ΜΑΘΗΜΑ 07

1 Παραγωγίσεις

Σε αυτή την παράγραφο θα παρουσιάσουμε μια άποψη των εφαπτόμενων διανυσμάτων που εξηγεί γιατί χρησιμοποιείται το σύμβολο $\frac{\partial}{\partial x_i}|_x$ για τα κανονικά βασικά διανύσματα ενός χάρτη.

Σε όλη την παράγραφο $(M, \mathcal{A})$ είναι μια m-διάστατη διαφορική πολλαπλότητα.

Υπενθυμίζουμε ότι μια *τοπικά διαφορίσιμη συνάρτηση της* M *στο* $x \in M$ είναι μια διαφορίσιμη συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$, όπου $A \subseteq M$ ανοιχτό με $x \in A$. Συμβολίζουμε με $\mathcal{C}_x^\infty(M, \mathbb{R})$ το σύνολο αυτών των συναρτήσεων.

Για κάθε $f \in \mathcal{C}_x^\infty(M, \mathbb{R})$, ορίζεται το σημειακό διαφορικό

$$T_x f : T_x M \to T_{f(x)}\mathbb{R}.$$

Παρατηρούμε ότι για κάθε χάρτη $(U, \phi) \in \mathcal{A}$ με $x \in U$, το ζεύγος των χαρτών (U, ϕ) και $(\mathbb{R}, \mathbf{id}_\mathbb{R})$ δίνει τοπική παράσταση της f στο x

$$f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \longrightarrow \mathbb{R}$$

και το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
T_x M \arrow[r, "T_x f"] \arrow[d, "\bar{\phi}"'] & T_{f(x)}\mathbb{R} \arrow[d, "\overline{\mathbf{id}_\mathbb{R}}"] \\
\mathbb{R}^m \arrow[r, "D(f\circ\phi^{-1})(\phi(x))"'] & \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό. Έστω $u = [(\alpha, x)] \in T_x M$. Τότε η κοινή τιμή των $\overline{\mathbf{id}_\mathbb{R}} \circ T_x f$ και $D(f \circ \phi^{-1})(\phi(x)) \circ \bar{\phi}$ στο u ισούται με τον πραγματικό αριθμό

$$\overline{\mathbf{id}_\mathbb{R}}(T_x f(u)) = \overline{\mathbf{id}_\mathbb{R}}([(f \circ \alpha, f(x))]) = (\mathbf{id}_\mathbb{R} \circ f \circ \alpha)'(0) = (f \circ \alpha)'(0).$$

Θα μελετήσουμε πώς μεταβάλλεται η ανωτέρω παράσταση *όταν κρατάμε σταθερό το u και μεταβάλλουμε την συνάρτηση f*. Θέτουμε

$$\delta_u : \mathcal{C}^\infty_x(M,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R} : f \longmapsto \delta_u(f) := (f\circ\alpha)'(0). \tag{1}$$

Από την συζήτηση που έχει προηγηθεί προκύπτει ότι

$$\delta_u(f) = \overline{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}}(T_x f(u)) = D(f\circ\phi^{-1})(\phi(x))\circ\bar{\phi}(u). \tag{2}$$

1.1 Παρατήρηση. Η ισότητα (2) δείχνει ότι η παράσταση $\delta_u(f)$ συμπίπτει με την κατευθυνόμενη παράγωγο της τοπικής παράστασης $f\circ\phi^{-1}$ στο σημείο $\phi(x)$ κατά την κατεύθυνση του διανύσματος $\bar{\phi}(u)$ (βλ. Παράρτημα Α, Ορισμός 1.18).

1.2 Πρόταση. *Η συνάρτηση (1) είναι καλά ορισμένη, δηλ. είναι ανεξάρτητη της καμπύλης α που υλοποιεί το u.*

Απόδειξη. Προφανές, αφού

$$\delta_u(f) = \overline{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}}(T_x f(u)),$$

και οι συναρτήσεις $\overline{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}}$ και $T_x f$ είναι καλά ορισμένες, δηλ. ανεξάρτητες της καμπύλης που υλοποιεί το διάνυσμα στο οποίο εφαρμόζονται. □

Παρατηρούμε τώρα ότι στο σύνολο $\mathcal{C}^\infty_x(M,\mathbb{R})$ ορίζονται:

(1) Μια *πρόσθεση*: αν $f,g\in\mathcal{C}^\infty_x(M,\mathbb{R})$ τότε οι f και g ορίζονται σε ανοιχτές περιοχές A και B του x, αντίστοιχα. Θέτοντας

$$f+g : A\cap B \to \mathbb{R} : (f+g)(x) = f(x)+g(x)$$

παίρνουμε $f+g\in\mathcal{C}^\infty_x(M,\mathbb{R})$.

(2) Ένα *βαθμωτό γινόμενο*: αν $f\in\mathcal{C}^\infty_x(M,\mathbb{R})$ και $\lambda\in\mathbb{R}$, θέτοντας

$$\lambda f : A \to \mathbb{R} : (\lambda f)(x) = \lambda\cdot f(x)$$

παίρνουμε $\lambda f\in\mathcal{C}^\infty_x(M,\mathbb{R})$.

(3) Ένα *γινόμενο*: αν $f,g\in\mathcal{C}^\infty_x(M,\mathbb{R})$ όπως στο (1), θέτοντας

$$fg : A\cap B \to \mathbb{R} : (fg)(x) = f(x)\cdot g(x)$$

παίρνουμε $fg\in\mathcal{C}^\infty_x(M,\mathbb{R})$.

1.3 Πρόταση. *Έστω $(M, \mathcal{A})$ μια διαφορική πολλαπλότητα, $x \in M$ και $u = [(\alpha, x)] \in T_x M$. Τότε, για κάθε $f, g \in \mathcal{C}_x^\infty(M, \mathbb{R})$ και $\lambda \in \mathbb{R}$, ισχύουν οι ισότητες*

$$\delta_u(f+g) = \delta_u(f) + \delta_u(g) \tag{3}$$
$$\delta_u(\lambda f) = \lambda \delta_u(f) \tag{4}$$
$$\delta_u(fg) = \delta_u(f) \cdot g(x) + f(x) \cdot \delta_u(g) \tag{5}$$

Απόδειξη. Αρχικά παρατηρούμε ότι, για κάθε $f, g \in \mathcal{C}_x^\infty(M, \mathbb{R})$ και κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
&(f+g) \circ \alpha = (f \circ \alpha) + (g \circ \alpha) \\
&(\lambda f) \circ \alpha = \lambda (f \circ \alpha) \\
&(fg) \circ \alpha = (f \circ \alpha)(g \circ \alpha).
\end{aligned}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}
\delta_u(f+g) &= ((f+g) \circ \alpha)'(0) = (f \circ \alpha)'(0) + (g \circ \alpha)'(0) \\
&= \delta_u(f) + \delta_u(g), \\
\delta_u(\lambda f) &= ((\lambda f) \circ \alpha)'(0) = (\lambda (f \circ \alpha))'(0) = \lambda (f \circ \alpha)'(0) \\
&= \lambda \cdot \delta_u(f), \\
\delta_u(fg) &= ((fg) \circ \alpha)'(0) = ((f \circ \alpha)(g \circ \alpha))'(0) \\
&= (f \circ \alpha)'(0) \cdot (g \circ \alpha)(0) + (f \circ \alpha)(0) \cdot (g \circ \alpha)'(0) \\
&= \delta_u(f) \cdot g(x) + f(x) \cdot \delta_u(g)
\end{aligned}$$

και η απόδειξη είναι πλήρης. □

Οι ισότητες (3) και (4) κάνουν την δ_u να μοιάζει γραμμική (όμως δεν είναι· γιατί;). Η (5) λέγεται **συνθήκη Leibniz**.

Στα επόμενα, για να απλοποιήσουμε τον συμβολισμό, θα γράφουμε και $u(f)$ αντί του $\delta_u(f)$.

1.4 Παραδείγματα. (A) Θεωρούμε την παραγώγηση την ορισμένη από ένα βασικό εφαπτόμενο διάνυσμα $\frac{\partial}{\partial x_i}|_x$. Για κάθε τοπικά διαφορίσιμη συνάρτηση

f παίρνουμε

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_x &:= \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_x (f)\\ &= D(f\circ\phi^{-1})(\phi(x))\left(\bar{\phi}\left(\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_x\right)\right)\\ &= D(f\circ\phi^{-1})(\phi(x))(e_i)\\ &= \left.\frac{\partial(f\circ\phi^{-1})}{\partial u_i}\right|_{\phi(x)}\end{aligned}$$

δηλαδή,

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_x = \left.\frac{\partial(f\circ\phi^{-1})}{\partial u_i}\right|_{\phi(x)} \tag{6}$$

(Β) Εφαρμόζοντας την (6) στη συντεταγμένη x_j (του ίδιου χάρτη (U,ϕ)), παίρνουμε

$$\left.\frac{\partial x_j}{\partial x_i}\right|_x = \left.\frac{\partial(x_j\circ\phi^{-1})}{\partial u_i}\right|_{\phi(x)} = \left.\frac{\partial u_j}{\partial u_i}\right|_{\phi(x)} = \delta_{ij}$$

όπου δ_{ij} είναι το δέλτα του Kronecker.

(Γ) Έστω $u=\sum\lambda_i\frac{\partial}{\partial x_i}|_x\in T_xM$. Θεωρώντας και τα δύο μέρη της προηγούμενης ισότητας σαν στοιχεία του D_xM και εφαρμόζοντας στο x_j, παίρνουμε

$$u(x_j) = (\sum_i \lambda_i \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_x)(x_j) = \sum \lambda_i \left.\frac{\partial x_j}{\partial x_i}\right|_x = \sum_i \lambda_i\delta_{ij} = \lambda_j.$$

Σαν αποτέλεσμα έχουμε

$$u = \sum_i u(x_i)\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_x. \tag{7}$$

(Δ) Συνδυάζοντας τώρα (6) και (7) παίρνουμε

$$u(f) = \sum_i u(x_i)\left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_x = \sum_i u(x_i)\left.\frac{\partial(f\circ\phi^{-1})}{\partial u_i}\right|_{\phi(x)}.$$

(Ε) Από τον τρόπο που ορίστηκε η παραγώγιση δ_u, έχουμε για κάθε $f\in\mathcal{C}^\infty_x(M,\mathbb{R})$, την ισότητα

$$u(f) = \bar{\mathrm{id}}_{\mathbb{R}}(T_xf(u)).$$

Η ανωτέρω ισότητα είναι συνήθως γραμμένη σαν

(8) $$u(f) = T_x f(u)$$

με την ταύτιση $\bar{\mathrm{id}}_{\mathbb{R}}$ να παραλείπεται. Σημειώνουμε ότι στην (8) το δεξιό μέλος είναι ένα εφαπτόμενο διάνυσμα ενώ το αριστερό είναι ένας πραγματικός αριθμός.

(Ζ) Έστω $(M, \mathcal{A})$, $(N, \mathcal{B})$ διαφορικές πολλαπλότητες, $f : M \to N$ μια διαφορίσιμη απεικόνιση, $x \in M$, $u = [(\alpha, x)] \in T_x M$ και g μια τοπικά διαφορίσιμη συνάρτηση της N στο $f(x)$. Τότε $T_x f(u) \in T_{f(x)} N$ ορίζει μια παραγώγηση της $\mathcal{C}_{f(x)}(N)$ και $[g]_{f(x)} \in \mathcal{C}_{f(x)}(N)$. Εφαρμόζοντας το $T_x f(u)$ στην g παίρνουμε

$$[T_x f(u)](g) = [(f \circ \alpha, f(x))](g) = (g \circ (f \circ \alpha))'(0).$$

Από την άλλη μεριά, $g \circ f$ είναι μια τοπικά διαφορίσιμη συνάρτηση επί του M στο x και εφαρμόζοντας την παραγώγηση που ορίζεται από το u στην $g \circ f$, έχουμε

$$u(g \circ f) = ((g \circ f) \circ \alpha)'(0)$$

επομένως

(9) $$[T_x f(u)](g) = u(g \circ f).$$

(Η) Τώρα περιοριζόμαστε στην περίπτωση $M = \mathbb{R}^m$. Θεωρούμε τον ολικό χάρτη $(\mathbb{R}^m, \bar{\mathrm{id}}_{\mathbb{R}^m})$ και τα αντίστοιχα κανονικά βασικά εφαπτόμενα διανύσματα $\frac{\partial}{\partial x_i}|_x$, $i = 1, \ldots, m$, σε κάποιο $x \in \mathbb{R}^m$. Τότε για κάθε τοπικά διαφορίσιμη συνάρτηση επί του $\mathbb{R}^m$ στο x, έχουμε

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_x = \left.\frac{\partial (f \circ \mathrm{id}_{\mathbb{R}^m}^{-1})}{\partial u_i}\right|_{\mathrm{id}(x)} = \left.\frac{\partial f}{\partial u_i}\right|_x .$$

(Θ) Στην ειδική περίπτωση $M = \mathbb{R}$, ο ολικός χάρτης $(\mathbb{R}, \mathrm{id}_{\mathbb{R}})$ ορίζει στο $t \in \mathbb{R}$ ένα κανονικό βασικό εφαπτόμενο διάνυσμα

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_t := \bar{\mathrm{id}}_{\mathbb{R}}^{-1}(1) \in T_t \mathbb{R}.$$

Αυτό το εφαπτόμενο διάνυσμα, θεωρούμενο σαν παραγώγηση και εφαρμοσμένο σε μια κατάλληλη f δίνει

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_t (f) = \left.\frac{df}{dt}\right|_t = f'(t).$$

1.5 Ορισμός. Μια απεικόνιση $d : \mathcal{C}^\infty_x(M, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ που ικανοποιεί τις ιδιότητες (3), (4) και (5) θα λέμε ότι είναι μια (**σημειακή**) **παραγώγιση** του συνόλου $\mathcal{C}^\infty_x(M, \mathbb{R})$.

Συμβολίζουμε με D_xM το σύνολο των παραγωγίσεων του $\mathcal{C}^\infty_x(M, \mathbb{R})$.

Αν $d, d_1 \in D_xM$ και $\lambda \in \mathbb{R}$, ορίζουμε τις κατά σημείο πράξεις

$$(d + d_1)(f) := d(f) + d_1(f) \tag{10}$$

$$(\lambda d)(f) := \lambda \cdot d(f) \tag{11}$$

για κάθε $f \in \mathcal{C}^\infty_x(M, \mathbb{R})$. Είναι άμεσο ότι $d + d_1$ και λd είναι παραγωγήσεις του $\mathcal{C}^\infty_x(M, \mathbb{R})$. Το επόμενο αποτέλεσμα είναι επίσης φανερό.

1.6 Λήμμα. *Το σύνολο D_xM με πρόσθεση και βαθμωτό πολλαπλασιασμό που ορίζονται κατά σημείο είναι πραγματικός διανυσματικός χώρος.* □

Πρέπει να σημειωθεί ότι κάθε παραγώγιση μηδενίζεται στις σταθερές συναρτήσεις: πράγματι, για την συνάρτηση $c_1 : M \to \mathbb{R}$ που παίρνει σταθερά την τιμή 1, από την συνθήκη Leibniz έχουμε

$$\begin{aligned} d(c_1) &= d(c_1 \cdot c_1) = d(c_1)c_1(x) + c_1(x)d(c_1) = \\ &= 2d(c_1) \end{aligned}$$

επομένως συμπεραίνουμε ότι $d(c_1) = 0$. Για μια τυχαία σταθερή $c : M \to \mathbb{R}$, έχουμε $c = c \cdot c_1$, έτσι από την (4) παίρνουμε

$$d(c) = d(c \cdot c_1) = c \cdot d(c_1) = 0.$$

1.7 Θεώρημα. *Η απεικόνιση*

$$\delta : T_xM \longrightarrow D_xM : u \mapsto \delta(u) := \delta_u \tag{12}$$

είναι ένας ισομορφισμός διανυσματικών χώρων.

Απόδειξη. Λόγω της Πρότασης 1.3, έχουμε ότι η απεικόνιση (12) είναι καλά ορισμένη. Είναι επίσης γραμμική: για κάθε $u, v \in T_xM$, $\lambda \in \mathbb{R}$ και $f \in \mathcal{C}^\infty_x(M, \mathbb{R})$, και για ένα τυχαίο χάρτη (U, ϕ) με $x \in U$, έχουμε (βλ. (2))

$$\begin{aligned} \delta(\lambda u + v)(f) &= D(f \circ \phi^{-1})(\phi(x)) \circ \bar{\phi}(\lambda u + v) \\ &= \lambda D(f \circ \phi^{-1})(\phi(x)) \circ \bar{\phi}(u) + \\ &\qquad D(f \circ \phi^{-1})(\phi(x)) \circ \bar{\phi}(v) \\ &= (\lambda \delta(u) + \delta(v))(f) \end{aligned}$$

δηλαδή,

$$\delta(\lambda u + v) = \lambda\delta(u) + \delta(v).$$

Αποδεικνύουμε τώρα ότι δ είναι μονομορφισμός: Πράγματι, έστω $u = [(\alpha, x)]$, $v = [(\beta, x)] \in T_xM$ με $\delta(u) = \delta(v)$. Τότε, για κάθε $f \in \mathcal{C}^\infty_x(M, \mathbb{R})$ έχουμε

$$\delta_u(f) = \delta_v(f). \tag{13}$$

Θεωρώντας πάλι ένα χάρτη (U, ϕ) με $x \in U$, και εφαρμόζοντας την ανωτέρω ισότητα στις συντεταγμένες $x_i \in \mathcal{C}^\infty_x(M, \mathbb{R})$, παίρνουμε

$$(x_i \circ \alpha)'(0) = (x_i \circ \beta)'(0), \quad \forall i = 1, \ldots, m,$$

ή, ισοδύναμα,

$$(\phi \circ \alpha)'(0) = (\phi \circ \beta)'(0),$$

που, από τον ορισμό, συνεπάγεται $\alpha \overset{x}{\sim} \beta$ και $u = v$.

Για την απόδειξη του επί της δ χρειαζόμαστε το επόμενο

1.8 Λήμμα. *Έστω $(M, \mathcal{A})$ μια διαφορική πολλαπλότητα, $x \in M$ και $(U, \phi = (x_1, \ldots, x_m)) \in \mathcal{A}$ με $x \in U$ και $\phi(x) = 0$. Τότε, για κάθε $f \in \mathcal{C}^\infty_x(M, \mathbb{R})$, υπάρχει ένα ανοιχτό $U_o \subseteq U$ με $x \in U_o$ έτσι ώστε*

$$f(y) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} x_i(y) f_i(y); \quad \forall\, y \in U_o, \tag{14}$$

$$f_i(x) = \left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_x, \quad i = 1, \ldots, m. \tag{15}$$

Απόδειξη του επί της δ: Θεωρούμε μια τυχαία παραγώγιση $d \in D_x(M)$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει ένα διάνυσμα $u \in T_xM$ με $\delta_u = d$, που ισοδυναμεί με την ισότητα

$$u(f) = \delta_u(f) = \delta(f),$$

για κάθε $f \in \mathcal{C}^\infty_x(M, \mathbb{R})$. Θεωρούμε ένα χάρτη $(U, \phi = (x_1, \ldots, x_m)) \in \mathcal{A}$ με $x \in U$ και $\phi(x) = 0$ και θέτουμε

$$u = \sum_{i=1}^{m} d(x_i)\, \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_x .$$

Επαληθεύουμε ότι $\delta_u = d$. Έστω τυχαία $f \in \mathcal{C}_x^\infty(M, \mathbb{R})$. Τότε, γράφοντας την f με την μορφή (14), παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\delta_u(f) = u(f) = u\left(f(x) + \sum_{i=1}^m x_i f_i\right) &= u(f(x)) + u\left(\sum_{i=1}^m x_i f_i\right) \\
&= 0 + \sum_{i=1}^m u(x_i f_i) = \sum_{i=1}^m \big(u(x_i) f_i(x) + x_i(x) u(f_i)\big) \\
&= \sum_{i=1}^m u(x_i) f_i(x)
\end{aligned}$$

και με ανάλογο τρόπο,

$$\begin{aligned}
d(f) = d\left(f(x) + \sum_{i=1}^m x_i f_i\right) &= d(f(x)) + d\left(\sum_{i=1}^m x_i f_i\right) \\
&= 0 + \sum_{i=1}^m d(x_i f_i) = \sum_{i=1}^m (d(x_i) f_i(x) + x_i(x) d(f_i))) \\
&= \sum_{i=1}^m d(x_i) f_i(x)
\end{aligned}$$

Από τον ορισμό του διανύσματος u, έχουμε $u(x_i) = d(x_i)$, για κάθε $i = 1, \ldots, m$. Επομένως, $\delta_u(f) = d(f)$, για κάθε $f \in \mathcal{C}_x^\infty(M, \mathbb{R})$, δηλ. $\delta_u = d$ που ολοκληρώνει την απόδειξη. □

2 Σπέρματα Διαφορίσιμων Συναρτήσεων

Όπως σημειώσαμε και στην προηγούμενη παράγραφο, το σύνολο $\mathcal{C}_x^\infty(M, \mathbb{R})$ είναι εφοδιασμένο με τις τρεις πράξεις (3), (4) και (5), οι οποίες όμως δεν ορίζουν κάποια αλγεβρική δομή. Παρατηρείστε για παράδειγμα, ότι η πρόσθεση έχει πολλά μηδενικά στοιχεία: για οποιαδήποτε $f \in \mathcal{C}_x^\infty(M, \mathbb{R})$ με πεδίο ορισμού ένα ανοιχτό $A \subseteq M$, με $x \in A$, κάθε σταθερά μηδενική συνάρτηση $0_B : B \to \mathbb{R}$ με B ανοιχτό που περιέχει το A, μας δίνει $f + 0_B = f$. Μπορούμε όμως να πάρουμε μια δομή πραγματικής άλγεβρας ταυτίζοντας τα στοιχεία του $\mathcal{C}_x^\infty(M, \mathbb{R})$ που έχουν ίσους περιορισμούς σε κάποια υποπεριοχή των πεδίων ορισμού τους. Πιο συγκεκριμένα, δίνουμε τον επόμενο ορισμό:

2.1 Ορισμός. Έστω $f, g \in \mathcal{C}_x^\infty(M, \mathbb{R})$. Υπάρχουν ανοιχτές περιοχές U, V του x με $f : U \to \mathbb{R}$, $g : V \to \mathbb{R}$ διαφορίσιμες. Λέμε ότι f και g είναι **ισοδύναμες** στο x και γράφουμε $f \overset{x}{\sim} g$, αν υπάρχει ένα ανοιχτό $A \subseteq U \cap V$ με $x \in A$ και $f|_A = g|_A$.

Είναι προφανές ότι η ανωτέρω 'ισοδυναμία' είναι, πράγματι, μια σχέση ισοδυναμίας. Η κλάση της f στο x θα λέγεται **το σπέρμα της** f **στο** x και θα συμβολίζεται με $[f]_x$. Το σύνολο αυτών των κλάσεων ισοδυναμίας θα λέγεται **η άλγεβρα των διαφορίσιμων σπερμάτων του** M **στο** x και θα συμβολίζεται με $A_x^\infty(M)$.

Υπενθυμίζουμε και τον επόμενο ορισμό:

2.2 Ορισμός. Ένα σύνολο $A \neq \emptyset$ εφοδιασμένο με τρεις πράξεις

$$A \times A \longrightarrow A : (a, b) \longmapsto a + b \tag{16}$$

$$\mathbb{R} \times A \longrightarrow A : (\lambda, a) \longmapsto \lambda a \tag{17}$$

$$A \times A \longrightarrow A : (a, b) \longmapsto ab \tag{18}$$

λέγεται (**πραγματική**) **άλγεβρα**, αν:

(i) με τις (16) και (17) είναι πραγματικός διανυσματικός χώρος,

(ii) με τις (16) και (18) είναι δακτύλιος, και

(iii) για κάθε $a, b \in A$ και $\lambda \in \mathbb{R}$, ισχύει

$$\lambda(ab) = (\lambda a)b = a(\lambda b).$$

Ιδιαιτέρως, μια άλγεβρα λέγεται **μεταθετική** (αντ. **μοναδιαία**), αν είναι μεταθετικός (αντ. μοναδιαίος) δακτύλιος.

2.3 Πρόταση. *Το σύνολο $A_x^\infty(M)$ είναι μια πραγματική, μοναδιαία, μεταθετική άλγεβρα.*

Απόδειξη. Ορίζουμε τις αλγεβρικές πράξεις μέσω των ισοτήτων

$$[f]_x + [g]_x := [f + g]_x \tag{19}$$

$$\lambda[f]_x := [\lambda f]_x \tag{20}$$

$$[f]_x \cdot [g]_x := [fg]_x \tag{21}$$

για κάθε $[f]_x, [g]_x \in A_x^\infty(M)$ και $\lambda \in \mathbb{R}$. Πρέπει να αποδείξουμε ότι αυτές οι ισότητες είναι καλά ορισμένες, δηλ. δεν εξαρτώνται από την επιλογή των απεικονίσεων f και g που αντιπροσωπεύουν τις κλάσεις ισοδυναμίας $[f]_x$

και $[g]_x$. Πράγματι, αν $U, U_1, V, V_1 \in \mathcal{N}(x)$ και $f : U \to \mathbb{R}$, $f_1 : U_1 \to \mathbb{R}$, $g : V \to \mathbb{R}$, $g_1 : V_1 \to \mathbb{R}$ είναι διαφορίσιμες, $f \overset{x}{\sim} f_1$ και $g \overset{x}{\sim} g_1$, τότε υπάρχουν ανοιχτά $A \subseteq U \cap U_1$ και $B \subseteq V \cap V_1$ με $f|_A = f_1|_A$ και $g|_B = g_1|_B$. Στο σύνολο $C := A \cap B \in \mathcal{N}(x)$, έχουμε $(f+g)|_C = (f_1 + g_1)|_C$, δηλαδή, $[f+g]_x = [f_1 + g_1]_x$. Με παρόμοιο τρόπο δείχνουμε ότι (20) και (21) είναι επίσης καλά ορισμένες.

Είναι τετριμμένο να ελέγξουμε ότι οι ανωτέρω πράξεις κάνουν το $A_x^\infty(M)$ μια άλγεβρα με τις ζητούμενες ιδιότητες.

Σημειώνουμε ότι το μηδενικό στοιχείο και η μονάδα της $A_x^\infty(M)$ είναι οι κλάσεις των σταθερών απεικονίσεων ίσων με 0 και 1, αντίστοιχα. □

2.4 Ορισμός. Μια **παραγώγηση** της $A_x^\infty(M)$ είναι μια $\mathbb{R}$–γραμμική απεικόνιση

$$\delta : A_x^\infty(M) \longrightarrow \mathbb{R}$$

που ικανοποιεί την **συνθήκη Leibniz:**

$$\delta([f]_x[g]_x) = \delta([f]_x)g(x) + f(x)\delta([g]_x), \tag{22}$$

για κάθε $[f]_x, [g]_x \in A_x^\infty(M)$.

Είναι προφανές ότι η σχέση $f \overset{x}{\sim} g$ συνεπάγεται ότι $\delta_u(f) = \delta_u(g)$, για κάθε $u \in T_xM$, απ' όπου προκύπτει άμεσα η επόμενη

2.5 Πρόταση. *Για κάθε $u \in T_xM$, η απεικόνιση*

$$\delta_u : A_x^\infty(M) \longrightarrow \mathbb{R} : [f]_x \longmapsto \delta_u([f]_x) = u(f)$$

είναι μια παραγώγηση της $A_x^\infty(M)$.