$L: V \to V$

$B=\{e_1,\dots,e_n\}$ βάση του V

$A=(L,B,B) \rightsquigarrow$ γνωρίζει τα πάντα για την L

↳ Διαλέγοντας διαφορετική βάση B': $A'=(L,B',B')$ } $A=QA'Q^{-1}$

↳ αντιστρέψιμος

$\rightsquigarrow \lambda$ ιδιοτιμή

$Ker(L-\lambda Id)\neq\{0\} \rightsquigarrow det(L-\lambda Id)=0$ ‖ $ch_L(x)=det(A-xId)$

↳ ιδιόχωρος και τα στοιχεία του ιδιοδιανύσματα ‖ $E\lambda=Ker(L-\lambda Id)$

- $\lambda_1\neq\lambda_2$ διαφορετικές ιδιοτιμές

$E_{\lambda_1}\cap E_{\lambda_2}=\{0\}$ ⟶ πράγματι, αν $\left.\begin{matrix} v\in E_{\lambda_1} \\ v\in E_{\lambda_2}\end{matrix}\right\}$ $\left.\begin{matrix} Lv=\lambda_1 v \\ Lv=\lambda_2 v\end{matrix}\right\} \Rightarrow \underbrace{(\lambda_1-\lambda_2)}_{\neq 0}v=0 \Rightarrow v=0$

↳ Διαφορετικοί υπόχωροι έχουν διαφορετικές ιδιοτιμές.

- Έστω $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ διαφορετικές ανά 2 ιδιοτιμές

Τότε τα ιδιοδιανύσματα $v_1,\dots,v_n$ που αντιστοιχούν σε αυτές είναι γραμμικά ανεξάρτητα

↳ Πράγματι, $a_1v_1+a_2v_2+\dots+a_nv_n=0$ (1), $a_1,\dots,a_n\in\mathbb{F}$

$$L(a_1v_1+\dots+a_nv_n)=L(0)=0 \Rightarrow$$

$$a_1Lv_1+\dots+a_nLv_n=0 \ (3) \xrightarrow{\text{ιδιοτιμές}} a_1\lambda_1v_1+\dots+a_n\lambda_nv_n=0 \ (2)$$

- Επαγωγή στο πλήθος των ιδιοτιμών:

$\boxed{n=1}$ $v_1\neq 0$ | $Lv_1=\lambda_1v_1$

↳ ιδιοδιάνυσμα

Έστω λοιπόν ότι η πρόταση $v_1\neq0$ ισχύει για οποιαδήποτε $n-1$ ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα

Αφαιρούμε τις σχέσεις (2),(3) $\Rightarrow$ $\left.\begin{matrix} a_1(\lambda_1-\lambda_n)v_1+\dots+(\lambda_{n-1}-\lambda_n)v_{n-1}=0 \\ v_1,\dots,v_{n-1} \text{ γρ. ανεξ.}\end{matrix}\right\}\to$

$\}\to a_1\underbrace{(\lambda_1-\lambda_n)}_{\neq0}=a_2\underbrace{(\lambda_2-\lambda_n)}_{\neq0}=\dots=a_{n-1}\underbrace{(\lambda_{n-1}-\lambda_n)}_{\neq0}=0 \Rightarrow a_1=a_2=\dots=a_n=0 \Rightarrow$

$a_1,\dots,a_n$ γρ. αν. ∎

$Ch_L(x)$: Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της L 6.10.2023

$V \xrightarrow{L} V$, $\dim V = n$, $\deg(Ch_L(x)) = n$

[Υποθέτουμε ότι έχει n διαφορετικές ανά δύο ρίζες. Τότε τα ιδιοδιανύσματα $v_1, \dots, v_n$ που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ είναι βάση του V.]

↳ Πράγματι, είναι γραμ. ανεξ. και έχουν n-πλήθος (όσο η διάσταση)

- $B = \{v_1, \dots, v_n\}$, $(L, B, B) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ → διαγώνιος

γιατί;

→ Θυμάμαι από Γρ. I τους πίνακες γρ. απεικόνισης!

$L v_1 = a_{11} v_1 + a_{21} v_2 + \dots + a_{n1} v_n = \lambda_1 v_1$

$L v_2 = a_{12} v_1 + a_{22} v_2 + \dots + a_{n2} v_n = \lambda_2 v_2$

$\vdots$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Ο πίνακας A λέγεται διαγωνοποιήσιμος αν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας Q ώστε: $Q^{-1} A Q = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

- Αν το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A έχει απλές ρίζες, τότε ο πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος.

πχ) Ο $\underset{A}{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$ δεν είναι διαγ/μος!

$Ch_A(x) = \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - x\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{vmatrix} 1-x & 0 \\ 0 & 1-x \end{vmatrix} = (1-x)^2$ → ιδιοτιμή 1 με πολλαπλότητα 2 (διπλή ρίζα)

Έστω ότι ήταν διαγωνοποιήσιμος:

$Q^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} Q = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow Ch_{\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)}(x) = (\lambda_1 - x)(\lambda_2 - x)$

↳ $\det\left(\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} - x\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \dots = (\lambda_1 - x)(\lambda_2 - x)$

→ Όμοιοι πίνακες έχουν ίδιο χ.π. άρα $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$.

Άρα: $Q^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{Q I_2 Q^{-1} = Q Q^{-1} = I_2}_{\text{άτοπο!}}$

↳ Μπορεί το χαρ. πολ. να έχει ίδιες ρίζες αλλά ο πίνακας να είναι διαγων/μος!

πχ) $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \to (\lambda - x)^2$ ↳ διαγώνιος $\Big\}$ $Q\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} Q^{-1}$ — διαγων/μος με ίδιο χ.π.

⤳ Σελ. 3

$\left.\begin{array}{l} L: V \to V \\ \lambda \text{ ιδιοτιμή} \end{array}\right\}$ 6.10.23

αλγεβρική πολλαπλότητα (της ιδιοτιμής λ)

$$Ch_L(x) = (x-\lambda)^{\mu(\lambda)} \cdot g(x) \quad , g(\lambda) \neq 0$$

$$p(\lambda) = \dim E\lambda = \dim Ker(L - Id \cdot \lambda)$$

γεωμετρική πολλαπλότητα

και ισχύει: $\underbrace{1 \leq p(\lambda)}_{} \leq \mu(\lambda) \leq \underbrace{\dim(V) = n}_{}$

προφανές αφού Eλ υπόχωρος V.

προφανές αφού λ ιδιοτιμή, άρα ρίζα του χ.π.

Άρα πάμε να δείξουμε ότι $p(\lambda) \leq \mu(\lambda)$:

$\{v_1, \ldots, v_{p(\lambda)}\}$ βάση του Eλ. Συμπληρώνω σε βάση του V:

$\{v_1, \ldots, v_{p(\lambda)}, w_1, \ldots, w_{n-p(\lambda)}\}$

$$(L, B, B) = \begin{pmatrix} \begin{matrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} * \\ \hline * \end{matrix} \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} Lv_1 = \lambda v_1 \\ Lv_2 = \lambda v_2 \\ \vdots \\ Lv_{p(\lambda)} = \lambda v_{p(\lambda)} \end{array}$$

Οπότε θα λογαριάσω το χαρακτηριστικό πολυώνυμο, δηλαδή:

$$\det \begin{pmatrix} \begin{matrix} \lambda - x & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda - x \end{matrix} & * \\ 0 & * - Ix \end{pmatrix} = (\lambda - x)^{p(\lambda)} \cdot g(x)$$

οτιδήποτε, μπορεί όμως να έχει πάλι ρίζα το λ!

Αν $g(\lambda) = 0 \Rightarrow (x-\lambda)^{v} h(x) \quad , h(\lambda) \neq 0$

$\Rightarrow \mu(\lambda) = p(\lambda) + v$ ∎

Σελ. 4.

ΜΕΘΟΔΟΣ ΔΙΑΓΩΝΟΠΟΙΗΣΗΣ

6.10.23

A $n \times n$

1] Υπολογίζουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο

2] Υπολογίζουμε τις ιδιοτιμές $\lambda_1, \dots, \lambda_s$

3] Υπολογίζουμε βάσεις στους ιδιόχωρους $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_s}$

4] Υπολογίζουμε τους πίνακες Q, Q^{-1}

πχ) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

• $ch_A(x) = \det\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - x\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} -x & 1 \\ 1 & 1-x \end{pmatrix} = -x(1-x) - 1 = x^2 - x - 1$

$= \left(x - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(x + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$

Άρα $\lambda_1, \lambda_2 = \pm \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

• Υπολογίζω τους ιδιόχωρους: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1-\sqrt{5}}{2} & 1 \\ 1 & 1 + \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1) \end{pmatrix}$

Λύνω: $\begin{pmatrix} -\frac{1-\sqrt{5}}{2} & 1 \\ 1 & 1+\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (GAUSS) → δύσκολη!

→ $\left\langle \begin{pmatrix} -\frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = E_{\lambda_1}$, για λ_2: $E_{\lambda_2} = \left\langle \begin{pmatrix} -\frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

Για λ_1

$Q = \begin{pmatrix} -\frac{1-\sqrt{5}}{2} & -\frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ⇝ θέλουμε $Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

$AQ = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} Q$

το ιδιοδιάνυσμα που παράγει τον E_{λ_1}

το ιδιοδ/μα που παράγει τον E_{λ_2}

υπολογίζω αντίστροφο

$Q^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \end{pmatrix}$ ⇝ $Q^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}Q = \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$

$F_0 = F_1 = 1$
$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ } Ακολουθία Fibonacci   1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...

6.10.23

ΣΚΟΠΟΣ/ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΔΙΑΓΩΝΟΠΟΙΗΣΗΣ

↳ θέλω έναν τύπο να μου δίνει το F_n χωρίς να χρειάζομαι τους προηγούμενους. και θα το κάνω με γραμμική:

$$\begin{pmatrix} F_{n-1} \\ F_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} F_{n-2} \\ F_{n-1} \end{pmatrix} \left[= \begin{pmatrix} F_{n-1} \\ F_{n-2}+F_{n-1} \end{pmatrix} \right]$$

$$= A^2 \begin{pmatrix} F_{n-3} \\ F_{n-2} \end{pmatrix} = A^3 \begin{pmatrix} F_{n-4} \\ F_{n-3} \end{pmatrix} = \dots = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Από πριν: $Q^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} Q = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}}_{\Delta}$

Άρα θέλω τον $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n = \left[Q \left(\Delta \right) Q^{-1} \right]^n$

$$= Q\Delta \cancel{Q^{-1}} \cancel{Q} \Delta \cancel{Q^{-1}} \cancel{Q} \dots \Delta Q^{-1} = Q\Delta^n Q^{-1}$$

Ο Δ είναι διαγώνιος και μπορώ εύκολα να υπολογίσω τις δυνάμεις του!

$$\Delta^n = \underbrace{\begin{pmatrix} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \end{pmatrix}}_{*}$$

Άρα $\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix} = Q\Delta^n Q^{-1} = Q(*)Q^{-1}$

⇓

πράξεις

⇓

$$\mathbb{Z} \ni F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right)$$

• Στις αναδρομικές ακολουθίες:

$u_n = \begin{pmatrix} u_1^{(n)} \\ \vdots \\ u_k^{(n)} \end{pmatrix}$, $u_n = A u_{n-1}$ $u_0 = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix}$

$u_n = A^n u_0$

Σελ. 6 ⟶

Τι μπορεί να "χαλάσει" στην διαδικασία της διαγωνοποίησης;

6.10.23

πχ) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$: $Ch_A(x) = \det\begin{pmatrix} 1-x & 1 & 0 \\ 0 & 1-x & 1 \\ 0 & 0 & 1-x \end{pmatrix} = (1-x)^3$

ιδιοτιμή 1 με πολλαπλότητα 3

Άρα δεν γνωρίζω αν είναι διαγωνοποιήσιμος ακόμα:

- $\operatorname{Ker}(A - \underset{x=1}{x} I_3) = \ker \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{B}$ → Ξέρω ότι $3 = \dim \ker B - \overset{2}{r(B)} \Rightarrow$ $\dim \ker B = 1$ (~ γραφ. 1)

{ Δηλαδή Γεωμ. πολλαπλότητα = 1
Αλγεβ. — " — = 3 }

Άρα δεν έχω αρκετά ιδιοδιανύσματα της ιδιοτιμής 1 για να φτιάξω βάση ιδιοδιανυσμάτων → Άρα δεν διαγωνοποιείται

Αν λύσω δηλαδή το σύστημα:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$x_2 = 0$
$x_3 = 0$
x_1 : ελεύθερο

Άρα μια βάση του ιδιόχωρου E_1: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = E_1$