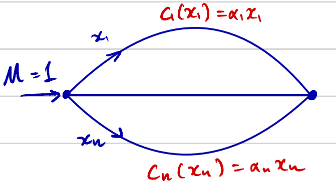
Θέμα 1 (*Παίγνια συμφόρησης*). Έστω ένα δίκτυο που αποτελείται από 2 σημεία, A και B, που ενώνονται από n παράλληλους δρόμους (όπως το δίκτυο Pigou που είδαμε στο μάθημα αλλά με n δρόμους αντί για 2). Η συνάρτηση κόστους του k-στού δρόμου είναι $c_k(x) = a_k x$, με $a_k > 0$ για κάθε $k = 1, \dots, n$.

(1) Υπολογίστε το τίμημα της αναρχίας (price of anarchy) του δικτύου όταν η συνολική εισροή κίνησης είναι $M = 1$.

(2) Επαναλάβετε τον παραπάνω υπολογισμό για γενικό $M > 0$, και βρείτε το όριο του τιμήματος της αναρχίας όταν $M \to 0^+$ ή $M \to \infty$. ※

ΛΥΣΗ: Έχουμε την εξής σχηματική αναπαράσταση



Εύρεση σημείου ισορροπίας: Αν x_k^* η ροή ισορροπίας στην ακμή k θα έχουμε από εξίσωση χρόνων διέλευσης (αρχή Wardrop):

$$c_1(x_1^*) = \dots = c_k(x_k^*) = \dots = c_n(x_n^*)$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1 x_1^* = \dots = \alpha_k x_k^* = \dots = \alpha_n x_n^* \Rightarrow x_k^* = \frac{\alpha_1}{\alpha_k} x_1^* \quad \forall k = 1, \dots, n$$

Άρα, αφού $x_1^* + \dots + x_n^* = M$, προκύπτει ότι $x_1^* + \dots + \frac{\alpha_1}{\alpha_k} x_1^* + \dots + \frac{\alpha_1}{\alpha_n} x_1^* = M$

$$\Rightarrow x_1^* = \frac{M/\alpha_1}{1/\alpha_1 + \dots + 1/\alpha_n} \Rightarrow x_k^* = \frac{M/\alpha_k}{1/\alpha_1 + \dots + 1/\alpha_n}$$

Για απλότητα έστω $\alpha_H = \left(1/\alpha_1 + \dots + 1/\alpha_n\right)^{-1}$ το "αρμονικό άθροισμα" των α_k οπότε έχουμε $x_k^* = M\,\alpha_H/\alpha_k$

$\Rightarrow$ Κόστος ισορροπίας: $C^* := C(x^*) = \sum_{k=1}^n x_k^* c_k(x_k^*) = \sum_k \alpha_k (x_k^*)^2 \Rightarrow C^* = \sum_k \frac{\alpha_H^2}{\alpha_k} M^2 = \alpha_H M^2$

Εύρεση βέλτιστου σημείου: Για τη βέλτιστη λύση, πρέπει να λύσουμε το πρόβλημα ελ/σης

minimize $C(x) = \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k^2$
subject to $\sum_{k=1}^n x_k = M$

$\Rightarrow$ Θεωρούμε τη Λαγκρανζιανή $\mathcal{L}(x) = \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k^2 - \lambda\left(\sum_{k=1}^n x_k - M\right)$

οπότε $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_k} = 2\alpha_k x_k - \lambda = 0 \Rightarrow x_k = \lambda/2\alpha_k$ δηλ. στη βέλτιστη κατανομή* έχουμε $x_k \propto 1/\alpha_k$

Όπως παραπάνω, προκύπτει ότι $x_k = M\,\alpha_H/\alpha_k \Rightarrow C^* = \min C \Rightarrow$ $PoA = 1 \ \forall M > 0$

*Γιατί βέλτιστη κ' όχι στάσιμη?

Θέμα 2 (*Σημεία ισορροπίας*). Υπολογίστε όλα τα σημεία ισορροπίας των διπινακοπαιγνίων

$$\begin{array}{c|ccc} & A & B & C \\ \hline A & (1,1) & (0,0) & (0,0) \\ B & (0,0) & (2,2) & (0,0) \\ C & (0,0) & (0,0) & (3,3) \end{array} \quad \text{και} \quad \begin{array}{c|ccc} & A & B & C \\ \hline A & (1,-1) & (0,0) & (0,0) \\ B & (0,0) & (-2,2) & (0,0) \\ C & (0,0) & (0,0) & (3,-3) \end{array}$$

Σημείωση: Αυτό που ενδιαφέρει στο εν λόγω θέμα είναι η σκέψη και η ανάλυσή σας για την εύρεση των σημείων ισορροπίας, όχι το τελικό αποτέλεσμα. ※

ΛΥΣΗ: Σε κάθε παίγνιο, θα προχωρήσουμε σταδιακά: θα ξεκινήσουμε αναζητώντας ΣΣΙ πλήρους στήριξης, κατόπιν στήριξης σε 2 στρατηγικές, κ' τέλος σε μία.
Ονομάζουμε A, B, C τις τρεις στρατηγικές (βλ. παραπάνω), κ' x/y τη στρατηγική του Π1/Π2.

① Ξεκινάμε με το πρώτο παίγνιο κ' υπολογίζουμε τα διανύσματα μικτών πληρωμών:

Π1: $v_1(x,y) = (y_A, 2y_B, 3y_C)$ $\quad v_2(x,y) = (x_A, 2x_B, 3x_C)$

→ Ισορροπία με στήριγμα $\{A,B,C\}$:

Εξίσωση πληρωμών Π1: $y_A = 2y_B = 3y_C \xrightarrow{y_A+y_B+y_C=1}$

" " Π2: $x_A = 2x_B = 3x_C \xrightarrow{x_A+x_B+x_C=1}$

$$\boxed{\begin{array}{l} y_A = 6/11,\ y_B = 3/11,\ y_C = 2/11 \\ x_A = 6/11,\ x_B = 3/11,\ x_C = 2/11 \end{array}}$$

→ Ισορροπία με στήριγμα $\{A,B\}$:

Εξίσωση πληρωμών Π1: $y_A = 2y_B \xrightarrow{y_A+y_B=1}$

" " Π2: $x_A = 2x_B \xrightarrow{x_A+x_B=1}$

$$\boxed{\begin{array}{ll} y_A = 2/3 & y_B = 1/3 \\ x_A = 2/3 & x_B = 1/3 \end{array}}$$

Έλεγχος: $u_1(C,y) = 0 < u_1(x,y) = 1\cdot 4/9 + 2\cdot 1/9 = 2/3$ ✓

→ Ισορροπία με στήριγμα $\{B,C\}$:

Εξίσωση πληρωμών Π1: $2y_B = 3y_C \xrightarrow{y_B+y_C=1}$

" " Π2: $2x_B = 3x_C \xrightarrow{x_B+x_C=1}$

$$\boxed{\begin{array}{ll} y_B = 3/5 & y_C = 2/5 \\ x_B = 3/5 & x_C = 2/5 \end{array}}$$

Έλεγχος: $u_1(A,y) = 0 < u_1(x,y) = 2\cdot\frac{9}{25} + 3\cdot\frac{4}{25} = 6/5$ ✓

→ Ισορροπία με στήριγμα $\{A,C\}$:

Εξίσωση πληρωμών Π1: $y_A = 3y_C \xrightarrow{y_A+y_C=1}$

" " Π2: $x_A = 3x_C \xrightarrow{x_A+x_C=1}$

$$\boxed{\begin{array}{ll} y_A = 3/4 & y = 1/4 \\ x_A = 3/4 & x = 1/4 \end{array}}$$

Έλεγχος: $u_1(B,y) = 0 < u_1(x,y) = 1\cdot\frac{9}{16} + 3\cdot\frac{1}{16} = 3/4$ ✓

$\Longrightarrow$

→ Ισορροπία σε αμιγείς στρατηγικές: Ένας εύκολος έλεγχος δείχνει ότι κάθε καθαρή στρατηγική (A,B,C) είναι ΣΣΙ

→ Λόγω συμμετρίας δε χρειάζεται να ελέγξουμε στηρίγματα της μορφής $\{A,B\}\times\{B,C\}$ κλπ (γιατί?)

Συνολικά, προκύπτουν 7 σημεία ισορροπίας:

Π1	Π2
$(2/11, 3/11, 6/11)$	$(2/11, 3/11, 6/11)$
$(2/3, 1/3, 0)$	$(2/3, 1/3, 0)$
$(0, 3/5, 2/5)$	$(0, 3/5, 2/5)$
$(3/4, 0, 1/4)$	$(3/4, 0, 1/4)$
$(1, 0, 0)$	$(1, 0, 0)$
$(0, 1, 0)$	$(0, 1, 0)$
$(0, 0, 1)$	$(0, 0, 1)$

(2) Συνεχίζουμε με το δεύτερο παίγνιο. Εδώ παρατηρούμε τα εξής:

→ Το προφίλ (A, B) είναι ΣΣΙ

→ Το προφίλ (C, B) είναι ΣΣΙ

→ Το παίγνιο είναι μηδενικού αθροίσματος ⇒ Κάθε κυρτός συνδυασμός των παραπάνω είναι ΣΣΙ

→ Οι βέλτιστες στρατηγικές κάθε παίκτη είναι κυρτό σύνολο & δεν υπάρχουν άλλα αμιγή ΣΣΙ

→ Σύνολο ΣΣΙ: $\boxed{NE(\Gamma) = \underbrace{\{(\lambda, 0, 1-\lambda) : 0 \le \lambda \le 1\}}_{\Pi 1} \times \underbrace{\{(0,1,0)\}}_{\Pi 2}}$

Θέμα 3 (***Supinf στρατηγικές***). Έστω δύο αριθμήσιμα σύνολα A, B και μία αντικειμενική συνάρτησης ελαχιστομεγιστοποιήσης $f: A \times B \to \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι

$$\sup_{a \in A} \inf_{b \in B} f(a, b) = \inf_{\beta: A \to B} \sup_{a \in A} f(a, \beta(a)) \tag{1}$$

Σημείωση: Ο περιορισμός σε αριθμήσιμα σύνολα δεν έχει σημασία, αλλά αν σας διευκολύνει, μπορείτε να το υποθέσετε. ※

ΛΥΣΗ: Θα δείξουμε την ισότητα δείχνοντας "supinf ≤ inf sup ≤ supinf"

Βήμα 1ο: $\sup_a \inf_b f(a,b) \leq \inf_{\beta: A\to B} \sup_a f(a,\beta(a))$

Έχουμε $\inf_{b'} f(a,b') \leq f(a,b) \quad \forall a \in A, b \in B$

$\Rightarrow \inf_{b'} f(a,b') \leq f(a,\beta(a)) \quad \forall a \in A, \beta: A \to B$

$\Rightarrow \sup_a \inf_{b'} f(a,b') \leq \sup_a f(a,\beta(a)) \quad \forall \beta: A \to B$

$\Rightarrow \sup_a \inf_b f(a,b) \leq \inf_{\beta: A\to B} \sup_{a\in A} f(a,\beta(a))$

Βήμα 2ο: $\inf_{\beta: A\to B} \sup_a f(a,\beta(a)) \leq \sup_a \inf_b f(a,b)$

Εξ ορισμού, το $\inf_b f(a,b)$ είναι το μέγιστο κάτω φράγμα του $f(a,b)$ ως προς b.

Άρα, για κάθε $\varepsilon > 0$, $a \in A$, υπάρχει κάποιο $b' \in B$ τ.ω. $f(a,b') < \inf_b f(a,b) + \varepsilon$

Σταθεροποιώντας το $\varepsilon > 0$, επιλέγουμε* $\forall a > 0$ κάποιο $\beta(a) \in B$ ώστε $f(a,\beta(a)) < \inf_b f(a,b) + \varepsilon$

$\Rightarrow$ Για κάθε $\varepsilon > 0$ κατασκευάσαμε $\beta: A \to B$ ώστε $f(a,\beta(a)) < \inf_b f(a,b) + \varepsilon$

$\Rightarrow \sup_a f(a,\beta(a)) < \sup_a \inf_b f(a,b) + \varepsilon$

Αφού αυτό είναι δυνατό για κάθε $\varepsilon > 0$, έπεται ότι $\inf_{\beta: A\to B} \sup_a f(a,b) \leq \sup_a \inf_b f(a,b)$

Αυτό συμπληρώνει την απόδειξή μας. □

* Εδώ χρησιμοποιούμε το αξίωμα της επιλογής (εξού κ' η υπόθεση για αριθμήσιμα σύνολα σε περίπτωση που ενοχλούσε)

Θέμα 4 (*Σημεία αυστηρής ισορροπίας*). Έστω ένα πεπερασμένο παίγνιο $\Gamma \equiv \Gamma(\mathcal{N}, \mathcal{A}, u)$. Υπενθυμίζεται ότι ένα προφίλ μεικτών στρατηγικών $x^* = (x_1^*, \dots, x_N^*)$ είναι *σημείο αυστηρής ισορροπίας* όταν

$$u_i(x_i^*; x_{-i}^*) > u_i(x_i; x_{-i}^*) \quad \text{για κάθε } x_i \in \mathcal{X}_i \setminus \{x_i^*\} \text{ και για κάθε } i \in \mathcal{N}.$$

Αν $v_i(x) = (u_i(\alpha_i; x_{-i}))_{\alpha_i \in \mathcal{A}_i}$ το διάνυσμα μεικτών πληρωμών του παίκτη $i \in \mathcal{N}$ στο προφίλ μεικτών στρατηγικών $x = (x_1, \dots, x_N)$, να δείξετε ότι τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

(1) Το x^* είναι σημείο αυστηρής ισορροπίας.

(2) Κάθε x_i^*, $i \in \mathcal{N}$, στηρίζεται σε μία μοναδική αμιγή στρατηγική α_i^* (δηλαδή $\operatorname{supp}(x_i^*) = \{\alpha_i^*\}$ για κάθε $i \in \mathcal{N}$) και, επιπλέον, $u_i(\alpha^*) > u_i(\alpha_i; \alpha_{-i}^*)$ για κάθε $\alpha_i \in \mathcal{A}_i \setminus \{\alpha_i^*\}$ και για κάθε $i \in \mathcal{N}$.

(3) $\sum_{i \in \mathcal{N}} \langle v_i(x^*), x_i - x_i^* \rangle < 0$ για κάθε $x \in \mathcal{X} \setminus \{x^*\}$.

(4) $\sum_{i \in \mathcal{N}} \langle v_i(x), x_i - x_i^* \rangle < 0$ για κάθε $x \neq x^*$ σε κάποια (πιθανώς μικρή) περιοχή του x^*.

Χρησιμοποιώντας την τελευταία ιδιότητα δείξτε ότι τα σημεία αυστηρής ισορροπίας είναι ασυμπτωτικά ευσταθή ως προς τη δυναμική των αντιγραφέων. [Υπόδειξη: θεωρήστε τη συνάρτηση $E(x) = -\sum_{i \in \mathcal{N}} \log x_{i\alpha_i^*}$ και μελετήστε την εξέλιξή της ως προς τη δυναμική των αντιγραφέων.] ※

ΛΥΣΗ:

(1) ⇒ (2) Έστω ότι κάποιος παίκτης $i \in \mathcal{N}$ διαθέτει στρατηγικές $\alpha_i, \beta_i \in \mathcal{A}_i$, $\alpha_i \neq \beta_i$, $\alpha_i, \beta_i \in supp(x_i^*)$.
Τότε, αφού x^* Nash, θα έχουμε $u_i(\alpha_i; x_{-i}^*) = u_i(\beta_i; x_{-i}^*) = u_i(x_i^*; x_{-i}^*)$.
Αφού όμως $\alpha_i \neq x_i^* \neq \beta_i$, αυτό είναι άτοπο $\Rightarrow$ $supp(x_i^*)$ = μονοσύνολο για κάθε $i \in \mathcal{N}$

(2) ⇒ (3) Έστω $x_i \in \mathcal{X}_i$ με $x_i \neq x_i^*$, κ' έστω $x_{i\alpha_i^*} = 1 - \varepsilon$ για κάποιο $\varepsilon > 0$.
Τότε θα έχουμε:

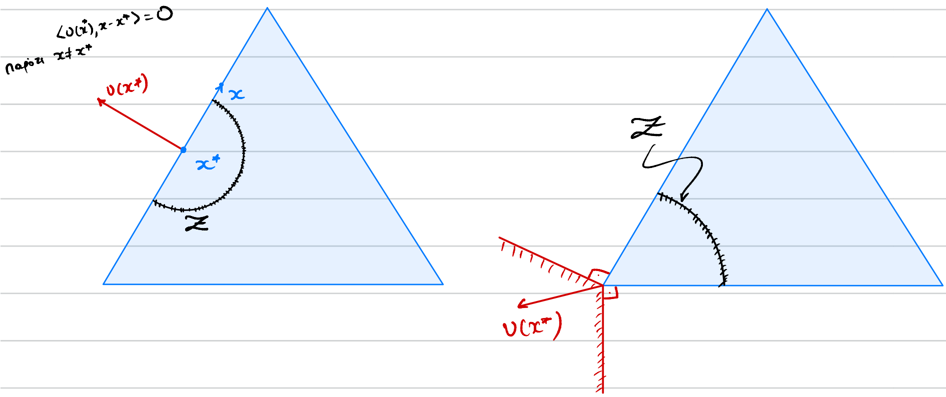
$$\langle v_i(x^*), x_i - x_i^* \rangle = \sum_{\alpha_i \in A_i} u_i(\alpha_i; x_{-i}^*) \cdot (x_{i\alpha_i} - x_{i\alpha_i}^*)$$
$$= u_i(\alpha_i^*; x_{-i}^*) \cdot (\cancel{1} - \varepsilon - \cancel{1})$$
$$+ \sum_{\alpha_i \neq \alpha_i^*} u_i(\alpha_i; x_{-i}^*) \, (x_{i\alpha_i} - 0)$$

$^* \sum_{\alpha_i \neq \alpha_i^*} x_{i\alpha_i} = 1 - x_{i\alpha_i^*} = \varepsilon$

$$\overset{*}{=} -\varepsilon\, u_i(\alpha_i^*; x_{-i}^*) + \sum_{\alpha_i \neq \alpha_i^*} u_i(\alpha_i; x_{-i}^*)$$
$$= -\sum_{\alpha_i \neq \alpha_i^*} x_{i\alpha_i} u_i(\alpha_i^*; x_{-i}^*) + \sum_{\alpha_i \neq \alpha_i^*} u_i(\alpha_i; x_{-i}^*)$$
$$= -\sum_{\alpha_i \neq \alpha_i^*} x_{i\alpha_i} \left[u_i(\alpha_i^*; x_{-i}^*) - u_i(\alpha_i; x_{-i}^*) \right]$$
$$= -\sum_{a_{-i}} x_{a_{-i}} \sum_{\alpha_i \neq \alpha_i^*} \underbrace{\left[u_i(\alpha_i^*; \alpha_{-i}^*) - u_i(\alpha_i; \alpha_{-i}^*) \right]}_{>0}$$
$$< 0$$

$$\Rightarrow \sum_i \langle v_i(x), x_i - x_i^* \rangle < 0 \quad \forall x \neq x^*$$

(3) $\Rightarrow$ (4) Ένα σχήμα βοηθάει: σε μια πρώτη φάση σκεφτείτε γιατί το αριστερό σχήμα αποκλείεται κ' μόνο το δεξί μπορεί να ισχύει στην περίπτωση (3).



Για να δείξουμε ότι (3) $\Rightarrow$ (4) έστω $\mathcal{Z} = \{z : \|z\|=1,\ x^*+tz \in \mathcal{X}$ αν $t>0$ μικρό$\}$ το σύνολο των "επιτρεπόμενων μετατοπίσεων" από το x^* προς το εσωτερικό του $\mathcal{X}$ (βλ. σχήμα)

Από την (3) έπεται ότι $\langle v(x^*), z\rangle < 0 \quad \forall z \in \mathcal{Z}$

Αφού $\mathcal{Z}$ συμπαγές συμπεραίνουμε ότι $\langle v(x^*), z\rangle \leq -c < 0$ για κάποιο $c>0$ κ' για κάθε $z \in \mathcal{Z}$

Αφού v συνεχής, έπεται ότι $\langle v(x), z\rangle \leq -c/2 < 0$ για κάθε x σε μια περιοχή $\mathcal{U}$ του x^* κ' για κάθε $z \in \mathcal{Z}$

Άρα, αν πάρουμε $t>0$ αρκετά μικρό ώστε $x = x^* + tz \in \mathcal{U}$, έχουμε

$\langle v(x), z\rangle = 1/t \langle v(x), x-x^*\rangle < 0 \quad \forall x \in \mathcal{U}$ με $x \neq x^*$

(4) $\Rightarrow$ (1) Έστω ότι το x^* δεν είναι σημείο αυστηρής ισορροπίας οπότε υπάρχει κάποιος παίκτης $i \in \mathcal{N}$ κ' στρατηγικές $\alpha_i \in \operatorname{supp}(x_i^*)$, $\beta_i \in \mathcal{A}_i$ τ.ω. $u_i(\alpha_i; x^*_{-i}) = u_i(\beta_i; x^*_{-i})$. Τότε όμως, αν θέσουμε $x_i = x_i^* + \lambda(e_{i\beta_i} - e_{i\alpha_i})$ κ' $x_{-i} = x^*_{-i}$ με $\lambda>0$ αρκούντως μικρό, η (4) δίνει

$$\sum_{i\in\mathcal{N}} \langle v_i(x), x_i - x_i^*\rangle = \langle v_i(x), x_i - x_i^*\rangle = \lambda_i [u_i(\beta_i; x^*_{-i}) - u_i(\alpha_i; x^*_{-i})] = 0$$

όπερ άτοπο επειδή $\sum_{i\in\mathcal{N}} \langle v_i(x), x_i - x_i^*\rangle < 0$ αν $x \neq x^*$.

Ασυμπτωτική ευστάθεια:

Έστω $\mathcal{U}$ μια περιοχή όπου $\langle v(x), x-x^* \rangle < 0$ αν $x \in \mathcal{U}$, $x \neq x^*$.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι η $\mathcal{U}$ είναι της μορφής
$\mathcal{U} = \{x \in \mathcal{X} : E(x) < \varepsilon\}$ για κάποιο $\varepsilon > 0$ (γιατί?)

Τώρα, αν η x ακολουθεί τη δυναμική των αντιγραφέων, θα έχουμε

$$\dot{x}_{ia_i} = x_{ia_i}\left[u_i(a_i; x_{-i}) - u_i(x)\right]$$

Άρα, για τη συνάρτηση $E(x)$ θα έχουμε

$$\dot{E}(x) = \frac{d}{dt} E(x(t)) = \sum_{i \in N} \frac{d}{dt} \log x_{ia_i^*} = \sum_{i \in N} \frac{\dot{x}_{ia_i^*}}{x_{ia_i^*}}$$

$$= \sum_{i \in N} \left[u_i(a_i^*; x_{-i}) - u_i(x)\right] = \sum_{i \in N} \langle v_i(x), x_i - x_i^* \rangle < 0 \quad \text{αν } x \in \mathcal{U},\ x \neq x^*.$$

Συμπεραίνουμε ότι η $E(x(t))$ είναι φθίνουσα. Αφού $E \geq 0$, η $E(x(t))$ συγκλίνει σε κάποιο όριο $E_\infty \geq 0$.
Ωστόσο, αν $E_\infty > 0$, αυτό σημαίνει ότι η $x(t)$ παραμένει μακριά από το x^* $\Rightarrow$ $\dot{E}$ φραγμένη μακριά από το 0
$\Rightarrow$ άτοπο $\Rightarrow$ $E_\infty = 0$ $\Rightarrow$ $x(t)$ συγκλίνει στο x^*

$\Longrightarrow$ x^* ασυμπτωτικά ευσταθές

Αφού $E(x(t))$ φθίνουσα, έπεται ότι $x(t) \in \mathcal{U}$ $\forall t \geq 0$ $\Rightarrow$ x^* Lyapunov ευσταθές

Θέμα 5 (***Παίγνια δυναμικού***). Ένα πεπερασμένο παίγνιο $\Gamma \equiv \Gamma(\mathcal{N}, \mathcal{A}, u)$ καλείται παίγνιο δυναμικού όταν επιδέχεται μία συνάρτηση $\phi\colon \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$u_i(\alpha_i;\alpha_{-i}) - u_i(\beta_i;\alpha_{-i}) = \phi(\alpha_i;\alpha_{-i}) - \phi(\beta_i;\alpha_{-i}) \quad \text{για κάθε προφίλ } \alpha,\beta \in \mathcal{A} \text{ και κάθε } i \in \mathcal{N}.$$

(1) Να δείξετε ότι ένα παίγνιο είναι παίγνιο δυναμικού αν και μόνο αν επιδέχεται μία συνάρτηση $f\colon \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ ώστε

$$\langle v(x), x' - x\rangle = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} f(x + t(x' - x)) \quad \text{για κάθε } x, x' \in \mathcal{X}. \tag{2}$$

(2) Εξετάστε αν η παραπάνω συνθήκη είναι ισοδύναμη με την ύπαρξη μίας συνάρτησης $p\colon \mathbb{R}^{\mathcal{A}} \to \mathbb{R}$ ώστε $v(x) = \nabla p(x)$ για κάθε $x \in \mathcal{X}$.

(3) Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω, να δείξετε ότι σε ένα παίγνιο δυναμικού, ή δυναμική των αντιγραφέων συγκλίνει σε ισορροπία Nash από οποιαδήποτε πλήρως μεικτή αρχική συνθήκη. ※

ΛΥΣΗ:

1 Έστω $f(x) = \sum_{\alpha_1\in\mathcal{A}_1} \cdots \sum_{\alpha_N\in\mathcal{A}_N} x_{1\alpha_1} \cdots x_{N\alpha_N}\, \phi(\alpha_1,\dots,\alpha_N)$ η μεικτή επέκταση της ϕ.

Τότε, εξ ορισμού, για κάθε $x, x' \in \mathcal{X}$ έχουμε:

$$u_i(x_i';x_{-i}) - u_i(x_i;x_{-i}) = f(x_i';x_{-i}) - f(x_i;x_i)$$

Επομένως, και για κάθε κυρτό συνδυασμό των x_i κ' x_i', θα έχουμε:

$$\underbrace{u_i(x_i + t(x_i'-x_i);x_{-i}) - u_i(x_i;x_{-i})}_{} = f(x_i + t(x_i'-x_i);x_{-i}) - f(x_i;x_{-i})$$

$$= \sum_{\alpha_i} t(x_{i\alpha_i}' - x_{i\alpha_i})\, u_i(\alpha_i;x_{-i})$$

Οπότε: $\displaystyle \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} f(x_i + t(x_i'-x_i);x_{-i}) = \sum_{\alpha_i}(x_{i\alpha_i}' - x_{i\alpha_i})\, \overbrace{u_i(\alpha_i;x_{-i})}^{v_{i\alpha_i}(x)} = \langle v_i(x), x_i' - x_i\rangle$

Άρα από τη γραμμικότητα των παραγώγων, θα έχουμε και

$$\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} f(x + t(x'-x)) = \sum_{i\in\mathcal{N}} \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} f(x_i + t(x_i'-x_i);x_{-i}) = \sum_{i\in\mathcal{N}} \langle v_i(x), x_i' - x_i\rangle = v(x)$$

Αντιστρόφως, η παραπάνω συνθήκη συνεπάγεται άμεσα ότι η f είναι γραμμική ως προς κάθε x_i κ' το ζητούμενο έπεται με απλή αντιστροφή βημάτων.

Αλλάζω συμβολισμό για απλότητα
σε x για Π1 (αντί x_1)
y για Π2 (αντί x_2)

(2) Όχι! Θεωρήστε το παίγνιο

$$\begin{array}{c|cc} & L & R \\ \hline T & (0,0) & (-1,1) \\ B & (3,-1) & (0,-2) \end{array}$$

Είναι εύκολο να δείτε ότι επιδέχεται τη συνάρτηση δυναμικού $\begin{cases} f(T,L)=0 & f(T,R)=1 \\ f(B,L)=3 & f(B,R)=2 \end{cases}$

Ωστόσο, τα μικτά διανύσματα πληρωμών είναι:

$v_1(x,y) = (-y_R,\ 3y_L - 2y_R)$ κ' $v_2(x,y) = (-x_B,\ x_T - 2x_B)$

Άρα, αναζητούμε συνάρτηση $p(x_T, x_B, y_L, y_R)$ τ.ω.

$$\underbrace{\frac{\partial p}{\partial x_T} = -y_R \quad \frac{\partial p}{\partial x_B} = 3y_L - 2y_R}_{v_1} \qquad \underbrace{\frac{\partial p}{\partial y_L} = -x_B \quad \frac{\partial p}{\partial y_R} = x_T - 2x_B}_{v_2}$$

$\frac{\partial}{\partial y_R}$ $\frac{\partial}{\partial x_T}$

Ωστόσο, έχουμε π.χ. $\frac{\partial^2 p}{\partial y_R \partial x_T} = -1 \neq 1 = \frac{\partial^2 p}{\partial x_T \partial y_R} \Rightarrow$ άτοπο

(3) Έστω ότι η $x(t)$ ακολουθεί τη δυναμική των αντιγραφέων.

Τότε $\frac{d}{dt} f(x(t)) \overset{\text{Ερ.1}}{=} \langle v(x(t)), \dot{x}(t) \rangle = \sum_i \langle v_i(x(t)), \dot{x}_i(t) \rangle$

$= \sum_{i \in N} \sum_{\alpha_i} x_{i\alpha_i}(t) \left[v_{i\alpha_i}(x(t)) - u_i(x(t)) \right] v_{i\alpha_i}(x(t))$

$= \sum_{i \in N} \left[\sum_{\alpha_i} x_{i\alpha_i} v_{i\alpha_i}^2 - \left(\sum_i x_{i\alpha_i} v_{i\alpha_i} \right)^2 \right]$

≥ 0 με ισότητα μόνο αν η $x(t)$ στάσιμη (γιατί?)

Συμπεραίνουμε ότι η $x(t)$ συγκλίνει σε ένα μέγιστο της f.* Ωστόσο, αν η $x(t)$ συγκλίνει, τότε συγκλίνει αναγκαστικά σε ένα ΣΣΙ $\Rightarrow$ Η $x(t)$ συγκλίνει σε ΣΣΙ

---

* Εδώ υπάρχει μια κρυμμένη δυσκολία που ήθελα να δω αν θα αναντούσατε. Δεν έχει μεγάλη σημασία αυτό το τεχνικό σημείο στα πλαίσια της εξέτασης.

Θέμα 6 (***Βρείτε το παιχνίδι***). Έστω ένα παίγνιο 2×2 όπου ο πρώτος παίκτης επιλέγει μεταξύ των στρατηγικών "T" και "B" (top/bottom), ενώ ο δεύτερος παίκτης επιλέγει μεταξύ των στρατηγικών "L" και "R" (left/right). Συμβολίζουμε με x την πιθανότητα με την οποία ο πρώτος παίκτης παίζει T, και y την πιθανότητα με την οποία ο δεύτερος παίκτης παίζει L.

Δίνονται οι παρακάτω δυναμικές

(1) $\dot{x} = x(1-x)(4y-1)$ και $\dot{y} = y(1-y)(4x-3)$

(2) $\dot{x} = x(1-x)(2y+1)$ και $\dot{y} = y(1-y)(2x+1)$

(3) $\dot{x} = -3x(1-x)y$ και $\dot{y} = -3y(1-y)x$

Για κάθε μία από τις παραπάνω περιπτώσεις, να βρείτε έναν πίνακα πληρωμών τέτοιο ώστε η δυναμική των αντιγραφέων για το παίγνιο να παίρνει την εκάστοτε μορφή. ※

ΛΥΣΗ: Στον παραπάνω συμβολισμό, η δυναμική των αντιγραφέων γράφεται ως εξής:

$$\dot{x} = x\left[u_1(T;y) - u_1(x;y)\right] = x\left[u_1(T;y) - x\,u_1(T;y) - (1-x)\,u_1(B;y)\right]$$

$$= x(1-x)\left[u_1(T;y) - u_1(B;y)\right]$$

κ' ομοίως $\dot{y} = y(1-y)\left[u_2(L;x) - u_2(R;x)\right]$

Άρα, αναζητούμε παίγνια με δεδομένο $\begin{cases} u_1(T;y) - u_1(B;y) \\ u_2(L;x) - u_2(R;x) \end{cases}$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας (γιατί?!), μπορούμε να θεωρήσουμε το παίγνιο $\begin{pmatrix} (0,0) & (0,b) \\ (a,0) & (c,d) \end{pmatrix}$

που δίνει
$$u_1(T;y) - u_1(B;y) = 0 + 0 - ay - c(1-y) = (c-a)y - c$$
$$u_2(L;x) - u_2(R;x) = 0 + 0 - bx - d(1-x) = (d-b)x - d$$

Οπότε έχουμε:

	$(c-a)y-c$	$(d-b)x-d$	Τελικά
Περίπτωση 1	$4y-1$	$4x-3$	$c=1,\ a=-3,\ d=3,\ b=-1$
Περίπτωση 2	$2y+1$	$2x+1$	$c=-1,\ a=-3\ \ d=-1,\ b=-3$
Περίπτωση 3	$-y$	$-x$	$c=0,\ a=1\ \ d=0,\ b=1$

Θέμα 7 (*Bandidos*). Αυτό το θέμα αφορά μία διαφορετική εκδοχή του αλγορίθμου EXP3 που είδαμε στο μάθημα. Το βασικό πρόβλημα αφορά έναν ανταγωνιστικό ληστή (adversarial multi-armed bandit): κάθε χρονική στιγμή $t = 1, 2, \dots$, ο παίκτης επιλέγει μία δράση α_t από ένα πεπερασμένο σύνολο δράσεων $\mathcal{A} = \{1, \dots, A\}$. Ταυτόχρονα, το "περιβάλλον" επιλέγει ένα διάνυσμα πληρωμών $v_t = (v_{1,t}, \dots, v_{A,t}) \in [0,1]^A$, και ο παίκτης λαμβάνει ως πληρωμή τη συνιστώσα $v_{\alpha_t,t}$ του v_t που αντιστοιχεί στη δράση α_t που επέλεξε.

Όπως συζητήσαμε στο μάθημα, αν ο παίκτης επιλέξει τη δράση $\alpha_t \in \mathcal{A}$ τη χρονική στιγμή t με βάση τη μεικτή στρατηγική $x_t \in \mathcal{X} \coloneqq \Delta(\mathcal{A})$, η μεταμέλεια του παίκτη ως προς μία σταθερή μεικτή στρατηγική $p \in \mathcal{X}$ ορίζεται ως

$$\mathrm{Reg}_p(T) = \sum_{t=1}^{T} \langle v_t, p - x_t \rangle$$

Στο πρόβλημα αυτό υποθέτουμε ότι η μόνη πληροφορία που έχει ο παίκτης τη χρονική στιγμή $t = 1, 2, \dots$ είναι η πληρωμή $u_t = v_{\alpha_t,t}$ που έλαβε. Με βάση αυτήν την παρατήρηση, ο παίκτης μπορεί να υπολογίσει τον εκτιμητή σταθμισμένης σημαντικότητας (importance weighted estimator)

$$\hat{v}_{\alpha,t} = \frac{\mathbb{1}\{\alpha = \alpha_t\}}{x_{\alpha,t}} u_t \quad \text{για κάθε } \alpha \in \mathcal{A},\ t = 1, 2, \dots \tag{IWE}$$

και ο αλγόριθμος που θα μελετήσουμε είναι ο εξής:

$$\begin{aligned} \text{Μεικτή στρατηγική:} \quad & x_t = (1-\delta)\,\Lambda(y_t) + \delta\,\mathrm{unif} \\ \text{Επιλογή δράσης:} \quad & \alpha_t \sim x_t \\ \text{Βήμα επανάληψης:} \quad & y_{t+1} = y_t + \eta \hat{v}_t \end{aligned}$$

όπου, όπως στην περίπτωση του EXP3:

- Το διάνυσμα $y_t \in \mathbb{R}^{\mathcal{A}}$, $t = 1, 2, \dots$, είναι ένα διάνυσμα "βαθμολογίας" των δράσεων του παίκτη, που θεωρούμε ότι αρχικοποιείται ως $y_1 \leftarrow 0$.
- Η απεικόνιση $\Lambda\colon \mathbb{R}^{\mathcal{A}} \to \mathcal{X}$ δίνεται από τη σχέση

$$\Lambda(y) = \frac{(e^{y_1}, \dots, e^{y_A})}{e^{y_1} + \dots + e^{y_A}}$$

- Ο συμβολισμός $\mathrm{unif} \coloneqq (1/A, \dots, 1/A)$ αναφέρεται στην ομοιόμορφη κατανομή στο $\mathcal{A}$.
- Τα $\delta, \eta > 0$ είναι παράμετροι του αλγορίθμου.

Απαντήστε στα παρακάτω ερωτήματα:

(1) Υπολογίστε τη μέση τιμή $\mathbb{E}[\hat{v}_{\alpha,t}]$ του εκτιμητή (IWE) και δείξτε ότι ικανοποιεί τη σχέση

$$\max_{\alpha \in \mathcal{A}} |\hat{v}_{\alpha,t}| \leq \frac{A}{\delta} \qquad \text{για κάθε } \alpha = 1, \dots, A.$$

(2) Θεωρήστε τη συνάρτηση ενέργειας (Fenchel coupling)

$$F(p, y) = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} p_\alpha \log p_\alpha + \log \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \exp(y_\alpha) - \langle y, p \rangle$$

που χρησιμοποιήσαμε στο μάθημα για την ανάλυση των αλγορίθμων εκθετικών/πολλαπλασιαστικών βαρών (exponential/multiplicative weights). Αν $F_t = F(p, y_t)$, δείξτε ότι

$$F_{t+1} \leq F_t + \frac{\eta}{1-\delta} \langle \hat{v}_t, x_t - p \rangle + \frac{\delta \eta}{1-\delta} \langle \hat{v}_t, p - \mathrm{unif} \rangle + \frac{\eta^2 A^2}{2\delta^2}$$

και χρησιμοποιήστε αυτήν τη σχέση για να δείξετε ότι

$$\frac{\eta}{1-\delta}\, \mathbb{E}[\mathrm{Reg}_p(T)] \leq F_1 + \frac{\delta \eta}{1-\delta} \sum_{t=1}^{T} \langle v_t, p - \mathrm{unif} \rangle + \frac{\eta^2 A^2}{2\delta^2} T$$

ΛΥΣΗ:

(1) Αφού $\mathbb{P}(a_t = b) = x_{b,t}$ έχουμε $\mathbb{E}[\hat{v}_{a,t}] = \sum_{b\in A} x_{b,t} \frac{\mathbb{1}(b=a)}{x_{a,t}} v_{b,t} = \cancel{x_{a,t}} \frac{1}{\cancel{x_{a,t}}} v_{a,t} = v_{a,t}$

Επίσης, αφού $x_t = (1-\delta)\Lambda(y_t) + \delta\, \mathrm{unif}$, θα έχουμε $x_{a,t} \geq \frac{\delta}{A}$ [αφού $\mathrm{unif} = (1/A, \dots, 1/A)$]

οπότε $\hat{v}_{a,t} \le \frac{\max_a v_{a,t}}{\delta/A} \le \frac{A}{\delta}$ για κάθε $a\in A$, $t=1,2,\dots,T$.

(2) Από το βασικό λήμμα ανάλυσης του Hedge/GW, έχουμε ότι:

$$F(p, y+w) \le F(p,y) + \langle w, \Lambda(y)-p\rangle + \frac{1}{2}\|w\|_\infty^2 \quad \forall p\in\Delta(A),\ y\in\mathbb{R}^A,\ w\in\mathbb{R}^A$$

Άρα, έχουμε:

$$F_{t+1} \le F_t + \langle \eta\hat{v}_t, \Lambda(y_t) - p\rangle + \frac{1}{2} \|\eta \hat{v}_t\|_\infty^2$$

$$\le F_t + \eta\left\langle \hat{v}_t, \frac{x_t}{1-\delta} - \frac{\delta}{1-\delta}\mathrm{unif} - \underbrace{p}_{\frac{1}{1-\delta}\,-\,\frac{\delta}{1-\delta}}\right\rangle + \underbrace{\frac{\eta^2}{2}\max_a|\hat{v}_{a,t}|^2}_{\text{Από (1)}}$$

$$\le F_t + \frac{\eta}{1-\delta}\langle \hat{v}_t, x_t - p\rangle - \frac{\eta\delta}{1-\delta}\langle\hat{v}_t, \mathrm{unif}-p\rangle + \frac{\eta^2 A^2}{2\delta^2} \qquad \square$$

Ακολουθούμε τη συνήθη πορεία:

$$\frac{\eta}{1-\delta}\langle \hat{v}_t, p - x_t\rangle \le F_t - F_{t+1} - \frac{\eta\delta}{1-\delta}\langle\hat{v}_t,\mathrm{unif}-p\rangle + \frac{\eta^2 A}{2\delta^2}$$

$\sum_{t=1}^{T}(\dots)$ — τηλεσκοπικό άθροισμα

$$\frac{\eta}{1-\delta}\sum_{t=1}^T\langle\hat{v}_t, p-x_t\rangle \le F_1 - \underbrace{\cancel{F_{T+1}}}_{\geq 0} - \frac{\eta\delta}{1-\delta}\sum_{t=1}^T\langle \hat{v}_t,\mathrm{unif}-p\rangle + \frac{\eta^2 AT}{2\delta^2}$$

$\mathbb{E}[\cdot]$ + (1)

$$\frac{\eta}{1-\delta}\mathbb{E}[\mathrm{Reg}_p(T)] \le F_1 + \frac{\eta\delta}{1-\delta}\sum_{t=1}^T\langle v_t, p-\mathrm{unif}\rangle + \frac{\eta^2 AT}{2\delta^2}$$

(3) Αφού $\langle v_t, p-\mathrm{unif}\rangle \le \|v_t\|_\infty\cdot\|p-\mathrm{unif}\|_1 \le 1\cdot 2 = 2$, έχουμε:

$$\mathbb{E}[\mathrm{Reg}_p(T)] \le \frac{F_1}{\eta} + 2\delta T + \frac{\eta A^2 T}{2\delta^2} \xrightarrow[\delta = 1/T^q]{\eta = 1/T^p} O(T^p + T^{1-q} + T^{1-p+2q})$$

$\Rightarrow$ εξισώνοντας εκθέτες (γιατί?) καταλήγουμε στην επιλογή $p = 3/4$, $q = 1/4$ $\Rightarrow$ $\boxed{\mathbb{E}[\mathrm{Reg}_p(T)] = O(T^{3/4})}$