Διάλεξη ⑦ 20.10.2023

- Υπάρχουν πίνακες οι οποίοι δεν είναι διαγωνοποιήσιμοι

A $n\times n$, $\mathbb{F}$: αλγεβρικά κλειστό $\longrightarrow$ θέλουμε το $ch_A(x)$ να έχει ρίζες, τότε υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας Q:

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} \boxed{J_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{J_k} \end{pmatrix}$$

$$J_i = J(\lambda, k_i) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}$$

ιδιοτιμή (λ), ιδιοδιάν. (k_i) $[n = k_1 + \dots + k_s]$

ΒΗΜΑΤΑ:

1] Υπολογίζουμε τις ιδιοτιμές του πίνακα και τα ιδιοδιανύσματα κάθε ιδιοτιμής.

2] Το πλήθος των γραμμικά ανεξάρτητων ιδιοδιανυσμάτων δίνει το πλήθος των διαφορετικών Jordan blocks.

3] Για κάθε ιδιοδιάνυσμα v της ιδιοτιμής λ:
$(A-\lambda I)w_1 = v$, $(A-\lambda I)w_2 = w_1$, ... (Συνεχίζουμε μέχρι το σύστημα να είναι αδύνατο)

$\boxed{\text{Παράδειγμα}}$: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

- $ch_A(x) = \det(A - xI_3) = (2-x)^3$
Ιδιοτιμή $\lambda = 2$

- Υπολογισμός του ιδιοχώρου:

$$(A-2I_3)v = 0 \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{B} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- $\dim \operatorname{Ker} B + rk(A) = 3$

- $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{w_1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{v} \xrightarrow{\text{λύσεις}} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{w_1} + \lambda \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{πυρήνας}}$

$\boxed{\begin{array}{l} Ax = b \text{ έχει λύσεις:} \\ V_0 + \operatorname{Ker} A \\ V_0 \text{: οποιαδήποτε λύση} \end{array}}$

$\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{w_1} \xrightarrow{\text{λύσεις}} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{w_2} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{w_2} \longrightarrow$ Αδύνατο

Άρα:

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

παράδειγμα ② Σελ. ② $\longrightarrow$

20.10.2023

$$\boxed{A=\begin{pmatrix}4&0&1\\2&3&2\\1&0&4\end{pmatrix}}\quad ch_A(x)=-(x-3)^2(x-5)$$

$\lambda=3$ με πολλαπλότητα 2, $\lambda=5$ με πολλαπλότητα 1

E_5: ιδιοχώρος της $\lambda=5$

$$\begin{pmatrix}4-5&0&1\\2&3-5&2\\1&0&4-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&1\\2&-2&2\\1&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow E_5=\left(\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\right)$$

$$E_3:\begin{pmatrix}4-3&0&1\\2&3-3&2\\1&0&4-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&0&2\\1&0&1\end{pmatrix}\rightarrow \dim E_3=2\quad \left\langle\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\rangle \rightarrow \text{βάση}$$

$$Q=\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&1&0\\1&0&1\end{pmatrix},\quad Q'=\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&2&0\\0&1&1\end{pmatrix},\quad Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}5&&0\\&3&\\0&&3\end{pmatrix}$$

Παράδειγμα 3: $\boxed{A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}}\rightarrow ch_A(x)=-(x-1)^3$

→ Βάση

$$E_1:\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow E_1=\left\langle\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right\rangle$$

↳ rank = 1

$$\rightarrow\left\{\begin{array}{l}\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\rightarrow \text{αδύνατο}\\ \begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}}_{w_1}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ w_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\end{array}\right\}\rightarrow \underbrace{x\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}}_{\text{λύση του ομογενούς}}+\underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}_{w_1}$$

$$Q=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\-1&0&1\end{pmatrix}\sim Q^{-1}AQ=\left(\begin{array}{c|cc}1&0&0\\\hline 0&1&1\\0&0&1\end{array}\right)$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 $\boxed{A=\begin{pmatrix}-1&-1&0\\0&-1&-2\\0&0&-1\end{pmatrix}}\rightarrow ch_A(x)=-(x+1)^3$

$\boxed{\lambda=-1}$ πολ/τα 3

$$E_{-1}=(A+I)x=0\quad \left.\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&-2\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}\ \ker A=\left\langle\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\rangle$$

Συνέχεια → Σελ. 3

20.10.23

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$W_1 \in \left\{ x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{F} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$W_2 \in \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} + x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{F} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} \to \text{αδύνατο}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- Σε κάθε $n\times n$ πίνακα υπάρχει μια ακολουθία αντιστρέψιμων πινάκων που συγκλίνει σε αυτόν.
- Σε κάθε $n\times n$ πίνακα υπάρχει μια ακολουθία διαγωνοποιήσιμων πινάκων που συγκλίνει σε αυτόν.

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \lambda_n \end{pmatrix} = \Delta \quad , \det(A) = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

Αν A όχι αντιστρέψιμος, τότε κάποια από τα $\lambda_1,\dots,\lambda_n = 0$

Έστω $I \subset \{1,2,\dots,n\}$ ώστε $\lambda_i = 0$ αν $i \in I$

$$\Delta + \operatorname{diag}(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n) = \Delta_k \quad \left\{ \begin{matrix} \varepsilon_i = 0 & i \notin I \\ \varepsilon_i = \frac{1}{k} & , i \in I \end{matrix} \right\}$$

$A_k = Q\,\Delta_k Q^{-1}$ αντιστρέψιμος $\quad A_k \xrightarrow{k\to+\infty} A$

- $A_{n\times n}$, $B_{n\times n}$, $AB \neq BA$. Δείξτε ότι $ch_{AB}(x) = ch_{BA}(x)$

<u>ΛΥΣΗ</u>: Αν A αντιστρέψιμος $A^{-1}(AB)A = BA$ άρα ο AB είναι όμοιος με τον BA, άρα έχουν το ίδιο χ.π.

Αν A όχι αντιστρέψιμος

$$\underset{\text{ακολουθία}}{A_n} \longrightarrow A \qquad ch_{A_nB}(x) = ch_{BA_n}(x) \Rightarrow$$

$$\lim ch_{A_nB}(x) = ch_{AB}(x)$$
$$\| $$
$$ch_{BA_n}(x) = ch_{BA}$$

Όμοια, σε κάθε πίνακα υπάρχει ακολουθία διαγων/μων πινάκων που συγκλίνει σ' αυτόν:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xleftarrow{n\to+\infty} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3+\frac{1}{n} & 1 \\ 0 & 0 & 3+\frac{2}{n} \end{pmatrix}$$

Διαφορετικές ιδιοτιμές αλλά είναι διαγωνοποιήσιμος

Σελ. 4 →

CALEY-HAMILTON : $ch_A(A) = 0$

Είναι προφανές για διαγωνοποιήσιμους πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \rightsquigarrow F(x) = \prod_{i=0}^{n} (x - \lambda_i)$$

$$F(A) = \begin{pmatrix} F(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & F(\lambda_n) \end{pmatrix} = 0$$

→ Για διαγωνοποιήσιμους:

$A = Q \Delta Q^{-1}$ $\quad F(A) = Q F(\Delta) Q^{-1}$

→ Για μη διαγωνοποιήσιμους:

$A_n \to A$ $\quad 0 = ch_{A_n}(A) \to ch_A(A) = 0$

$ch_{A_n} \to ch_A$