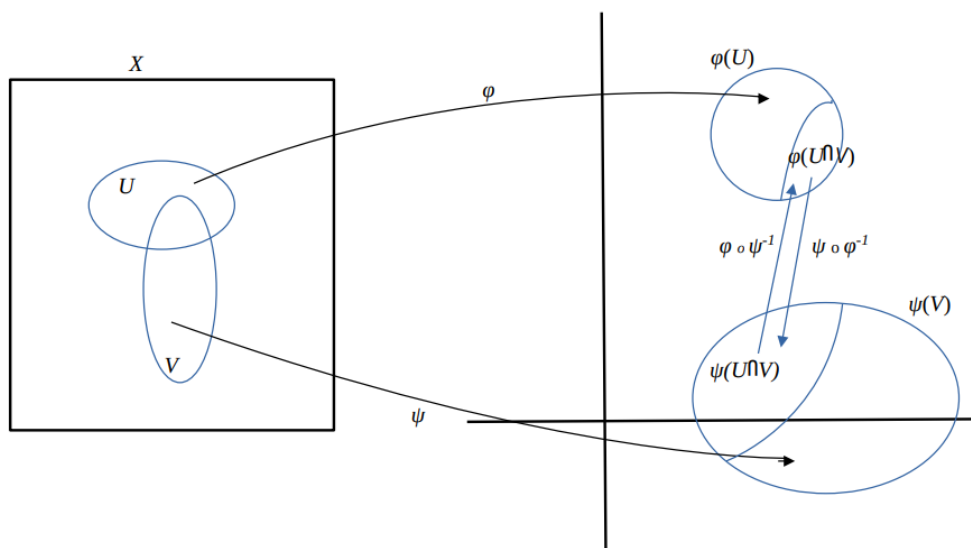
**2.1 Ορισμός.** Έστω  $(U, \phi)$  και  $(V, \psi)$  χάρτες του  $M$ . Λέμε ότι  $(U, \phi)$  και  $(V, \psi)$  είναι  $\mathcal{C}^k$ -**συμβιβαστοί** ( $k = 0, 1, \dots, \infty$ ) σε κάθε μια από τις επόμενες περιπτώσεις:

$$(1) U \cap V = \emptyset.$$

(2)  $U \cap V \neq \emptyset$ ,  $\phi(U \cap V)$  και  $\psi(U \cap V)$  είναι ανοιχτά υποσύνολα του  $\mathbb{R}^m$  και οι **απεικονίσεις μεταφοράς ή αλλαγής των συντεταγμένων**

$$(1) \quad \begin{aligned} \psi \circ \phi^{-1} &: \phi(U \cap V) \longrightarrow \psi(U \cap V), \\ \phi \circ \psi^{-1} &: \psi(U \cap V) \longrightarrow \phi(U \cap V), \end{aligned}$$

είναι  $C^k$ -διαφορίσιμες (σε κάθε σημείο των πεδίων ορισμού τους).



Επειδή οι απεικονίσεις (1) είναι αντίστροφες η μια της άλλης, η προηγούμενη συνθήκη διαφορισιμότητας συνεπάγεται ότι και οι δύο απεικονίσεις είναι  $C^k$ -αμφιδιαφορίσιμες.

Για  $k = 0$ , οι απεικονίσεις  $\psi \circ \phi^{-1}$  και  $\phi \circ \psi^{-1}$  είναι μόνον συνεχείς (επομένως ομοιομορφισμοί).

Στην τελευταία περίπτωση, οι χάρτες  $(U, \phi)$  και  $(V, \psi)$  λέγονται **τοπολογικά συμβιβαστοί**. Αν  $k = \infty$ , οι χάρτες λέγονται **διαφορικά συμβιβαστοί**.

Προφανώς, η διαφορική συμβιβασιμότητα των χαρτών συνεπάγεται την  $C^k$ -συμβιβασιμότητά τους, για κάθε  $k \in \mathbb{N}$ , και η τελευταία, με τη σειρά της, συνεπάγεται την τοπολογική τους συμβιβασιμότητα.

Αν κάποιος θέλει να είναι τυπικός, οι απεικονίσεις (1) έπρεπε να γράφονται  $\psi \circ (\phi^{-1}|_{\phi(U \cap V)})$  και  $\phi \circ (\psi^{-1}|_{\psi(U \cap V)})$ . Όμως, χάριν απλότητας, δεν θα γράφουμε τον περιορισμό όταν δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης.

**2.2 Παρατήρηση.** Η  $C^k$ -συμβιβαστότητα δύο τεμνόμενων χαρτών συνεπάγεται ότι οι χάρτες έχουν την ίδια διάσταση. Πράγματι, έστω ότι  $(U, \phi)$  και  $(V, \psi)$  είναι  $C^k$ -συμβιβαστοί χάρτες διάστασης  $m$  και  $n$ , αντίστοιχα, με  $U \cap V \neq \emptyset$ . Αν  $k \geq 1$ , η απεικόνιση μεταφοράς  $\psi \circ \phi^{-1}$  είναι μια  $C^k$ -αμφιδιαφόριση, έτσι για κάθε  $x \in U \cap V$ , το διαφορικό  $D(\psi \circ \phi^{-1})(\phi(x)) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  υπάρχει και είναι ένας γραμμικός ισομορφισμός, επομένως  $m = n$ . Αν  $k = 0$ , τα ανοιχτά σύνολα  $\phi(U \cap V)$  και  $\psi(U \cap V)$  στους χώρους  $\mathbb{R}^m$  και  $\mathbb{R}^n$  είναι ομοιομορφικά και η ισότητα των διαστάσεων είναι ένα αποτέλεσμα του Θεωρήματος του Brouwer (Invariance of domain) της Αλγεβρικής Τοπολογίας.

Μη τεμνόμενοι χάρτες (του ίδιου χώρου  $M$ ), δεν είναι κατ' ανάγκη της ίδιας διάστασης.

**2.3 Παραδείγματα.** Παρακάτω αναφερόμαστε στους χάρτες των Παραδειγμάτων 1.2.

(Α-Β) Στα Παραδείγματα (Α) και (Β) ο χώρος  $M$  έχει ολικό χάρτη. Εν προκειμένω, ισχύει ότι *κάθε χάρτης είναι διαφορικά συμβιβαστός με τον εαυτό του*. Πράγματι: Έστω  $(U, \phi)$  ένας  $n$ -διάστατος χάρτης ενός συνόλου  $M$ . Τότε

$$\phi(U \cap U) = \phi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$$

είναι ανοιχτό, από τον ορισμό του χάρτη, και

$$\phi \circ \phi^{-1} = \text{id}_{\phi(U)} : \phi(U) \longrightarrow \phi(U)$$

είναι  $C^\infty$ -αμφιδιαφόριση.

(Γ) Αν  $S \subseteq \mathbb{R}^3$  είναι μια κανονική επιφάνεια, τότε κάθε ζεύγος κανονικών παραμετρήσεων  $(U_i, r_i, W_i)$  και  $(U_j, r_j, W_j)$  ορίζει ζεύγος χαρτών  $(W_i, r_i^{-1})$  και  $(W_j, r_j^{-1})$  που είναι διαφορικά συμβιβαστοί: αν  $W_i \cap W_j \neq \emptyset$ , τότε  $r_i^{-1}(W_i \cap W_j)$  και  $r_j^{-1}(W_i \cap W_j)$  είναι ανοιχτά στο  $\mathbb{R}^2$ , διότι  $W_i \cap W_j$  είναι η τομή δύο ανοιχτών υποσυνόλων του  $S$  και  $r_i, r_j$  είναι ομοιομορφισμοί. Η διαφορισμότητα της απεικόνισης μεταφοράς  $r_j^{-1} \circ (r_i^{-1})^{-1} = r_j^{-1} \circ r_i$  είναι συνέπεια της τοπικής σύμπτωσης κάθε κανονικής παραμέτρησης με ένα γράφημα (παραμέτρηση Monge).

(Δ1-Δ2) Για την απόδειξη ότι οι χάρτες του Παραδείγματος 1.2(Δ1) (αντ. (Δ2)) είναι διαφορικά συμβιβαστοί παραπέμπουμε στην απόδειξη της διαφορικής συμβιβαστότητας των αντίστοιχων χαρτών της μοναδιαίας σφαίρας.



(Δ3) Για την συμβιβασιότητα των χαρτών  $(U_N, \theta_N)$  και  $(U_S, \theta_S)$  παρατηρούμε ότι  $U_N \cap U_S = U_N \setminus \{S\} = U_S \setminus \{N\}$  και

$$\begin{aligned}\theta_N(U_N \cap U_S) &= (\pi/2, 3\pi/2) \cup (3\pi/2, 5\pi/2), \\ \theta_S(U_N \cap U_S) &= (-\pi/2, \pi/2) \cup (\pi/2, 3\pi/2),\end{aligned}$$

δηλαδή είναι ανοιχτά υποσύνολα του  $\mathbb{R}$ , ενώ η απεικόνιση μεταφοράς

$$\theta_N \circ \theta_S^{-1} : \theta_N(U_N \cap U_S) \longrightarrow \theta_S(U_N \cap U_S)$$

δίνεται από τον τύπο

$$\theta_N \circ \theta_S^{-1}(t) = \begin{cases} t, & t \in (\pi/2, 3\pi/2), \\ t + 2\pi, & t \in (-\pi/2, \pi/2), \end{cases}$$

είναι επομένως  $C^\infty$ -αμφιδιαφόριση και οι εν λόγω χάρτες είναι διαφορικά συμβιβαστοί.

(E1) Θεωρούμε τους δύο χάρτες των στερεογραφικών προβολών  $(U_N, \phi_N)$ ,  $(U_S, \phi_S)$ . Παρατηρούμε ότι πάλι  $U_N \cap U_S = U_N \setminus \{S\} = U_S \setminus \{N\}$ , επομένως

$$\begin{aligned}\phi_N(U_N \cap U_S) &= \phi_N(U_N \setminus \{S\}) = \phi_N(U_N) \setminus \{\phi_N(S)\} \\ &= \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \\ \phi_S(U_N \cap U_S) &= \phi_S(U_S \setminus \{N\}) = \phi_S(U_S) \setminus \{\phi_S(N)\} \\ &= \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}.\end{aligned}$$

Άρα η εικόνες

$$\phi_N(U_N \cap U_S) = \phi_S(U_N \cap U_S) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

είναι ανοιχτές. Ακόμη, οι απεικονίσεις

$$\phi_S \circ \phi_N^{-1}, \phi_N \circ \phi_S^{-1} : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$$

δίνονται από τον τύπο

$$\phi_S \circ \phi_N^{-1}(a, b) = \phi_N \circ \phi_S^{-1}(a, b) = \left( \frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{b}{a^2 + b^2} \right),$$

για κάθε  $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ , δηλαδή είναι  $C^\infty$ -απεικονίσεις. Άρα, οι χάρτες  $(U_N, \phi_N)$  και  $(U_S, \phi_S)$  είναι διαφορικά συμβιβαστοί.

(E2) Θεωρούμε τους έξι χάρτες  $(U_i^\alpha, \phi_i^\alpha)$ , με  $i = x, y, z$  και  $\alpha = +, -$  και τους τρεις δίσκους  $D_i$ ,  $i = x, y, z$ . Αποδεικνύουμε τη συμβιβασιμότητα των  $(U_x^+, \phi_x^+)$  και  $(U_y^-, \phi_y^-)$ . Έχουμε

$$U_x^+ \cap U_y^- = \{(x, y, z) \in S^2 : x > 0, y < 0\},$$

επομένως

$$U_x^+ \cap U_y^- \ni (x, y, z) \mapsto \phi_x^+(x, y, z) = (y, z) \in D_x,$$

με  $y < 0$ , δηλαδή

$$\phi_x^+(U_x^+ \cap U_y^-) = D_x \cap \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 : y < 0\}.$$

Άρα,  $\phi_x^+(U_x^+ \cap U_y^-)$  είναι το εσωτερικό του μισού του δίσκου  $D_x$  και είναι ένα ανοιχτό υποσύνολο του  $\mathbb{R}^2$ . Όμοια,

$$\phi_y^-(U_x^+ \cap U_y^-) = D_y \cap \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

είναι ανοιχτό.

Για τη διαφορισιμότητα των απεικονίσεων μεταφοράς, παρατηρούμε ότι, για κάθε  $(y, z) \in \phi_x^+(U_x^+ \cap U_y^-)$ , δηλαδή για κάθε  $(y, z) \in \mathbb{R}^2$  με  $y^2 + z^2 < 1$  και  $y < 0$ , έχουμε

$$\begin{aligned} (\phi_y^- \circ (\phi_x^+)^{-1})(y, z) &= \phi_y^-(\sqrt{1 - y^2 - z^2}, y, z) \\ &= (\sqrt{1 - y^2 - z^2}, z), \end{aligned}$$

επομένως η απεικόνιση  $\phi_y^- \circ (\phi_x^+)^{-1}$  είναι  $C^\infty$ -διαφορίσιμη στο πεδίο ορισμού της, και, για κάθε  $(x, z) \in \phi_y^-(U_x^+ \cap U_y^-)$ , δηλαδή, για κάθε  $(x, z) \in \mathbb{R}^2$  με  $x^2 + z^2 < 1$  και  $x > 0$ , έχουμε

$$\begin{aligned} (\phi_x^+ \circ (\phi_y^-)^{-1})(x, z) &= \phi_x^+(x, -\sqrt{1 - x^2 - z^2}, z) \\ &= (-\sqrt{1 - x^2 - z^2}, z), \end{aligned}$$

σαν αποτέλεσμα,  $\phi_x^+ \circ (\phi_y^-)^{-1}$  είναι  $C^\infty$ -διαφορίσιμη στο πεδίο ορισμού της.

Με παρόμοιο τρόπο δείχνουμε τη συμβιβασιμότητα κάθε άλλου ζεύγους από τους ανωτέρω χάρτες.

(Z) Δείχνουμε ότι οι χάρτες  $(U_i, \phi_i)$ , με  $i = 1, 2, 3$ , είναι διαφορετικά συμβιβαστοί. Ας θεωρήσουμε τους  $(U_1, \phi_1)$  και  $(U_2, \phi_2)$ :

$$U_1 \cap U_2 = \{[(x_1, x_2, x_3)] \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) : x_1 \neq 0, x_2 \neq 0\},$$

επομένως, αν  $[(x_1, x_2, x_3)] \in U_1 \cap U_2$ , τότε

$$\phi_1([(x_1, x_2, x_3)]) = \left( \frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1} \right) \in (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}$$

και αν  $(a, b) \in (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}$  τότε  $[(1, a, b)] \in U_1 \cap U_2$  με  $\phi_1([(1, a, b)]) = (a, b)$ , δηλαδή  $\phi_1(U_1 \cap U_2) = (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}$  που είναι ένα ανοιχτό υποσύνολο του  $\mathbb{R}^2$ . Για τις απεικονίσεις μεταφοράς παρατηρούμε ότι

$$\phi_2 \circ \phi_1^{-1} = \phi_1 \circ \phi_2^{-1} : (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R} \longrightarrow (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R} : (a, b) \longmapsto \left( \frac{1}{a}, \frac{b}{a} \right),$$

δηλαδή είναι  $C^\infty$ -απεικονίσεις. Όμοια δείχνουμε την διαφορική συμβιβασιμότητα των άλλων ζευγών χαρτών.