Ασκήσεις

5/11/2023

(1) Έστω $V = \mathbb{C}^{n,n}$. Η συνάρτηση $V \times V \to V$, $(A, B) \mapsto \langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(AB^*)$, όπου $B^* = \overline{B}^t$ είναι ένα εσωτερικό γινόμενο. Αν $B = (b_{ij})$ τότε $\overline{B}$ είναι ο πίνακας $(\overline{b}_{ij})$, δηλαδή έχουμε εφαρμόσει την μιγαδική συζυγία σε κάθε στοιχείο του πίνακα B.

(2) Θεωρούμε το σύνολο $V = \mathbb{C}^n$ το οποίο το ταυτίζουμε με πίνακες στήλες. Για κάθε αντιστρέψιμο πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ θεωρούμε την συνάρτηση $V \times V \to V$, $(x, y) \mapsto \langle x, y\rangle_A = x^*A^*Ay$. Δείξτε ότι είναι ένα εσωτερικό γινόμενο.

(3) Δίνεται ένα εσωτερικό γινόμενο $\langle\cdot,\cdot\rangle$ σε ένα διανυσματικό χώρο με βάση $B = \{v_1, \dots, v_n\}$. Να αποδειχθεί ότι οι τιμές $\langle v_i, v_j\rangle$ καθορίζουν πλήρως το εσωτερικό γινόμενο. Επιπλέον δείξτε ότι αν $[x]_B = (x_1, \dots, x_n)^t$, $[y]_B = (y_1, \dots, y_n)^t$ τότε

$$\langle x, y\rangle = \overline{y}^t Qx = y^*Qx, \tag{1}$$

όπου ο Q είναι ο πίνακας $Q = (q_{ij})$ με $q_{ij} = \langle v_j, v_i\rangle$. Δείξτε ότι ικανή και αναγκαία συνθήκη για να ορίζεται ένα εσωτερικό γινόμενο από μια σχέση στις συντεταγμένες όπως δίνεται στην εξίσωση (1) είναι να ισχύει $Q = Q^*$ και $x^*Qx > 0$ όταν $x \neq 0$.

(4) Αποδείξτε ότι ο τύπος

$$\left\langle \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, \sum_{j=0}^{m} b_j x^j \right\rangle = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} \frac{a_i b_j}{i+j+1},$$

ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο στον χώρο των πολυωνύμων $\mathbb{R}[x]$.

(5) Δίνεται ένα σύνολο $u_1, \dots, u_n$ ορθογώνιων διανυσμάτων σε διανυσματικό χώρο V με εσωτερικό γινόμενο. Για κάθε διάνυσμα $v \in V$ ισχύει

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{|\langle v, u_\nu\rangle|^2}{\|u_\nu\|} \leqslant \|v\|^2$$

με την ισότητα να ισχύει μόνο αν

$$v = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\langle v, u_\nu\rangle}{\|u_\nu\|} u_\nu.$$

(6) Με το εσωτερικό γινόμενο στον χώρο των συνεχών συναρτήσεων $C[0, 1] = \{f : [0, 1] \to \mathbb{R}, f \text{ συνεχής}\}$ να βρεθεί μια ορθοκανονική βάση του χώρου που παράγουν τα $\{1, x, x^2, x^3\}$.

(7) Θεωρούμε τον διανυσματικό χώρο $\mathbb{C}^{n,n}$, με το εσωτερικό γινόμενο $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(AB^*)$, όπου για πίνακα $B = (b_{ij})$ ο πίνακας $B^* = \overline{B}^t = (\overline{b}_{ji})$. Να βρεθεί το ορθογώνιο συμπλήρωμα του χώρου των διαγωνίων πινάκων.