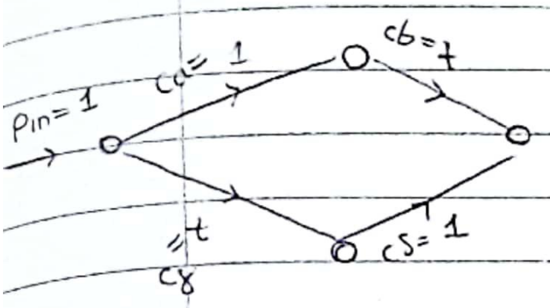
Παραδοξο Braess

ΓΡΑΦΕΙΣ
Βάλια Ευθυμίου
Φίλιππος Ρόντε



- Παικτες ειναι τα στοιχεια του διαστηματος [0,1]
- Δράσεις ειναι τα 2 μονοπάτια

– Εστω x_1 το μετρο των παικτών που ακολουθουν την ↗↘

– Εστω x_2 το μέτρο των παικτων που ακολουθων την διαδρομή ↘↗

Προφανως

$$x_1 + x_2 = 1$$

- Κάθε παικτης που ακολουθει την ↗↘

$$c_1(x_1, x_2) = c_a(x_1) + c_\beta(x_1)$$

$$\Rightarrow c_1(x_1, x_2) = 1 + x_1$$

- Καθε παικτης που ακολουθει την ↘↗

$$c_2(x_1, x_2) = c_\gamma(x_2) + c_\gamma(x_2)$$

$$\Rightarrow c_2(x_1, x_2) = x_2 + 1$$

Ατομικά Βέλτιστη ειναι μια κατανομή κινησης στην οποια κανείς παικτος δεν εχει κινητρο να αλλαξει την επιλογή διαδρομης.

- Για τους παικτες της διαδρομης 1

$$c_1(x_1, x_2) \leq c_2(x_1, x_2)$$

- Για τους παικτες της διαδρομης 2

$$c_2(x_1, x_2) \leq c_1(x_1, x_2)$$

Σάββατο [illegible]

① $\Rightarrow$ $x_1 = x_2 = 1/2$

②

~~[illegible]~~

<u>Κοινωνικά Βέλτιστο</u>: είναι μια κατανομή κίνησης που ελαχιστοποιεί $\Rightarrow$ συνολικό κόστος

$$C(x_1,x_2) = x_1 C_1(x_1 x_2) + x_2 C_1(x_1, x_2)$$

$$= x_1(1+x_1) + x_2(1+x_2)$$

$$= 1 + x_1^2 + x_2^2$$

$\Rightarrow$ Κοινωνικά βέλτιστο $x_1 = x_2 = 1/2$

$\Rightarrow C_{opt} = 1 + 1/4 + 1/4 = 6/4 = 3/2$

(το κόστος της κοινωνικά βέλτιστης λύσης)

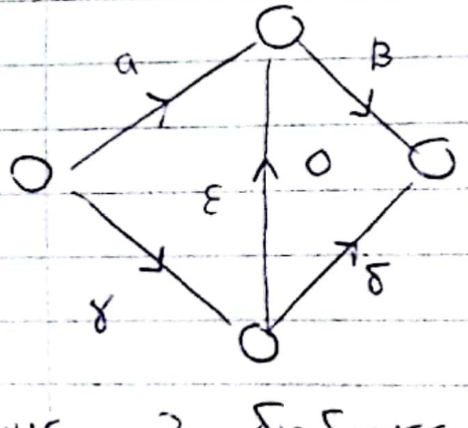
Όταν έχω $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$

και ψάχνω $\min\left(\sum x_i^2\right)$

$\Rightarrow$

$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1/n$

<u>Πρόβλημα II</u>



Έχουμε 3 διαδρομές $\{\alpha\beta, \gamma\delta, \gamma\varepsilon\beta\}$

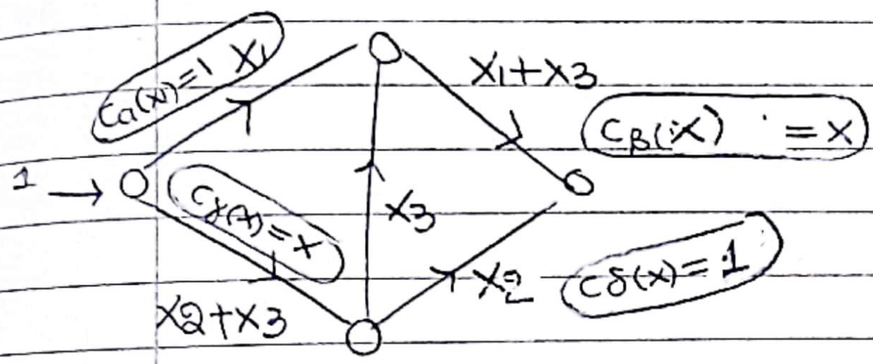
Εστω x_1 η μαζα στην διαδρομή $\alpha\beta$

x_2 >> $\gamma\delta$

x_3 >> $\gamma\epsilon\beta$

Απο την $\alpha\beta$ περναει x_1

$\gamma\delta$ περναει



Τα αντιστοιχα κοστη θα ειναι

$\vec{x}=(x_1, x_2, x_3)$

- $c_{a\beta}(\vec{x}) = 1+x_1+x_3$
- $c_{\gamma\delta}(\vec{x}) = x_2+x_3+1$
- $c_{\gamma\epsilon\beta}(\vec{x}) = x_2+x_3+x_1+x_3$

$= x_1+x_2+2x_3 = 1+x_3$

Ατομικα βελτιστη κατανομη

Θα πρεπει να εχουμε ισα κοστη

$$1+x_1+x_3 = 1+x_2+x_3 = 1+x_3$$

$\Rightarrow$ $x_2=0$

$x_1=0$

$x_3=1$ $\Rightarrow$ ολοι οι παικτες παιρνουν την υπερλεωφορο

Κοινωνικά βέλτιστη κατανομή

Η συνάρτηση συνολικού κόστους είναι

$$c(x) = x_1(1 + x_1 + x_3) + x_2(1 + x_2 + x_3) + x_3(1 + x_3)$$

$$= 1 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + (x_1 + x_2)x_3$$

$$= 1 + x_1^2 + x_2^2 + x_3(x_3 + x_1 + x_2)$$

$$= 1 + x_1^2 + x_2^2 + x_3$$

Θέτουμε

- $x_1 = u$
- $x_2 = v$
- $x_3 = 1 - u - v$

$$c(u,v) = 1 + u^2 + v^2 + 1 - u - v$$

$$= 2 + u^2 - u + v^2 - v$$

u, v δεν είναι πεπλεγμένες
αρκεί να ελαχιστοποιηθούν
$f_1(u) = u^2 - u$
$f_2(v) = v^2 - v$

Ελάχιστη τιμή όταν $u = v = 1/2$

$$\Rightarrow x_1 = x_2 = 1/2, \ x_3 = 0$$

$$\Rightarrow \bullet\ C_{opt} = 2 - 1/4 - 1/4 = 6/4 = 3/2$$

Αντιθέτως στην ισορροπία $(0,0,1)$

- $C_{eq} = 2$

$x_3 = 1$
$x_1 = x_2 = 0$

Παρατηρούμε ότι όταν δεν χρησιμοποιήθηκε η "γρήγορη οδός" $(x_3 = 0)$ το συνολικό κόστος μειώθηκε

PoA

ο λογος $\frac{C_{eq}}{C_{opt}} = \frac{2}{3/2} = 4/3$ καλειται

τιμημα της αναρχιας (Price of Anarchy)

<u>Θεωρημα (Roughgarden & Tardos 2004)</u>

Σε ∀ μη ατομικό παιχνιο δρομολογησης με αφινικες συναρτησεις κοστους εχουμε

$$PoA \leq \frac{C_{eq}}{C_{opt}} \leq \frac{4}{3}$$

αφινικες
$ax+B$

<u>Γενικευση</u>

Για πολυωνυμικες συναρτησεις βαθμου d

$$\left[(d+1)\sqrt[d]{d+1}\right] / \left((d+1)\sqrt[d]{d+1} - d\right)$$

$$\sim \frac{d}{\log d}$$

{ Ενοτητα 1 Εννοιες λύσεις και ισορροπιας σε πεπερασμένα παίγνια }

Υπενθυμιση: Ενα πεπερασμενο παιχνιδιο ειναι μια πλειάδα Γ που εχει $\Gamma(N, A, u)$ οπου
- $N = \{1, 2, \dots, k\}$ το συνολο παικτων
- A_i = πεπ/νο συνολο δρασεων (καθαρων/αμιγων στρατηγικων) $\forall$ παικτη $i \in N$
- Για $\forall$ παικτη $i \in N$ $\exists$ μια συναρτηση u_i ωφελειας/πληρωμης, $u_i : \prod_{j \in k} A_j \to \mathbb{R}$

Κυριαρχημένες στρατηγικές

#Παραδειγμα 1 : Το διλημμα του φυλακισμενου.

Εχουμε 2 φυλακισμενους I, II
με 2 δρασεις {Betray, Silent)

I \ II	Betray	Silent
Betray	(−5, −5)	(0, −10)
Silent	(−10, 0)	(−1, −1)

- Για τον παικτη 1

Betray ≻ Silent
↓
Κυριαρχεί

$(-5, -5) > (-10, 0)$
$(0, -10) > (-1, -1)$

- Για τον παικτη 2

Betray ≻ Silent

$(-5, -5) > (0, -10)$
$(-10, 0) > (-1, -1)$

Παρατηρηση

- Η λογικοτητα (rationality) προκρινει την επιλογη (Betray, Betray) γιατι το Silent "κυριαρχειται"
- Ωστοσο, αυτο αντιβαινει τα κριτηρια ομαδικης βελτιστοποιησης

<u>Ορισμός</u> Εστω πεπ/νο παιγνιο $\Gamma(N, A, u)$ θα λεμε ότι

① Η στρατηγική $a_i \in A_i$ κυριαρχειται γνησιως από την στρατηγικη $a_i' \in A_i$ όταν
$$u_i(a_i, a_{-i}) < u_i(a_i', a_{-i})$$
$$\forall a_{-i} \in A_{-i}$$

→ Συμβολισμος $a_i < a_i'$

a_{-i} → τι επαιξαν ολοι οι παικτες πλην του i

Τοτε η a_i λεγεται γνησιως κυριαρχημενη (strictly dominated)

② Η στρατηγική $a_i \in A_i$ κυριαρχειται ασθενώς απο την $a_i' \in A_1$ οταν
$$u_i(a_i, a_{-i}) \leq u_i(a_i', a_{-i}) \quad \forall a_{-i} \in A_{-i}$$
και η ανισοτητα ειναι γνησια για καποιο $a_{-i} \in A_{-i}$

→ Συμβολισμος $a_i \leq a_i'$

I \ II	Split	Steal
Split	(5,5)	(0,10)
Steal	(10,0)	(0,0)

Split ≤ Steal (για καθε παικτη)

Για το παικτη I
(split, split) ≤ (steal, split)
(split, steal) ≤ (steal, steal)
⇒ split ≤ steal

Για τον παικτη II
(split, split) ≤ (split, steal)
5 ≤ 0

(steal, split) ≤ (steal, steal)
0 0

• Η λογικότητα προκρίνει την απαλοιφή γνησίως κυριαρχημένων στρατηγικών αλλά όχι απαραίτητα την απαλοιφή ασθενώς κυριαρχημένων στρατηγικών

• Προφίλ ασθενώς κυριαρχημένων στρατηγικών μπορεί να είναι μονομερώς ευσταθές / ατομικά βέλτιστο

③ Διαδοχικά κυριαρχημένες στρατηγικές

Παράδειγμα : Θεωρούμε το εξής διπινακοπαίγνιδο

	β1	β2	β3
α1	(9, 4)	(5,3)	(3, 2)
α2	(0, 1)	(4,6)	(6, 0)
α3	(2, 1)	(3,5)	(2,4)

Για τον παίκτη γραμμή

• Η α1 <u>δεν</u> κυριαρχείται από ούτε την α2 ούτε την α3 (λόγω 9)
• Η α2 <u>δεν</u> κυριαρχείται από α1 ή α3
• Η α3 κυριαρχείται από την α1

Για τον παίκτη στήλη

• Η β1 <u>δεν</u> κυριαρχείται από κάποια
• Η β2 <u>δεν</u> κυριαρχείται από κάποια
β3 <u>δεν</u> κυριαρχείται από κάποια

Άρα ∃ μια κυριαρχημένη στρατηγική α3

"ο ΙΙ σβήνει"

*

Αν ο "ΙΙ σβήσει" την α3 (του παίκτη Ι) τότε ο "Ι σβήνει" την β3 αφού ο ΙΙ δεν πρόκειται να την χρησιμοποιήσει.

Μένει

	β1	β2
α1	/	/
α2	/	/

Η $α2 < α1$ ⇒ ο ΙΙ σβήνει την α2

Μένει

	β1	β2
α1	///	///

Τώρα $β2 < β1$ ⇒ ο Ι σβήνει την β2

Μένει α1 β1 → (9,4)

Βέλτιστες Αποκρίσεις (best responses)

Έστω το παιχνίδι "Battle of sexes" Robin & Charlie (οι παίκτες)

R \ C	movie	theater
movie	(3,2)	(0,0)
theater	(0,0)	(2,3)

Θα κοιτάξουμε δράσεις που είναι βέλτιστες σε συγκεκριμένες επιλογές των άλλων παικτών

* Στην πραγματικότητα εμείς που μελετάμε το παιχνίδι παρατηρούμε ότι αρχικά υπάρχει μια κυριαρχημένη στρατηγική ⇒ άρα δεν θα χρησιμοποιηθεί ⇒ "σβήνουμε" την περιττή πληροφορία. Αλλά μετά "μπαίνοντας στο μυαλό των παικτών" προκύπτουν και άλλες κυριαρχημένες στρατηγικές, οπότε συνεχίζουμε την διαδικασία διαγραφών (περιττής πληροφορίας) απλώς για να απλοποιήσουμε το παιχνίδι που μελετάμε.

$\boxed{\text{Ορισμός}}$ Θα λέμε ότι η στρατηγική $a_i^* \in A_i$ είναι βέλτιστη απόκριση στο προφίλ στρατηγικών $a_{-i} \in A_{-i}$ των υπολοίπων παικτών όταν εξ' ορισμού:

$$u_i(a_i^*, a_{-i}) \geq u_i(a_i; a_{-i}), \quad \forall a_i \in A_i$$

$$\Leftrightarrow \quad a_i^* \in \underset{a_i \in A_i}{\operatorname{argmax}} \left(u_i(a_i; a_{-i}) \right)$$

Απεικόνιση βέλτιστης απόκρισης θα καλείται η πλειότιμη απεικόνιση

$$BR_i : A_{-i} \underset{\substack{\text{απεικόνιση} \\ \text{σε σύνολο}}}{\Rightarrow} A_i$$

όπου

$$\boxed{BR_i(a_{-i}) = \underset{a_i \in A_i}{\operatorname{argmax}} \left[u_i(a_i; a_{-i}) \right]}$$

Παραδείγματα

- Split or Steal

$$BR_i(\text{split}) = \{\text{steal}\}$$
$$BR_i(\text{steal}) = \{\text{split}, \text{steal}\}$$

Το BR_i περιέχει πάντα το steal

- Prison Dilema

$$BR_i(\text{Silent}) = \{\text{Betray}\}$$
$$BR_i(\text{Betray}) = \{\text{Betray}\}$$

Το BR_i είναι πάντα Betray $\Rightarrow$ betray: "κυρίαρχουσα στρατηγική" π.χ. • Battle of Sexes

$BR_i(\text{movie}) = \{\text{movie}\}$
$BR_i(\text{theather}) = \{\text{theater}\}$

<u>Πρόταση</u> Οι βέλτιστες αποκρίσεις δεν είναι ποτέ γνησίως κυριαρχημένες

Δηλαδή αν $a_i \in BR_i(a_{-i})$ για κάποιο $a_{-i} \in A_{-i}$ τότε η a_i <u>δεν</u> είναι γνησίως κυριαρχημένη.

Το αντίστοιχο για ασθενώς κυριαρχημένες <u>δεν</u> ισχύει. Δηλαδή, αν a_i είναι best response για κάποιο a_{-i} ενδέχεται να $\exists\, a_j \in A_i$ ώστε $a_j \gtrsim a_i$

πχ στο Split — Steal
$\text{split} \in BR_i(\text{steal})$ όμως $\text{split} \lesssim \text{steal}$

<u>Στρατηγική Ισορροπία</u>

Ένα προφίλ στρατηγικών $a^* = (a_1^*, \dots, a_N^*)$ βρίσκεται σε στρατηγική ισορροπία
είναι
όταν $\boxed{a_i^* \in BR_i(a_{-i}^*) \ \forall i \in N}$

ή πιο συμπαγώς
$a^* \in BR(a^*)$ όπου

$$BR(a) = \prod_i BR(a_{-i})$$