ΜΑΘΗΜΑ 12

1 Διαφορικές Ροές

1.1 Ορισμός. Έστω $(M, \mathcal{A})$ μια διαφορική πολλαπλότητα. Μια **διαφορική ροή** επί της M είναι μια διαφορίσιμη απεικόνιση

$$\theta : \mathbb{R} \times M \longrightarrow M,$$

που ικανοποιεί τις συνθήκες:

(1) $$\theta(0, x) = x, \qquad \forall\, x \in M,$$

(2) $$\theta(t, \theta(s, x)) = \theta(t + s, x), \qquad \forall\, s, t \in \mathbb{R},\ x \in M.$$

Δηλ., μια διαφορική ροή επί της M είναι μια διαφορίσιμη δράση της προσθετικής ομάδας $(\mathbb{R}, +)$ επί της M.

Παρατηρούμε ότι οι μερικές απεικονίσεις θ_t είναι διαφορίσιμες, $\theta_0 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$, ενώ για κάθε $t \in \mathbb{R}$, είναι

$$\theta_t(\theta_{-t}(x)) = \theta(t + (-t), x) = \theta(0, x) = x,$$

δηλ. κάθε $\theta_t : M \to M$ είναι αμφιδιαφόριση με αντίστροφη την

$$\theta_t^{-1} = \theta_{-t},$$

ενώ, λόγω της (2), ισχύει και η

$$\theta_t \circ \theta_s = \theta_{t+s}.$$

Επίσης παρατηρούμε ότι οι μερικές απεικονίσεις

$$\theta_x : \mathbb{R} \longrightarrow M, \qquad x \in M$$

είναι *διαφορίσιμες καμπύλες* της M.

1.2 Ορισμός. Έστω θ μια διαφορική ροή της $(M, \mathcal{A})$ και $x \in M$. Ονομάζουμε **τροχιά** του x και συμβολίζουμε με $\mathcal{O}_x$, την εικόνα της μερικής απεικόνισης θ_x, δηλ.

$$\mathcal{O}_x = \theta_x(\mathbb{R}) = \{\theta(t, x) \ : \ t \in \mathbb{R}\}.$$

Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι η ροή (σαν δράση που είναι) ορίζει μια σχέση ισοδυναμίας στην πολλαπλότητα:

$$x \sim y \ \Leftrightarrow \ \exists\, t \in \mathbb{R} \ : \ \theta(t, x) = y.$$

Οι τροχιά του $x \in M$ είναι η κλάση ισοδυναμίας του x ως προς αυτή την σχέση. Σαν αποτέλεσμα, έχουμε ότι δύο τροχιές ή συμπίπτουν, ή είναι ξένες.

1.3 Ορισμός. Έστω θ μια διαφορική ροή της $(M, \mathcal{A})$. Ονομάζουμε **απειροστικό γεννήτορα** της θ την απεικόνιση

$$\xi : M \longrightarrow TM : \xi(x) = \dot{\theta}_x(0).$$

1.4 Λήμμα. *Για κάθε διαφορική ροή θ της $(M, \mathcal{A})$, ο απειροστικός της γεννήτορας ξ είναι ένα διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο της M.*

Απόδειξη. Για κάθε $x \in M$, έχουμε ότι

$$\xi(x) = \dot{\theta}_x(0) \in T_{\theta_0(x)}M = T_xM,$$

άρα το ξ είναι διανυσματικό πεδίο. Είναι και διαφορίσιμο: αν $(U, \phi) \in \mathcal{A}$ με $x \in U$, τότε οι συνιστώσες του ξ ως προς τον (U, ϕ) είναι διαφορίσιμες:

$$\begin{aligned}\xi_i(x) = \xi_x(x_i) = \dot{\theta}_x(0)(x_i) &= \left(T\theta_x \left(\left.\frac{d}{dt}\right|_0 \right) \right)(x_i) \\ &= \left(\left.\frac{d}{dt}\right|_0 \right)(x_i \circ \theta_x) = \left.\frac{\partial(x_i \circ \theta_x)}{\partial t}\right|_0\end{aligned}$$

που είναι διαφορίσιμη ως προς x. □

1.5 Πρόταση. *Έστω $(M, \mathcal{A})$ διαφορική πολλαπλοτητα Hausdorff, θ διαφορική ροή της M και ξ ο απειροστικός της γεννήτορας. Τότε, για κάθε $x \in M$, η θ_x είναι η (μοναδική) ολοκληρωτική καμπύλη του ξ με αρχική συνθήκη x.*

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι $\dot{\theta}_x(s) = \xi(\theta_x(s))$, για κάθε $s \in \mathbb{R}$. Θεωρούμε $x \in M$ και $s \in \mathbb{R}$, σταθερό. Θέτουμε $\theta_x(s) = y \in M$. Παρατηρούμε ότι

$$\theta_y(t) = \theta(t, y) = \theta(t, \theta(s, x)) = \theta(t + s, x) = \theta_x(t + s) = \theta_x \circ \ell_s(t),$$

άρα

$$\theta_y = \theta_x \circ \ell_s.$$

Τώρα μπορούμε να υπολογίσουμε:

$$\begin{aligned} \xi(\theta_x(s)) = \xi(y) = \dot{\theta}_y(0) &= \dot{\overbrace{\theta_x \circ \ell_s}}(0) \\ &= T\theta_x \circ T\ell_s \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_0 \right) = T\theta_x \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{\ell_s(0)} \right) \\ &= T\theta_x \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_s \right) = \dot{\theta}_x(s). \end{aligned}$$

□

Παρατηρούμε ότι αν $\xi \in \mathcal{X}(M)$ είναι απειροστικός γεννήτορας μιας διαφορικής ροής, τότε οι ολοκληρωτικές καμπύλες του ορίζονται σε όλο το $\mathbb{R}$. Ένα τέτοιο διανυσματικό πεδίο λέγεται **πλήρες**.

Ας θεωρήσουμε τώρα ένα τυχαίο $\xi \in \mathcal{X}(M)$. Για κάθε $x \in M$, συμβολίζουμε με α_x την ολοκληρωτική καμπύλη του ξ με αρχική συνθήκη x. Τότε η απεικόνιση

$$\alpha : A \longrightarrow M : \alpha(t, x) = \alpha_x(t)$$

με A κατάλληλο υποσύνολο του $\mathbb{R} \times M$ είναι διαφορίσιμη. Επίσης,

$$\alpha_x(0) = x, \qquad \forall\, x \in M$$

και

$$\alpha(t, \alpha(s, x)) = \alpha(t + s, x)$$

για όσα t, s, x ορίζονται τα δύο μέλη της ισότητας. Πράγματι, η $\alpha(t, \alpha(s, x)) = \alpha_{\alpha(s,x)}(t)$ είναι η (μοναδική, για πολλαπλότητα Hausdorff) ολοκληρωτική καμπύλη του ξ με αρχική συνθήκη $\alpha(0, \alpha(s, x)) = \alpha(s, x)$. Η $\alpha(t + s, x)$ είναι επίσης ολοκληρωτική καμπύλη του ξ (βλ. σχέση (13) του Μαθήματος 11), με αρχική συνθήκη $\alpha(0 + s, x) = \alpha(s, x)$. Άρα οι δύο καμπύλες συμπίπτουν. Δηλ. οι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης $\dot{\alpha} = \xi \circ \alpha$ είναι "τοπικές διαφορικές ροές" επί της M.

1.6 Παραδείγματα. Λαμβάνοντας υπ' όψιν τα Παραδείγματα 1.5 του προηγούμενου μαθήματος, έχουμε:

(Α) Το $\xi \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^2)$ με

$$\xi = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y},$$

αντιστοιχεί στην διαφορική ροή

$$\theta(t,(x,y)) = \alpha_{(x,y)}(t) = (x \exp t, y \exp t),$$

για κάθε $t \in \mathbb{R}$ και $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(Γ) Το βασικό διανυσματικό πεδίο $\xi = \frac{\partial}{\partial x_1} \in \mathcal{X}(U)$, ως προς ένα χάρτη (U,ϕ), αντιστοιχεί στην (τοπική) ροή

$$\theta(t,x) = \alpha_x(t) = \phi^{-1}(t + x_1(x), x_2(x), \ldots, x_m(x)).$$

(Δ) Το ολικό διανυσματικό πεδίο $\xi = \frac{d}{dt}$ του $\mathbb{R}$ αντιστοιχεί στην διαφορική ροή

$$\theta(t,s) = \ell_s = t + s.$$

2 Συσχετισμένες Ροές

2.1 Ορισμός. Έστω $(M,\mathcal{A})$, $(N,\mathcal{B})$ διαφορικές πολλαπλότητες, $f : M \to N$ διαφορίσιμη και ϕ, ψ διαφορικές ροές των M, N, αντίστοιχα. Λέμε ότι οι ϕ, ψ είναι f-**συσχετισμένες**, αν

$$f \circ \phi = \psi \circ (\mathbf{id}_{\mathbb{R}} \times f),$$

δηλ. αν το επόμενο διάγραμμα είναι μεταθετικό.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R} \times M \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\mathbf{id}_{\mathbb{R}} \times f"'] & M \arrow[d, "f"] \\
\mathbb{R} \times N \arrow[r, "\psi"'] & N
\end{tikzcd}$$

2.2 Πρόταση. *Με τις υποθέσεις του προηγούμενου ορισμού, οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:*

(i) Οι ϕ, ψ είναι f-συσχετισμένες.

(ii) Οι απειροστικοί γεννήτορες των ϕ και ψ είναι f-συσχετισμένοι.

Απόδειξη. Έστω $\xi \in \mathcal{X}(M)$ και $\eta \in \mathcal{X}(N)$ οι απειροστικοί γεννήτορες των ϕ και ψ, αντίστοιχα.

($i \Rightarrow ii$) Έστω ότι ϕ, ψ είναι f-συσχετισμένες. Για κάθε $x \in M$, η ϕ_x είναι ολοκληρωτική καμπύλη του ξ, και, για κάθε $t \in \mathbb{R}$, η σύνθεση

$$f \circ \phi_x(t) = f(\phi(t,x)) = \psi \circ (\mathbf{id}_{\mathbb{R}} \times f)(t,x) = \psi(t, f(x)) = \psi_{f(x)}(t)$$

είναι ολοκληρωτική καμπύλη του η. Από την Πρόταση 1.6 του Μαθήματος 11, τα ξ και η είναι f-συσχετισμένα.

($ii \Rightarrow i$) Έστω τώρα ότι οι απειροστικοί γεννήτορες είναι f-συσχετισμένοι. Τότε (πάλι από την ίδια πρόταση), η f μεταφέρει κάθε ολοκληρωτική καμπύλη ϕ_x του ξ στην ολοκληρωτική καμπύλη $f \circ \phi_x$ του η, με αρχική συνθήκη $f \circ \phi_x(0) = f(x)$. Άρα η τελευταία συμπίπτει με την $\psi_{f(x)}$. Επομένως, για κάθε $t \in \mathbb{R}$ και $x \in M$,

$$f \circ \phi(t,x) = f \circ \phi_x(t) = \psi_{f(x)}(t) = \psi(t, f(x)) = \psi \circ (\mathbf{id}_{\mathbb{R}} \times f)(t,x)$$

και οι ροές είναι συσχετισμένες. $\square$