$\underset{n\times n}{A}$ με στοιχεία στο $\mathbb{F}$. ορίζει $\rightsquigarrow$ $\mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$: Γραμμική Απεικόνιση

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$J(\lambda, k) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix} \quad (k \times k)$$

μονάδες πάνω από την διαγώνιο

- Δεν είναι διαγωνοποιήσιμος
- $ch_{J(\lambda,k)}(x) = (\lambda - x)^k$
- ελάχιστο πολ.: $(x-\lambda)^k$

$\mathbb{F}$: Ένα αλγεβρικά <u>κλειστό</u> σώμα. Το χρειαζόμαστε για να εξασφαλίσουμε ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο έχει όλες τις ρίζες στο $\mathbb{F}$.

- A $n\times n$ πίνακας, είναι όμοιος με τον πίνακα: $A \sim \left(\begin{array}{c|c} J_1 \ddots & 0 \\ \hline 0 & \ddots J_s \end{array}\right)$ → Ένας πίνακας μπλοκ διαγώνιος όπου κάθε μπλοκ είναι ένας $J(\lambda, k)$.

Παράδειγμα:

$$\left(\begin{array}{ccc|cc|c} 3 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 3 & 1 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & & & \\ \hline & 0 & & 2 & 1 & 0 \\ & & & 0 & 2 & 0 \\ \hline & 0 & & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

→ 6x6

$J(3,3)$

$J(2,2)$ → 2x2, 2 στην διαγώνιο

$J(2,1)$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

V: διανυσματικός χώρος $V \xrightarrow{L} V$

$\lambda_1, \dots, \lambda_r$: οι διαφορετικές ιδιοτιμές της L.

Υπάρχουν ακέραιοι $s_1, \dots, s_r$ έτσι ώστε:

$$V = Ker(L - \lambda_1 Id)^{s_1} \oplus Ker(L-\lambda_2 Id)^{s_2} \oplus \dots \oplus Ker(L - \lambda_r Id)^{s_r}$$

$$\underset{W_1}{\underset{\shortparallel}{Ker(L-\lambda Id)}} \text{ : ιδιόχωρος} \subseteq \underset{W_2}{\underset{\shortparallel}{Ker(L-\lambda Id)^2}} \subseteq \dots \subseteq W_i = Ker(L-\lambda Id)^i \subseteq W_{i+1} = Ker(L-\lambda Id)^{i+1}$$

<u>Παράδειγμα</u>: $L = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, $L - \lambda Id = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ → πυρήνας διάστασης 1

$(L - \lambda Id)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ → πυρήνας διάστασης 2

Η ιδέα είναι ότι αν αφαιρέσουμε από L, λ φορές την ταυτότητα θα οδηγηθούμε σε μηδενοδύναμο πίνακα και με διαδοχικές του δυνάμεις θα τον μηδενίσουμε: Αυτό πάμε να το αποδείξουμε:

$W_i \subseteq W_{i+1}$ γιατί αν $v \in W_i$ τότε $(L-\lambda Id)^i v = 0 \Rightarrow (L-\lambda Id)(L-\lambda Id)^i v = (L-\lambda Id)\cdot 0 = 0$.

και όλα αυτά: $W_1 \subset W_2 \subset W_3 \subset \dots \subset V$ ← πεπερασμένης διάστασης

άρα δεν μπορούν όλες οι ανισότητες να είναι γνήσιες!

Συνέχεια σελ. 2.

18.10.23

Άρα, για κάποιο δείκτη: $W_i = W_{i+1}$.

Έστω t, το μικρότερο τέτοιο i, δηλαδή: $\subsetneq W_{t-1} \subsetneq W_t = W_{t+1}$ (*)

Ισχύει $W_{t+1} = W_{t+2} = W_{t+3} = \dots$

Ας δείξουμε ότι $\left[\underbrace{W_{t+1} \subset W_{t+2}}_{\text{ισχύει}} \right]$, το $W_{t+2} = W_{t+1}$:

$$v \in W_{t+2} = Ker(L-\lambda Id)^{t+2}$$

$$(L-\lambda Id)v \in Ker(L-\lambda Id)^{t+1} \overset{(*)}{=} Ker(L-\lambda Id)^t \Rightarrow (L-\lambda Id)v \in Ker(L-\lambda Id)^t \Rightarrow$$

$$(L-\lambda Id)^t (L-\lambda Id)v = 0 \Rightarrow (L-\lambda Id)^{t+1} v = 0 \Rightarrow v \in W_{t+1}$$

$\rightsquigarrow Ker(L-\lambda Id)^t \cap Im(L-\lambda Id)^t = \{0\}$? — πρέπει να ισχύει για το ευθύ άθροισμα $\oplus$ (γραμμική Ⅰ)

$$\begin{cases} v \in Ker(L-\lambda Id)^t \Leftrightarrow (L-\lambda Id)^t v = 0 \\ v \in Im(L-\lambda Id)^t \Leftrightarrow \exists w: v = (L-\lambda Id)^t w \end{cases} \Rightarrow (L-\lambda Id)^{2t} w = 0 \Rightarrow$$

$v \in$ (στην τομή)

$w \in Ker(L-\lambda Id)^{2t} = W_{2t} = W_t$ (πριν το δείξαμε)

όπου $W_t = Ker(L-\lambda Id)^t \ni w$ άρα $v=0$ που ανήκει στην τομή

$\dim(V_1+V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim V_1 \cap V_2$ (γραμμική Ⅰ)

$V_1 = Ker(L-\lambda Id)^t$ | $\dim V_1 + \dim V_2 = \dim V$ | $\Rightarrow Ker(L-\lambda Id)^t \oplus Im(L-\lambda Id)^t \subseteq V$

$V_2 = Im(L-\lambda Id)^t$ | $\dim(V_1 \cap V_2) = 0$ |

$$V = Ker(L-\lambda Id)^t \oplus Im(L-\lambda Id)^t$$

Αν λ η πρώτη ιδιοτιμή του L

• <u>Παρατήρηση</u>: $\left. \begin{matrix} Ker(L-\lambda Id)^t \\ Im(L-\lambda Id)^t \end{matrix} \right\}$ είναι L-αναλλοίωτοι.

γιατί; $L \circ (L-\lambda Id) = L^2 - L\lambda Id = (L-\lambda Id) \circ L$ (σύνθεση)

έστω $v \in Ker(L-\lambda Id)^t \Leftrightarrow (L-\lambda Id)^t v = 0$

θα δείξω $Lv \in$. $(L-\lambda Id)^t v = L(L-\lambda Id)^t v = L \cdot 0 = 0$.

Δηλαδή αν έχω ένα στοιχείο:

$Im(\ ) \ni v = (L-\lambda Id)^t w$

$\underline{Lv} = L(L-\lambda Id)^t = (L-\lambda Id)^t \cdot \underline{Lw}$

$L: V \to V$
$\quad \cup$
$\quad W$

Αν $L|_W : W \to W$?
όχι πάντα.
αν ναι τότε ο W λέγεται L-αναλλοίωτος

πχ) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, e_1, e_2 βάση

$L_A e_1 = e_1 + e_2$

$L_A e_2 = e_2$

$\langle e_1 \rangle = W$ δεν είναι L_A αναλλοίωτος

Συνέχεια → σελ. ③.

$L: W_1 \oplus W_2 \to W_1 \oplus W_2$, $W_{1,2}$: L αναλλοίωτοι υπόχωροι 18.10.23

πίνακας της L: ως προς βάση $\underbrace{\underbrace{e_1, \dots, e_n}_{\text{Η βάση του } W_1} , \underbrace{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m}_{\text{Η βάση του } W_2}}_{\text{Βάση του } W_1 \oplus W_2}$

$$(L,B,B) = \begin{pmatrix} \boxed{A}_{n \times n} & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \qquad L e_1 \in \langle e_1, \dots, e_n \rangle \qquad L e_n \in \langle e_1, \dots, e_n \rangle$$

$A = (L|_{W_1}, \beta_1, \beta_1)$
$B = (L|_{W_2}, \beta_2, \beta_2)$

$$ch_L(x) = \det \begin{pmatrix} A - xI & 0 \\ 0 & B - xI \end{pmatrix} = \det(A - xI)\det(B - xI) = ch_{L|W_1}(x) \cdot ch_{L|W_2}(x)$$

$$Im(L - \lambda Id)^t = Ker(L|_{Im} - \lambda_1 Id)^t \oplus Im(L|_{Im} - \lambda_2 Id)^t$$

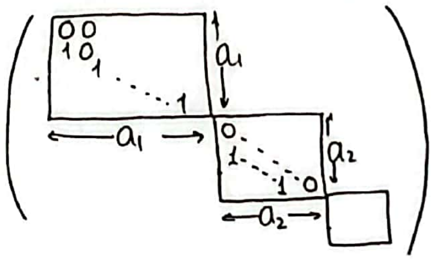
$T = (L - \lambda_i Id)$: μηδενοδύναμος πίνακας

ΛΗΜΜΑ V: διανυσματικός χώρος διάστασης n, $T: V \to V$

$T^s = 0$, $0: V \to V$, τότε υπάρχουν διανύσματα $u_1, \dots, u_n$ και φυσικοί αριθμοί $a_1, \dots, a_k$: $T^{a_i}(u_i) = 0_V$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ → $u_1, T(u_1), \dots, T^{a_1-1}(u_1), u_2, T(u_2), T^2(u_2), \dots, T^{a_2-1}(u_2), \dots, u_k, T(u_k), \dots, T^{a_k-1}(u_k)$ βάση του V

Ο πίνακας της T ως προς τη βάση που γράψαμε: $u_1 \to Tu_1$



<u>T μηδενική</u>

$u_1, \dots, u_k$ τα διαλέγω να είναι βάση του V, $a_1 = \dots = a_k = 1$

Επαγωγή στη διάσταση του V:

- $\dim V = 1$: $T: V \to V$ μηδενοδύναμη $T^s = 0 \Rightarrow T = 0$

→ Υποθέτουμε ότι το λήμμα ισχύει για όλες τις διαστάσεις μικρότερες του n

$T: V \to V$, $\dim ImT = n \Rightarrow KerT = \{0\} \Rightarrow$ T είναι 1-1 και επί, δεν είναι μηδενοδύναμη

T^s είναι 1-1 και επί $\forall s$

Άρα $ImT < n$

- $ImT = 0 \Rightarrow$ T η μηδενική $\Rightarrow 0 < \dim ImT < n$

Επαγωγική Υπόθεση $v_1, \dots, v_e \in ImT$, $b_1, \dots, b_e \in \mathbb{N}$

$T^{b_i}(v_i) = 0$ $\quad v_1, T(v_1), \dots, T^{b_1-1}(v_1), v_2, Tv_2, \dots, Tv_2^{b_2-1}, \dots$ βάση του ImT

Συνέχεια →

18.10.23

$\underbrace{T^{b_1-1} v_1, \dots, T^{b_e-1} v_e}_{\text{γρ. ανεξάρτητα διαν. του ImT ανήκουν στον πυρήνα του T}}$, $\underbrace{z_1, \dots, z_m}_{\text{συμπληρώνουν σε βάση του πυρήνα}}$

$\dim \ker T = e+m$ $\quad v_1, \dots, v_e \in \mathrm{Im}T \rightarrow \exists\, w_1, \dots, w_e \in V$

$v_1 = Tw_1, \; v_2 = Tw_2, \dots, v_e = Tw_e$

Βάση του V $\quad w_1, \underset{v_1}{Tw_1}, \underset{Tv_2}{T^2 w_2}, \dots, \underset{T^{b_1-1}v_1}{T^{b_1} w_1}, w_2, Tw_2, \dots, T^{b_1} w_2, \dots$

$$0 = \sum_{i=1}^{e} \sum_{j=0}^{b_i} a_{ij} T^j (w_i) + \sum_{v=1}^{m} b_v z_v \xrightarrow{T} \underbrace{\sum_{i=1}^{e} \sum_{j=0}^{b_i-1} a_{ij} T^{j+1}(w_i)}_{\sum_{i=1}^{e} \sum_{j=0}^{b_i-1} a_{ij} T^j v_j = 0} = 0$$

$T^{b_i}(w_i) = T^{b_i-1} v_i$

$$0 = a_{1,b_1} T^{b_1}(w_1) + a_{2,b_2} T^{b_2}(w_2) + \dots + a_{e,b_e} T^{b_e}(w_e) + \sum_{v=1}^{m} b_v z_v$$

$a_{1,b_1} = \dots = a_{e,b_e} = b_1 = \dots = b_m = 0$

$\dim V = \dim \ker T + \dim \mathrm{Im} T = e + m + b_1 + \dots + b_e = m + (b_1+1) + \dots + (b_e+1)$

↳ γ.α.