ΠΡΟΒΛΗΜΑ

1 Στόχος Μαθήματος:

$$\underbrace{Q}_{n\times n} \underbrace{A}_{n\times n} Q^{-1} = \underbrace{B}_{n\times n} \rightsquigarrow A, B \text{ όμοιοι}$$

Q, Q^{-1}: $n\times n$ και αντιστρέψιμοι

Να βρεθεί ο απλούστερος B που να είναι όμοιος με τον A.

$\rightsquigarrow$ θα μελετήσουμε και διανυσματικούς χώρους με εσωτερικό γινόμενο.

Γραμμική Άλγεβρα I $\rightsquigarrow \mathbb{R}$
Γραμμική Άλγεβρα II $\rightsquigarrow \mathbb{C}$

$$\boxed{f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i} : a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n \rightsquigarrow \text{πολυώνυμο}$$

$a_0, \dots, a_n \in \mathbb{F} \to$ σώμα ($\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{C}$)

σώμα: $+, \cdot$ 2 πράξεις

$\mathbb{F} \times \mathbb{F} \to \mathbb{F}$

$(x, y) \to x + y$

$\mathbb{F} \times \mathbb{F}$

$(x, y) \to x \cdot y$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

$x + (y + z) = (x + y) + z$

$0_{\mathbb{F}} + x = x + 0_{\mathbb{F}} = x$

$\vdots$

Σύνολο (πχ είτε $\mathbb{R}, \mathbb{C}$)

$$\mathbb{F}[x] = \left\{ f(x) : f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \quad a_i \in \mathbb{F} \right\}$$

$\mathbb{F} \subseteq \mathbb{F}[x]$

πχ) $c \to c + 0x + 0x^2$

- **Βαθμός Πολυωνύμου** $f \neq 0$

$$\boxed{\deg f(x) = \deg\left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right) = n}, \text{ αν } a_n \neq 0$$

πχ) $\deg(3x^5 + 6x^4 + 7x + 1) = 5$, $\deg(0x^6 + 7x^2) = 2$

- $\underline{\deg(0)}$: κάποιες σχολές δεν ορίζουν τι σημαίνει βαθμός πολυωνύμου αλλά άλλες λένε ότι είναι $-\infty$.

- $\underline{\deg(c) = 0}$, $c \neq 0$

- **Πράξεις Πολυωνύμων**

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \\ g(x) &= \sum_{i=0}^{m} b_i x^i \end{aligned}\right\}$$

$f(x) = g(x)$ αν και μόνο αν $n = m$, $a_i = b_i$ $0 \leq i \leq n$

Ισοδύναμα: $f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) = 0$

• **ΠΡΟΣΘΕΣΗ** $\quad \mathbb{F}[x] + \mathbb{F}[x] \to \mathbb{F}[x]$

$$(f(x), g(x)) \longmapsto f(x)+g(x)$$

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \\ g(x) = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i \end{array}\right\} \quad f(x)+g(x) = \sum_{i=0}^{\min(n,m)} (a_i+b_i)x^i + \sum_{i=\min(n,m)+1}^{\max(n,m)} (a_i+b_i)x^i$$

$$= \sum_{i=0}^{\max(n,m)} (a_i+b_i)x^i$$

[Έστω $k>n$, $f(x) = \sum_{i=0}^{k} a_i x^i \rightsquigarrow a_i = 0$ για $i>n$]

• **ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ**

$$f(x)\cdot g(x) = \left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right)\left(\sum_{j=0}^{m} b_j x^j\right) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} a_i b_j x^{i+j} \quad \Big| \quad I = i+j,\ 0 \le i+j \le n+m \Rightarrow j = I-i$$

$$= \sum_{I=0}^{n+m} \sum_{i=0}^{n} a_i b_{I-i} x^I$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

• $(3+5x+6x^2)(1+5x+0x^2+x^3) =$

$3\cdot 1 + (3\cdot 5 + 5\cdot 1)x + (3\cdot 0 + 5\cdot 5 + 6\cdot 1)x^2 + \dots$

• $(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\dots)(b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+\dots) =$

$a_0b_0 + (a_0b_1+b_0a_1)x + (a_0b_2+a_1b_1+a_0b_0)x^2$

$+ (a_0b_3 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_0b_3)x^3 + \dots$

$\boxed{\deg(f\cdot g) = \deg f + \deg g}$ $\quad f,g \neq 0$

[Αν προσπαθούσαμε να γράψουμε $\deg(f\cdot 0) = \deg f + \deg 0 \rightsquigarrow$ αδύνατο]

$\boxed{\deg(f+g) = \max\{\deg f, \deg g\}}$ $\quad f,g \neq 0$

$\rightsquigarrow$ Ιδιότητες πράξεων

ΠΡΟΣΘΕΣΗ:

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ f+g = g+f \\ \bullet\ (f+g)+h = f+(g+h) \\ \bullet\ \exists 0 \in \mathbb{F}[x] :\ 0+f = f+0 = f \\ \bullet\ \forall f\ \exists : -f \ :\ f+(-f) = (-f)+f = 0 \end{array}\right\} \text{Αβελιανή ομάδα}$$

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ 2.10.23

$f(g+h)=fg+fh$, $(g+h)f=gf+hf$

$fg=gh$ | $1\in \mathbb{F}[x]$: $1\cdot f=f\cdot 1=f$

$(f\cdot g)\cdot h=f(g\cdot h)$

↳ Δεν είναι σώμα !

$X\neq 0$, δεν αντιστρέφεται όμως: $\frac{1}{X}\notin \mathbb{F}[X]$

⇝ Τα μόνα πολυώνυμα $f(x)\in\mathbb{F}[x]$ ώστε $\frac{1}{f(x)}\in\mathbb{F}[x]$ είναι τα $\mathbb{F}\setminus\{0\}$

πχ)
- $3\in\mathbb{F}[x]$
- $1/3\in\mathbb{F}[x]$

$\mathbb{Z}$

$3|6$: το 3 διαιρεί το 6

$6=3\cdot 2\in\mathbb{Z}$

$5\nmid 6$: το 6 δεν μπορεί να γραφεί ως $6=5\cdot \underset{\in\mathbb{Z}}{k}$

$6=5\cdot\underset{\in\mathbb{Q}}{\frac{6}{5}}$

$a,b,\ \exists!\ \pi,\upsilon\ |\ \pi\in\mathbb{Z},\ 0\leq \underset{\in\mathbb{N}}{\upsilon}\leq|b|$

$a=\pi\cdot b+\upsilon$

$12=2\cdot 5+2$

$\mathbb{F}[x]$

$f|g \Leftrightarrow g=f\cdot \underset{h\in\mathbb{F}[x]}{h}$

$f,g,\ g\neq 0$

$f(x)=g(x)\cdot\pi(x)+\upsilon(x)$, όπου

$\boxed{\upsilon(x)=0}$ ή $0\leq deg(\upsilon(x))\leq deg(g(x))$

$\boxed{\upsilon(x)=0} \leftrightarrow g|f$

A nxn πίνακας

$f(A)=\sum_{i=0}^{n} a_i A^i$

$f\in\mathbb{F}[x]$

$f=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$

πχ) $3+5X+6X^7$

$\underset{A^0}{3I_n}+5A+6A^7$

⇝

• Για κάθε πίνακα A nxn υπάρχει πολυώνυμο $f(x) \in \mathbb{F}[x]$ ώστε $f(A)=0$.

$$\underbrace{1, A, A^2, \dots, A^{n^2}}_{n^2+1} \to \dim_{\mathbb{F}} \mathbb{F}^{n\times n} = n^2$$

Άρα γρ. εξαρτημένα

Άρα:

$$\exists \underbrace{a_0, a_1, \dots, a_{n^2+1}}_{\text{όχι όλα } 0} \in \mathbb{F} : \sum_{i=0}^{n^2} a_i A^i = 0$$

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n^2} a_i x^i \neq 0$$

$S = \{ f \in \mathbb{F}[x],\ f \neq 0,\ f(A) = 0 \}$

f μονικό

Ένα μη-μηδενικό πολυώνυμο θα λέγεται μονικό αν ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου είναι 1

• $5x^2+1$ δεν είναι

• $x^2 + \frac{1}{5}$ είναι

$: \frac{1}{5}$ "κανονικοποίηση".

Το S είναι μη-κενό
Περιέχει ένα μη-μηδενικό $f : f(A)=0$.
Το f μπορώ να το υποθέσω ότι είναι μονικό πολ/ντας με (a_n^{-1}).

• Υπάρχει ένα πολυώνυμο υ μονικό και ελαχίστου βαθμού.
[Αρχή ελαχίστου: κάθε μη-κενό υποσύνολο των φυσικών έχει ελάχιστο στοιχείο]

• Ισχύει ότι υ (το οποίο θα λέμε ελάχιστο πολυώνυμο του πίνακα A):

$\upsilon \mid f$ για κάθε $f \in S$

$f = \pi \upsilon + r \qquad \deg r < \deg \upsilon$

$\underbrace{f(A)}_{0,\ f\in S} = \pi(A)\cdot \underbrace{\upsilon(A)}_{0,\ \upsilon\in S} + r(A) \Rightarrow r(A) = 0$

Αν $r=0$ τότε $f = \pi\cdot\upsilon \Leftrightarrow \upsilon \mid f$

Αν $r \neq 0$ τότε έχω βρει ένα στοιχείο του S με βαθμό $< \deg \upsilon$.

• Το ελάχιστο πολυώνυμο διαιρεί κάθε πολυώνυμο που μηδενίζει τον A.

2.10.2023

Αλγόριθμος Διαίρεσης

$$\begin{array}{l|l} x^3+x+1 & x^5 \end{array} \longrightarrow$$

Αν $\deg g > \deg f \Rightarrow f = 0\cdot g + f$

πχ $5 = 0\cdot 7 + 5$

$$\begin{array}{l|l} x^5 & x^3+x+1 \\ x^5+x^3+x^2 & x^2-1 \\ \hline -x^3-x^2 & \\ -x^3-x-1 & \\ \hline -x^2+x+1 & \end{array}$$

$$x^5 = \underbrace{(x^2-1)}_{\pi}(x^3+x+1) + \underbrace{(-x^2+x+1)}_{\upsilon}$$

- **Ρίζες** $f \in \mathbb{F}[x]$

$f(\rho)=0 \iff \rho$ ρίζα του f

$f(\rho)=0 \iff (x-\rho) \mid f(x)$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: • $(x-\rho) \mid f(x) \Rightarrow f(x) = \pi(x)(x-\rho) \Rightarrow$

$f(\rho) = \pi\cdot\rho\cdot\overset{0}{\cancel{(\rho-\rho)}}$

• Αν $f(\rho)=0 \Rightarrow f(x) = \pi(x)(x-\rho) + \upsilon(x)$ $\upsilon=0$ / $\upsilon\neq 0$, $\deg \upsilon = 0 < \underbrace{\deg(x-\rho)}_{1}$

$0 = f(\rho) = \pi(\rho)\overset{0}{\cancel{(\rho-\rho)}} + \upsilon \in \mathbb{F}$

$\Rightarrow \underline{\upsilon = 0}$

- $\mathbb{F}$ σώμα

$\mathbb{F}[x] \ni f(x) \neq 0 \rightsquigarrow$ $\boxed{\text{Το } f(x) \text{ έχει το πολύ } \deg f \text{ ρίζες}}$

- $\mathbb{C}[x]$: ένα πολυώνυμο βαθμού n έχει ακριβώς n-ρίζες