ΓΡΑΦΕΙΣ
Ευαγγελία Τσελένη

[20/11/2023]

Εξελικτικές δυναμικές

Η δυναμική των αντιγραφέων (Replicator Dynamics)

<u>Ορσ</u>: Ένα μονοπληθυσμιακό παίγνιο αποτελείται από

① Ένα συνεχή πληθυσμό παικτών $N = [0,1]$

② Ένα πεπερασμένο σύνολο αμιγών στρατηγικών $A = \{1, \dots, m\}$ κοινό για όλον τον πληθυσμό.

③ Ένα σύνολο συναρτήσεων ωφέλειας $u_a : \Delta(A) \to \mathbb{R}$ μία για κάθε στρατηγική $a \in A$

<u>Δομή του παιγνίου</u>: Αν $x_a \in [0,1]$ η μάζα των παικτών που παίζουν $a \in A$, τότε η πληρωμή τους είναι $u_a(x)$ όπου $x = (x_1, \dots, x_m)$ είναι η κατάσταση του πληθυσμού.

<u>Συμβολισμός</u>: $X \equiv \Delta(A)$ ο χώρος καταστάσεων του παιγνίου

<u>Παράδειγμα</u>: Συνταίριασμα σε συμμετρικά παίγνια

→ Έστω συμμετρικό πεπερασμένο παίγνιο Γ

• Συμμετρικό: $\begin{cases} A_1 = A_2 \\ u_1(a_1, a_2) = u_2(a_2, a_1) \end{cases}$

→ Πληρωμές καθορίζονται από έναν πίνακα $M = (M_{a\beta})_{a,\beta \in A}$

→ <u>Συνταίριασμα</u>: Τραβάμε (ανεξάρτητα) 2 παίκτες από τον πληθυσμό (υποθέτοντας ότι βρίσκεται στην κατάσταση x)

→ <u>Μέση πληρωμή των a-παικτών</u>

$$\mathbb{E}_{\beta \sim x}[u(a,\beta)] = \mathbb{E}_{\beta \sim x}[M_{a\beta}] = \sum_\beta M_{a\beta} x_\beta$$

(*) Ένα για κάθε πληθυσμό $i=1,\dots,N$.

→ <u>Μέση πληρωμή</u>: $v(x) = \mathbb{E}_{a,b\sim x}[u_{ab}] = x^T M x$

Σημείωση: Η μέση πληρωμή είναι <u>τετραγωνική</u> στο x.

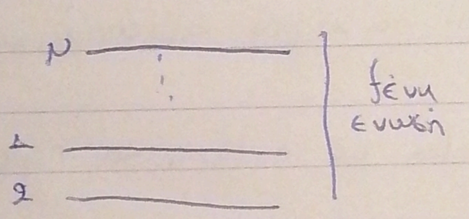
<u>Ορσ</u>: Ένα <u>πολυπληθυσμιακό</u> παιχνίδιο αποτελείται από

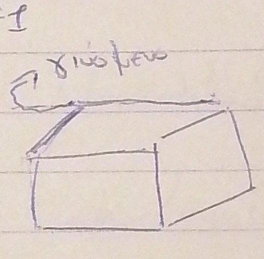
1. N συνεχείς <u>πληθυσμούς παικτών</u> $\mathcal{N} = [0,1] \amalg \dots \amalg [0,1]$ (*)
2. Ένα πεπ/νο <u>σύνολο αμιγών στρατηγικών</u> $A_i = \{1,\dots,m_i\}$
3. Ένα σύνολο <u>συναρτήσεων ωφέλειας</u>

$$u_{i a_i} : \prod_j \Delta(A_j) \to \mathbb{R}$$ μια για κάθε στρατηγική $a_i \in A_i$ κάθε πληθ. $i=1,\dots,N$

Σημείωση του Μεταφραστή (Σ.τ.Μ.): Το σύμβολο '$\amalg$' σημαίνει disjoint union ("ξένη ένωση") και ορίζεται ως

$$\coprod_{i\in I} S_i = \{(s,i) : s\in S_i, i\in I\}$$





<u>Παραδείγματα</u>: Συνταιριάσματα σε γενικά παιχνίδια

→ Έστω πεπ/νο παίγνιο $\Gamma \equiv \Gamma(N,A,u)$ N παικτών

→ <u>Συνταιριάσματα</u>: Τραβάμε (ανεξάρτητα) N παίκτες, έναν από κάθε πληθυσμό

[κατάσταση πληθυσμού i: $x_i \in X_i \equiv \Delta(A_i)$]

→ Μέση πληρωμή παικτών τύπου a_i στον i πληθυσμό

⟶

$$u_{i a_i}(x) = \mathbb{E}_{a_{-i} \sim x_{-i}}\left[u_i(a_i, a_{-i})\right] = \sum_{a_{-i} \in A_{-i}} x_{-i, a_{-i}} u_i(a_i, a_{-i})$$

<u>Μέση πληρωμή στον πληθυσμό i</u>

$$\mathbb{E}_{a \sim x}\left[u_i(a)\right] = \sum_{a_1 \in A_1} \cdots \sum_{a_N \in A_N} x_{1 a_1}, \ldots, x_{N, a_N} u_i(a_1, \ldots, a_N)$$

Σημείωση: το $u_i(x)$ είναι πολυγραμμικό ως προς x

<u>Εφαρμογές</u>: ① Συμμετρικό συντομφιστικό στο Πετρα-ψαλίδι-χαρτί

Πινακας πληρωμών $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

- Εστω ότι ο πληθυσμός των παιχτών βρίσκεται σε κατάσταση

$$\begin{cases} x_R \in \text{πετρα} \\ x_P \in \text{χαρτι} \\ x_S \in \text{ψαλίδι} \end{cases}$$

Μέσες πληρωμές ανά στρατηγική
$$\begin{cases} u_R(x) = (Mx)_R = x_S - x_P \\ u_P(x) = (Mx)_P = x_R - x_S \\ u_S(x) = (Mx)_S = x_P - x_R \end{cases}$$

$$Mx = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_R \\ x_P \\ x_S \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} x_S - x_P \\ x_R - x_S \\ x_P - x_R \end{pmatrix} \begin{matrix} R \\ P \\ S \end{matrix}\right]$$

Μέση πληρωμή του πληθυσμού

$$u(x) = x^T M x = (x_R \; x_P \; x_S) \begin{pmatrix} x_S - x_P \\ x_R - x_S \\ x_P - x_R \end{pmatrix} =$$

$$x_R \cancel{x_S} - x_R \cancel{x_P} + x_P \cancel{x_R} - \cancel{x_P x_S} + \cancel{x_S} x_P - \cancel{x_S} x_R = 0$$

② Μη συμμετρική συνεργασία στη μάχη των φύλων

- Δισδιάστατος πίνακας πληρωμών

$$\begin{array}{c|cc} & I & II \\ \hline I & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{}} \\ \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} & I & II \\ I & \multirow{2}{*}{$\left(\begin{matrix}(3,1) & (0,0) \\ (0,0) & (1,3)\end{matrix}\right)$} & \\ II & & \end{array}$$

- Δύο πληθυσμοί παικτών $\begin{cases} R: x = (x_I, x_{II}) \\ C: y = (y_I, y_{II}) \end{cases}$

Μέσες πληρωμές ανά στρατηγική και ανά πληθυσμό

$$u_1(x,y) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_I \\ y_{II} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3y_I \\ y_{II} \end{pmatrix}$$

$$u_2(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_I \\ x_{II} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_I \\ 3x_{II} \end{pmatrix}$$

Σημ: ΣΣΙ του παιχνιδιού

- Καθαρές στρατηγικές (I,I), (II,II)

Μεικτές στρατηγικές $u_{1,I}(x,y) = u_{1,II}(x,y)$

$\Rightarrow 3y_I = y_{II}$

$\Rightarrow y_I = \frac{1}{4}$, $y_{II} = \frac{3}{4}$

Ομοίως $u_{2,I}(x,y) = u_{2,II}(x,y) \Rightarrow x_I = 3x_{II} \Rightarrow \dots \Rightarrow$

$x_{II} = \frac{1}{4}$, $x_I = \frac{3}{4}$

Άρα ΣΣΙ: $\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right), \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$

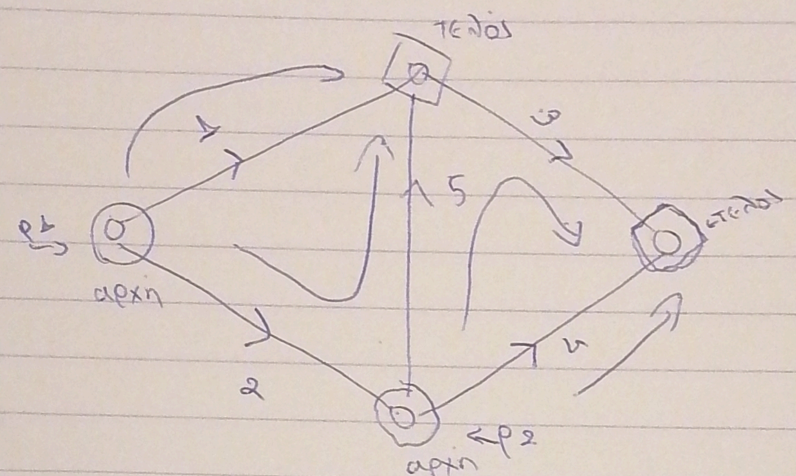
Αν $x = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $y = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$$u_1(x,y) = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \quad u_2(x,y) = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 3/2 \end{pmatrix}$$

Παράδειγμα / Εφαρμογή

→ Πολυπληθυσμιακό παιχνίδι $G = G(I, A, -c)$
↳ συναρτήσεις ωφέλειας

Μη ατομικά παιχνίδια Συμφόρησης
(Non-Atomic Congestion Games)
Routing



$A_1 = \{1, 25\}$
$A_2 = \{4, 53\}$

• (Πολυ) Γράφος $K = K(V, E)$
↑ κορυφές
ακμές

Σύνολο ζευγών αρχής - τέλους I

• Για κάθε ζεύγος, έχουμε ένα σύνολο διαδρομών A_i που ενώνουν το i-οστό ζεύγος

• **Ροή κίνησης**: για το i-οστό ζεύγος

κατάσταση του εκάστοτε πληθυσμού ← x_{ia} = κίνηση που δρομολογείται μέσω της a_i
$(\Sigma\, x_{ia} \geq 0,\ \Sigma_{a_i} x_{ia_i} = \rho_i)$

• Κόστος δρομολόγησης: Εξαρτάται από το φόρτο κάθε ακμής του δικτύου.

• Φορτίο της ακμής e: $\ell_e = \sum_{a \ni e} x_a$

Συνάρτηση κόστους ακμής $c_e: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$. $c_e(\ell_e)$ = κόστος της e αν το φορτίο είναι ℓ_e

Συνάρτηση κόστους διαδρομής: $c_a(x) = \sum_{e \in a} c_e(\ell_e)$

Σημείωση: • Συμμετρικό συνταίριασμα (1 πληθυσμός) ≠ Μεικτή επέκταση ενός παιχνιδιού

• Μη συμμετρικό συνταίριασμα (N πληθυσμοί) = Μεικτή επέκταση

• Πολυπληθυσμιακά παιχνίδια $\overset{?}{=}$ Μεικτές επεκτάσεις

[Δυναμική των αντιγραφέων]
[Replicator Dynamics]

① Βιολογική Θεώρηση (1 πληθυσμός)

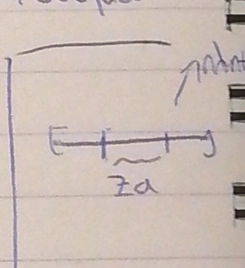
• Έστω ένα βιολογικό είδος με m διαφορετικούς τύπους $A = \{1, \dots, m\}$

• fecundity / fitness: u_a = αριθμός απογόνων στην ομάδα του χρόνου ανά άτομο

Δηλ. αν z_a = συνολική μάζα / μέτρο του πληθυσμού τύπου $a \in A = \{1, \dots, m\}$ [$z_a \geq 0$]

$\Rightarrow \dot{z}_a = \frac{dz_a}{dt} = u_a z_a$ → μάζα τύπου a

u_a ↓ ρυθμός αναπαραγωγής



→ Έστω $x_a = \frac{z_a}{\sum_\beta z_\beta}$ η σχετική συχνότητα του τύπου a

• Ρυθμός μεταβολής σχετικών συχνοτήτων ~>

$$\dot{x}_a = \frac{d}{dt}\left(\frac{z_a}{\sum_b z_b}\right) = \frac{\dot{z}_a \sum_b z_b - z_a \sum_b \dot{z}_b}{(\sum_b z_b)^2}$$

$$= \overbrace{\frac{z_a}{\sum_b z_b}}^{x_a} u_a - \frac{z_a \cdot \sum_b z_b u_b}{(\sum_b z_b)^2} = x_a [u_a - \sum_b x_b u_b]$$

$$\boxed{\dot{x}_a = x_a [u_a(x) - \underbrace{\sum_b x_b u_b(x)}_{u(x)}]}$$

Replicator Dynamics (1 πληθυσμός)

$$\left[\begin{array}{l} \dot{x}_{i a_i} = x_{i a_i}(v_{i a_i}(x) - u_i(x)) \quad \rightarrow N \text{ πληθυσμοί} \\ \qquad u_i(x) = \sum_{b_i \in A_i} x_{i b_i} u_{i b_i}(x) \\ a_i \in A_i, \quad i = 1, \dots, N \end{array}\right]$$

Ερμηνεία: Ο ρυθμός μεταβολής κατά κεφαλήν είναι ανάλογος της διαφοράς ωφέλειας του εκάστοτε τύπου από την μέση ωφέλεια του πληθυσμού

Βασικά Ερωτήματα

Συμφωνεί η εξέλιξη της κατάστασης του πληθυσμού με τις έννοιες λύσης που έχουμε δει;

- Εκλείπουν οι κυριαρχούμενες στρατηγικές;
- Συγκλίνει η κατάσταση σε ΣΙ;

- RD, Θεώρηση Β: Οικονομική

Πρωτόκολλα Αναθεώρησης (Revision Protocols)

Έστω πληθυσμός παικτών σε κατάσταση $x \in \Delta(A)$

(κατα κεφαλην)

Εστω $\rho_{aβ}(x)$ = (δεσμευμενος) ρυθμος αναθεωρησης $a \to β$

= σχετικη συχνοτητα παικτων που αλλαζουν απο a σε $β$ στην μοναδα του χρονου

Αλλ σε χρονο dt: Εξοδος απο την a: $out_{a \to β} = x_a \sum_{β \in A} \rho_{aβ} dt$

Εισοδος στην $a = in_a = \sum_{β \in A} x_β \rho_{βa} dt$

$$\left[\to \frac{dx_a}{dt} = \dot{x}_a = in_a - out_a = \sum_{β \in A} x_β \rho_{βa} - x_a \sum_β \rho_{aβ} \right]$$

Πρωτοκολλο αναλογικη μιμηση ανα ζευγη
(pairwise proportional imitation)

$$\rho_{aβ}(x) = x_β [u_β(x) - u_a(x)]_+$$

· Ρυθμος μεταβολης σχετικων συχνοτητων

$$\dot{x}_a = \sum_β x_β x_a [u_a - u_β]_+ - x_a \sum_β x_β [u_β - u_a]_+$$

$$= x_a \sum_β x_β [u_a - u_β] = x_a [u_a(x) - u(x)]$$

· RD, θεωρημα Γ: Θεωρια Μαθησης

→ Εστω πεπερασμενο παιχνιδι $Γ \equiv Γ(N, A, u)$

→ ~~Εκθ~~ Εκμαθηση μεσω εκθετικης ενισχυσης

Σταδιο 1: Ορίζουμε ως σκορ της στρατηγικης $a_i \in A_i$ την χρονικη στιγμη t.

$$y_{ia_i}(t) = \int_0^t u_i(a_i; x_{-i}(s)) ds$$

Σταδιο 2: Παιζω με πιθ/τα εκθετικα αναλογα στο y_{ia_i}

$$x_{ia_i}(t) \propto \exp(y_{ia_i}(t))$$

Ισοδύναμα $\quad y_{ia_i} = u_i(a_i, x_{-i}) = u_{ia_i}(x)$

$$x_{ia_i} = \frac{\exp(y_{ia_i})}{\left[\sum_{\beta\in A_i} \exp(y_{i\beta_i})\right]} \rightsquigarrow = Z$$

↳ δυναμική εκθετικών βαρών (exponential weigh dynamics)

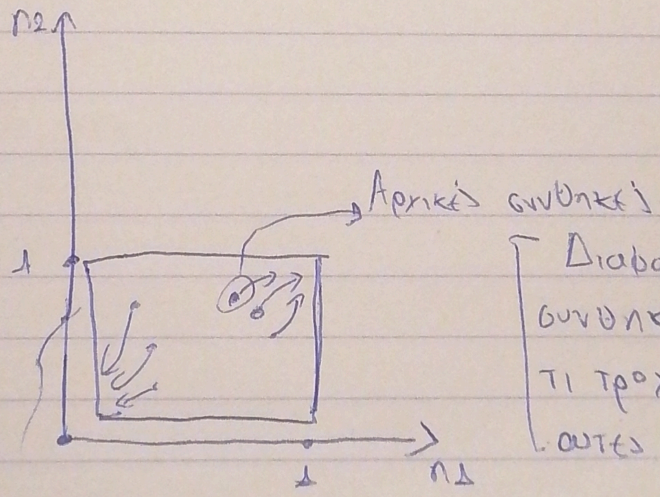
Εξέλιξη μεικτών στρατηγικών

$$\dot{x}_{ia_i} = \frac{\dot{y}_{ia_i}\exp(y_{ia_i})\,Z - \exp(y_{ia_i})\sum_{\beta}\dot{y}_{i\beta_i}\exp(y_{i\beta_i})}{Z^2}$$

$$= x_{ia_i}\cdot u_{ia}(x) - x_{ia_i}\sum_{\beta\in A_i} x_{i\beta_i}u_{i\beta_i}(x)$$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{x}_{ia_i} = x_{ia_i}\left[u_{ia_i}(x) - u_i(x)\right]}$$

Απεικόνιση μέσω | φασικών πορτρέτων
| κινησιακών



Διαφορετικές αρχικές συνθήκες για να δούμε τι τροχιά βγαίνει από αυτές τις συνθήκες

2x2 παιχνίδι