$$\underset{\substack{n\times n\\ \text{πίνακας}}}{A} \longrightarrow ch_A(x) = \det(A - xI_n) = \prod_{i=1}^{n}(x-p_i)(-1)^n$$

↳ οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου

- Πρέπει να ξέρουμε σε ποιό σώμα εργαζόμαστε, πχ) το x^2+1 στο $\mathbb{R}$ δεν έχει ρίζες αλλά έχει στο $\mathbb{C}$.
- Διαφορετικές ρίζες $\Rightarrow$ πίνακας διαγωνοποιήσιμος
- $p(\lambda) = \dim Ker(A - \lambda I_n)$, $\lambda = p_i$: ιδιοτιμή (ρίζα του χαρ. πολ.)
- $m(\lambda)$ = ο εκθέτης στην ανάλυση του χαρ. πολ.

$p_{i_1}, \dots, p_{i_s}$ είναι οι διαφορετικές ανα δύο ρίζες του χ.π.

$$n \xleftarrow{deg} ch_A(x) = \prod_{i=1}^{s}(x - p_{i_s})^{m(p_{i_s})}(-1)^n$$

$$\sum_{v=1}^{s} m(p_v) = n$$

$\rightsquigarrow$ $1 \leq p(\lambda) \leq m(\lambda) \leq n$ $\forall$ ιδιοτιμή

πχ)
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - xI_3) = (3-x)^3$$
$$[= (-1)^3(x-3)^3]$$

ΠΡΟΤΑΣΗ: Ο πίνακας είναι διαγωνοποιήσιμος αν και μόνο αν $p(\lambda) = m(\lambda)$ για κάθε ιδιοτιμή.

Παρατηρήσεις • Ο πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος αν και μόνο αν υπάρχει μια βάση του $\mathbb{F}^n$ αποτελούμενη από ιδιοδιανύσματα.

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow AQ = Q\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad Q = (q^1, \dots, q^n)$$

στήλες του Q, είναι γ.α. αφού ο Q είναι αντιστρέψιμος.

$$\Rightarrow \begin{aligned} Aq^1 &= \lambda_1 q^1 \\ Aq^2 &= \lambda_2 q^2 \\ &\vdots \\ Aq^n &= \lambda_n q^n \end{aligned}$$

Υπενθύμιση από γραμμική 1:
- $v_1, \dots, v_n$ γ.α.
- $v_1, \dots, v_n$ παράγουν τον V
- $\dim V = n$

Αν ισχύουν 2 από τα 3, ισχύει και το 3ο.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αν έχουμε μια βάση που αποτελείται από ιδιοδιανύσματα:

$$n \overset{\Updownarrow}{=} \underbrace{\sum_{v=1}^{s} p(\lambda_v)}_{\text{διαστάσεις των ιδιοχώρων}} \overset{\circledast}{\leq} \sum_{v=1}^{s} m(\lambda_v) = \deg ch_A(x) = n$$

Η ισότητα $n=n$ ισχύει αν και μόνο αν στο ⊛ έχω $=$ αντί για $\leq$.

- Αν το $ch_A(x)$ έχει απλές ρίζες (δηλαδή όλα τα $m(\lambda_v) = 1$) έχουμε $1 \leq p(\lambda_v) \leq m(\lambda_v) = 1 \Rightarrow p(\lambda_v) = m(\lambda_v)$ και μια διαφορετική απόδειξη ότι ο πίνακας είναι διαγωνοποιήσιμος.

Σελ. 2

πχ) ο $A=\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ δεν είναι διαγωνοποιήσιμος, διότι:

$ch_A(x) = \det(A - xI_2) =$

$\det\begin{pmatrix} \lambda-x & 1 \\ 0 & \lambda-x \end{pmatrix} = (\lambda-x)^2$

↳ ιδιοτιμή λ με $\underline{m(\lambda)=2}$

$p(\lambda) = \dim Ker\left(\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - \lambda I_2\right) = \dim Ker\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 < 2$ (*)

(*) dim=1 γιατί rank=1 (Θυμάμαι από Γρ. 1)

$p(\lambda) \neq m(\lambda)$

• **Ο A και ο A^t έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο**

↳ $ch_A(x) = \det(A - xI_n) = \det(A-xI_n)^t = \det(A^t - xI_n^t) =$

$\det(A^t - xI_n) = ch_{A^t}(x)$.

$\boxed{\text{ΑΣΚΗΣΕΙΣ}}$

1] Να βρεθεί το $ch_A(x)$ για $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & & & 1 \end{pmatrix}$ ~ όλα τα στοιχεία μονάδα.

$ch_A(x) = \det(A - xI_n) = \det\begin{pmatrix} 1-x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-x & \cdots & 1 \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & \cdots & & 1-x \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} n-x & 1 & \cdots & 1 \\ n-x & 1-x & \cdots & 1 \\ \vdots & & & \\ n-x & 1 & \cdots & 1-x \end{pmatrix}$

Αθροίζω όλες τις στήλες στην 1η

βγήκε το (n−x): ιδιότητα ορίζουσας!

$= (n-x)\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-x & \cdots & 1 \\ \vdots & & & \\ 1 & \cdots & & 1-x \end{pmatrix} = (n-x)\det\begin{pmatrix} 1 & \cdots & & 1 \\ 0 & -x & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -x \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 \cdots & -x \end{pmatrix} = (n-x)\cdot x^{n-1}$

διαγώνιος

• Είναι διαγωνοποιήσιμος;

Η ιδιοτιμή n έχει αλγεβρική πολλ/τα 1, άρα έχει και γεωμετρική πολλ/τα 1. γιατί $1 \le p(n) \le m(n) = 1$.

~ $ch_A(x) = (n-x)\cdot x^{n-1}\cdot(-1)^{n-1}$ ⟶ ιδιοτιμές $\begin{cases} x=n \\ x=0 \to m(0)=n-1 \end{cases}$

Ο πίνακας είναι διαγωνοποιήσιμος γιατί $p(0) = \dim Ker(A - I_n\cdot 0) = \dim Ker A = n-1$.

και γιατί $\dim Ker A = 1$; γιατί: $n = \dim Ker A + \underbrace{\dim Im A}_{r(A)=1}$

" Βρες το Q " ⟶ σελ. 3

Για να βρω το Q θα βρω μια βάση από ιδιοδιανύσματα. 11.10.23

Για $\lambda = n$: Λύνω το $\overset{\text{ομογενές}}{\text{σύστημα}}$:

$$B = \begin{pmatrix} (1-n) & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & (1-n) & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & (1-n) \cdots & 1 \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & \cdots & \cdots & (1-n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$$

B' τρόπος : Η λύση είναι μονοδιάστατη.

Παίρνω για λύση το $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix}$

Δεν συνεχίστηκε αυτό στην διάλεξη.

A' τρόπος : Λύση με τον Επαυξημένο πίνακα (GAUSS ...)

Αλλάζω σειρά σε όλες τις γραμμές:

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & (1-n) \\ 1 & 1 & \cdots (1-n) & & 1 \\ \vdots & & & & \vdots \\ (1-n) & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Αφαιρώ την 1^{η} από τις υπόλοιπες

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ 0 & 0 & \cdots & -n & n \\ \vdots & & & & \\ 0 & -n & \cdots & & n \\ 0 & n & n & \cdots & \underbrace{1-(1-n)^2}_{2n-n^2} \end{pmatrix}$$

Άρα το σύστημα: (έχω διαιρέσει παντού με n)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & (1-n) \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots -1 & \cdots & 1 \\ 0 & -1 & \cdots & & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & (2-n) \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} + (1-n)x_n &= 0 \\ -x_{n-1} + x_n &= 0 \\ \vdots \qquad -x_{n-2} \quad \ldots x_n &= 0 \\ -x_2 \qquad\qquad x_n &= 0 \end{aligned}$$

$(2-n)x_n = 0$

δεν το επαληθεύει, εν τέλει δεν είναι καλό παράδειγμα, θα το λύσει και θα μας το γράψει!

Περιγραφή κατασκευής:

$\lambda = n \longrightarrow$ Βρίσκω τον ιδιόχωρο $\langle v \rangle$

πρέπει να το προσδιορίσω

$\lambda = 0 \longrightarrow$ βάση του πυρήνα $v_1, \ldots, v_{n-1}$

$Q = (v \mid v_1, \ldots, v_{n-1})$

πρώτη στήλη

Η βάση του πυρήνα ως στήλες.

ΣΕΛ. 4

11.10.23

ΘΕΩΡΗΜΑ: Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A μηδενίζεται από τον A.

$\{ch_A(A) = 0\}$

$$\underset{n\times n}{A} \longrightarrow ch_A(x)$$

$$f(x) \in \mathbb{F}[x] \,,\; f(A)$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x^i \rightsquigarrow \sum_{i=1}^{n} a_i \underset{n\times n}{A^i}$$

Υποθέτουμε $ch_A(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

$$(A - xI_n)\underbrace{adj(A - xI_n)}_{\text{πολυώνυμο στο } x \text{ βαθμού το πολύ } n-1} = det(A - xI_n) \cdot I_n \; \circledast$$

θυμάμαι...

$(a_{ij}) \rightarrow adj A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ & \vdots & & \end{pmatrix}^t$

όπου A_{ij}: η ορίζουσα που προκύπτει αν βγάλω από τον πίνακα την i-γραμμή και j-στήλη

$$adj(A - xI) = B_0 + B_1 x + \dots + B_{n-1}x^{n-1}$$

$B_0, \dots, B_{n-1} \in \mathbb{F}$

$$\circledast \Rightarrow (A - xI_n)\cdot(B_0 + B_1 x + \dots + B_{n-1}x^{n-1}) = (x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0) I_n \Rightarrow$$

$$AB_0 + AB_1 x + AB_2 x^2 + \dots + AB_{n-1}x^{n-1} - xB_0 - x^2 B_1 - x^3 B_2 + \dots - B_{n-2}x^{n-1} - B_{n-1}x^n = (x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0) I_n$$

$$\Rightarrow \text{Άρα} \begin{cases} AB_0 = a_0 I_n & \longrightarrow \quad AB_0 = a_0 I_n \\ -B_0 + AB_1 = a_1 I_n & \xrightarrow{\cdot A} \quad -AB_0 + A^2 B_1 = a_1 A \\ \vdots \; -B_1 + AB_2 = a_2 I_n & \xrightarrow{\cdot A^2} \quad -A^2 B_1 + A^3 B_2 = a_2 A^2 \\ -B_{n-2} + AB_{n-1} = a_{n-1} I_n & \xrightarrow{\cdot A^{n-1}} \quad -A^{n-1}B_{n-2} + A^n B_{n-1} = a_{n-1}A^{n-1} \\ -B_{n-1} = I_n & \xrightarrow{\cdot A^n} \quad -A^n B_{n-1} = A^n \end{cases}$$

διαγράφονται επειδή $\oplus$ κατά μέλη!

$$\oplus \quad 0 = \underbrace{a_0 I_n + a_1 A + a_2 A^2 + \dots + a_{n-1}A^{n-1} + A^n}$$

$$\underline{\underline{0 = f(A)}} \; !$$