Διάλεξη ⑩ 27.10.23

Χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$\prod_{i=1}^{n}(\lambda_i - x) = (-1)^n \prod_{i=1}^{n}(x-\lambda_i) = (-1)^n \Big(x^n - \big(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\big)x^{n-1} + \sum_{1\le i\leq j\le n}\lambda_i\lambda_j x^{n-2} - \sum_{1\le i<j\le n,\ <k}\lambda_i\lambda_j\lambda_k x^{n-3} + \dots + (-1)\lambda_1\lambda_2\lambda_3\cdots\lambda_n$$

Τύποι Vietta:

$$(x-\rho_1)(x-\rho_2) = x^2 - (\rho_1+\rho_2)x + \rho_1\rho_2$$

ο σταθερός όρος του πολυωνύμου είναι $(-1)^{2n}\lambda_1\cdots\lambda_n = \det A$

$ch_A(x) = \det(A - xI_n)$

$Ch_A(0) = \det A$

Κάθε πίνακας (σε αλγεβρικά κλειστό σώμα) είναι όμοιος με άνω τριγωνικό

πχ από την κανονική μορφή Jordan $\begin{pmatrix} \boxed{J_1} & & 0 \\ & \boxed{J_k} & \\ 0 & & \ddots\ \boxed{J_n} \end{pmatrix} \to J_i = J(\lambda, k)$ $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \lambda & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$ → άνω τριγωνικοί

→ Όμοιοι πίνακες έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό και ελάχιστο πολυώνυμο

↳ $Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ 0 & \ddots & J_n \end{pmatrix}$ $ch_A(x) =$ (άνω τριγωνικού) → Άρα αν φέρω έναν πίνακα σε διαγώνια μορφή φέρω τις ιδιοτιμές του.

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ 0 & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \to ch_T(x) = \det(T - xI_n) = \det\begin{pmatrix} \lambda_1 - x & & * \\ 0 & \ddots & \\ & & \lambda_n - x \end{pmatrix} = \Pi(\lambda_i - x)$$

● $Tr(A) \rightsquigarrow \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$, $A = (a_{ij})$

- $AB \neq BA$, όμως $tr(AB) = tr(BA)$ ①
- $tr(QAQ^{-1}) \overset{①}{=} tr(AQ^{-1}Q) = tr(A)$ → όμοιοι πίνακες: ίδιο tr!

Άρα ο A με τον όμοιο άνω τριγωνικό έχουν ίδιο tr, άρα

$tr(A) = \lambda_1 + \dots + \lambda_n$ $\rightsquigarrow$ $tr(A)$: το άθροισμα των ιδιοτιμών!

και $(-1)^{n+1}tr(A)$ είναι ο συντελεστής του x^{n-1} στο χαρακτηριστικό πολυώνυμο.

Ασκήσεις

$\rightsquigarrow$ Σελ. ②

27.10

1] Δίνεται A 6x6 πίνακας με $m_A(x) = (x-1)^2(x-2)$ και $ch_A(x) = (x-1)^4(x-2)^2$
Να βρεθούν οι πιθανές μορφές Jordan του A.

SOS

ΛΥΣΗ

$m_A(x) = (x-1)^2(x-2) \rightsquigarrow \big(\underset{m_2}{\underset{\shortparallel}{(x-1)^2}}, \underset{m_1}{\underset{\shortparallel}{(x-2)}}\big) = 1$ (πρώτοι μεταξύ τους)

Άρα ο A σπάει σε πίνακα:

$$A = \left(\begin{array}{c|c} \boxed{2\times2} & \\ \hline & \boxed{4\times4} \end{array}\right)$$

W_1 και έχει να κάνει με την ιδιοτιμή 2 (είναι 2x2 γιατί στο $ch_A(x)$ είναι 2πλή ρίζα)

ιδιοτιμή 1 ($ch_A(x): (x-1)^4$)

- $$J = \begin{pmatrix} 2 & & & & & \\ & 2 & & & * & \\ & & 1 & & & \\ & 0 & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$m_A(x) = m_1 \cdot m_2$

έχει $m_{A_1}(x) = m_1 = (x-2)$

$$A_1 = \begin{cases} \boxed{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{διαγων/μος}} m_{A_1}(x) = (x-2)} \to \text{είναι αυτό!} \\ \text{ή} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{όχι διαγ/μος}} m_{A_1}(x) = (x-2)^2 \to \text{Άρα δεν είναι αυτό!} \end{cases}$$

⇝ Το $x=1$ είναι 4πλή ρίζα του $ch_A(x)$, άρα ; το A_2 μπορεί να είναι:

$\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{ελάχιστο}} (x-1)$	$\left(\begin{array}{cc\|cc} \boxed{\begin{matrix}1 & 1 \\ & 1\end{matrix}} & & 0 & \\ \hline & & \boxed{\begin{matrix}1 & 1 \\ & 1\end{matrix}} & \\ 0 & & & \end{array}\right) \xrightarrow{\text{ελάχιστο}} (x-1)^2$	$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & \\ & \boxed{1} & 1 & 0 \\ 0 & & \boxed{\begin{matrix}1 & 1 \\ & 1\end{matrix}} & \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{ελάχιστο}} (x-1)^2$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \boxed{\begin{matrix}1 & 1 & 0 \\ & 1 & 1 \\ & & 1\end{matrix}} \end{pmatrix} \to$ ελάχιστο: $(x-1)^3$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & & 0 \\ & 1 & 1 & \\ & & 1 & 1 \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{ελάχιστο}} (x-1)^4$	

Άσκηση Φυλλαδίου ①: $(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n \in \mathbb{Z}$

- $(a+b)^n = \sum_{v=0}^{n} \binom{n}{v} a^v b^{n-v} \longrightarrow \sum_{v=0}^{n} \binom{n}{v} \left(2^v \sqrt{3}^{\,n-v} + 2^v (-\sqrt{3})^{n-v} \right) =$

$$\underset{(n-v) = \text{άρτιος}}{\sum_{v=0}^{n} \binom{n}{v} 2^{v+1} (3)^{\frac{n-v}{2}}} + \underset{(n-v)\ \text{περιττός}}{\sum_{v=0}^{n} \binom{n}{v} 2^v \big(\underset{0}{\cancel{\sqrt{3}^{\,n-v} - \sqrt{3}^{\,n-v}}}\big)}$$

→ άρα μένω με κάτι ακέραιο.

Αυτό είναι το πρώτο πράγμα που θα έκανε κανείς, και δεν έχει σχέση με την γραμμική άλγεβρα...

τρόπος

Θεωρούμε τον πίνακα $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \to ch_A(x) = (x-(2+\sqrt{3})(x+(2-\sqrt{3}))$

$$\left.\begin{aligned} Q^{-1} A Q &= \begin{pmatrix} 2+\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 2-\sqrt{3} \end{pmatrix} \\ Q^{-1} A^n Q &= \begin{pmatrix} (2+\sqrt{3})^n & 0 \\ 0 & (2-\sqrt{3})^n \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \mathbb{Z} \in tr(A^n) = (2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n$$

27.10.23

$L: V \to V$ και $\dim V < \infty$

Τότε ο L έχει ένα ιδιοδιάνυσμα στο $\mathbb{F}$ αλγεβρικά κλειστό.

Γιατί $ch_A(x) = f(x)$ → το οποίο έχει ρίζες

Άσκηση: Θεωρούμε V να είναι ο χώρος των συνεχών συναρτήσεων $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Θεωρούμε την γρ. απ. $T: V \to V$

$$f \mapsto \int_0^x f(t)dt$$

Γιατί είναι γραμμική;

↳ $T(f+g) = Tf + Tg$, $T(\lambda f) = \lambda T(f)$

Η γραμμική αυτή συνάρτηση <u>δεν έχει ιδιοτιμές</u>.

⇝ Πράγματι, έστω f ιδιοδιάνυσμα της ιδιοτιμής λ:

$$\underbrace{\int_0^x f(t)d(t)}_{\text{παραγωγίσιμη}} = \lambda f(t) \overset{\text{παραγωγίζω}}{\Longrightarrow} f(x) = \lambda f'(x) \Longrightarrow \underline{f(x) = c \cdot e^{\lambda x}}$$

↳ συνεχής

↓ Διαφορική εξίσωση με λύση

• $\lambda f(0) = \int_0^0 f(t)dt = 0$

$f(0) = c$ ⟹ ή $c = 0$ άρα $f(x) = 0$ → δεν δεχόμαστε μηδενική λύση ως ιδιοδιανύσματα

ή $\lambda = 0$, άρα $f(x) = 0$

$D: V \to V$, V είναι ο χώρος των διαφορίσιμων συναρτήσεων

$f \to Df = f'$. Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα.

⇝ Ψάχνουμε για f και λ έτσι ώστε $f'(x) = \lambda f(x)$

f: ιδιοδιάνυσμα, λ: ιδιοτιμή

↓

$$\underbrace{f(x) = ce^{\lambda x}}\ , \ c \in \mathbb{R}$$

↓

Οι λύσεις είναι δ.χ. άρα αν έχω μια λύση, έχω όλο τον χώρο
(τα πολλαπλάσιά του)

Κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ είναι ιδιοτιμή με μονοδιάστατο ιδιόχωρο. ←

Άσκηση: Δίνονται πίνακες $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{F}^{n\times m}$ 27.10.23

Τι σχέση έχουν τα χαρακτηριστικά πολυώνυμα των $\underset{m\times m}{AB}$ και $\underset{n\times n}{BA}$?

$$\to C = \left(\begin{array}{c|c} x\mathbb{I}_m & A \\ \hline B & \mathbb{I}_n \end{array}\right)\begin{array}{l}\}m\\ \}n\end{array}, \quad D = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{I}_m & O_{m,n} \\ \hline -B & x\mathbb{I}_n \end{array}\right)\begin{array}{l}\}m\\ \}n\end{array}$$

$$\underbrace{\quad}_{m}\ \underbrace{\quad}_{n} \qquad\qquad \underbrace{\quad}_{m}\ \underbrace{\quad}_{n}$$

→ οι C,D είναι διάστασης $(n+m)\times(n+m)$

$$\to CD = \left(\begin{array}{c|c} x\mathbb{I}_m - AB & xA \\ \hline B - \cancel{B}^{\,0} & x\mathbb{I}_n \end{array}\right), \quad DC = \left(\begin{array}{c|c} x\mathbb{I}_m & A \\ \hline 0 & -BA + x\mathbb{I}_n \end{array}\right)$$

Γενικά:

$$\begin{array}{c} \\ m \\ n \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} m & n \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|c} A_1 & B_1 \\ \hline C_1 & D_1 \end{array}\right) \end{array} \cdot \left(\begin{array}{c|c} A_2 & B_2 \\ \hline C_2 & D_2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} A_1A_2 + B_1C_2 & A_1B_2 + B_1D_2 \\ \hline C_1A_2 + D_1C_2 & C_1B_2 + D_1D_2 \end{array}\right)$$

$$\to \boxed{\det(CD) = \det(DC)} \rightsquigarrow \text{ιδιότητα οριζουσών}$$

$$\overset{\shortparallel}{(-1)^m x^n ch_{AB}(x)} \qquad \overset{\shortparallel}{x^m \det(-BA + x\mathbb{I}_n)} = x^m ch_{BA}(x)(-1)^n$$

Δεν μπορούν να έχουν <u>πάντα</u> ίδια χαρ. πολ. γιατί έχουν άλλες διαστάσεις!

Άρα Αν $\boxed{n=m}$: $\boxed{ch_{AB}(x) = ch_{BA}(x)}$ ← εκτός αν:

Άσκηση: Να διαγωνοποιηθεί, αν γίνεται, ο $A = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}$ → **ερώτημα ⓐ**

1] Υπολογίζουμε το $ch_A(x)$:

$$\det(A - xI_2) = \det\begin{pmatrix} 6-x & -2 \\ -2 & 9-x \end{pmatrix} = (6-x)(9-x)+4 = x^2+15x+50 = (x-10)(x-5)$$

άρα ο A διαγωνοποιείται!

2] Ψάχνουμε πίνακα Q ώστε $AQ = Q\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$ ⟶

$Q^{-1}AQ = \Delta$

↳ στήλες: βάση του ιδιοχώρου
↓
2 στήλες
↓
θα λύσω 2 ομογενή!

$$\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} x \\ z \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} y \\ \omega \end{matrix}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & \omega \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$$

↓ βάση ιδιοχώρου ιδιοτιμής ⑤

↳ βάση ιδιοχώρου ιδιοτιμής ⑩

↓

$$\left.\begin{array}{l} 6x - 2z = 5x \\ 6y - 2\omega = 10y \\ -2x + 9z = 5z \\ -2y + 9\omega = 10\omega \end{array}\right\} \longrightarrow \boxed{Q = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}$$

→ Να λύσω παραδείγματα κάνοντας τις πράξεις.

ερώτημα ⓑ
⟶
Σελ. ⑤

27.10.23

β) $\left\{\begin{matrix} (U_n),\ (V_n) & : \text{ακολουθίες} \\ U_0=1 & U_{n+1} = 6U_n - 2V_n \\ V_0=1 & V_{n+1} = -2U_n + 9V_n \end{matrix}\right\} \rightarrow \begin{pmatrix} U_n \\ V_n \end{pmatrix} = ?$

$$\hookrightarrow \begin{pmatrix} U_{n+1} \\ V_{n+1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} U_n \\ V_n \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ V_1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} U_0 \\ V_0 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} U_2 \\ V_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} U_1 \\ V_1 \end{pmatrix} = A^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Άρα αυτό που ζητάμε είναι:

$\begin{pmatrix} U_n \\ V_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, Άρα πρέπει να λογαριάσω τον A^n.

το έχουμε δείξει πολλές φορές ότι:

$$A = Q\Delta Q^{-1}$$
$$A^2 = Q\Delta \cancel{Q^{-1}Q}\Delta Q^{-1} = Q\Delta^2 Q^{-1}$$
$$\vdots$$
$$A^n = Q\Delta \cancel{Q^{-1}Q}\Delta \cdots \Delta Q^{-1}$$
$$A^n = Q\Delta^n Q^{-1}$$

$$QAQ^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} \Rightarrow QA^nQ^{-1} = \begin{pmatrix} 5^n & 0 \\ 0 & 10^n \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 2/5 & 1/5 \\ -1/5 & 2/5 \end{pmatrix}$$

Στον 2×2 λογαριάζω τον αντίστροφο με τον adj (Γρ. Ι)

Άρα $A^n = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5^n & 0 \\ 0 & 10^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/5 & 1/5 \\ -1/5 & 2/5 \end{pmatrix}$

Άρα $\begin{pmatrix} U_n \\ V_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5^n & 0 \\ 0 & 10^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/5 & 1/5 \\ -1/5 & 2/5 \end{pmatrix} =$

$$\Downarrow$$

... πράξεις

$$= \begin{pmatrix} 5^{n-1} & (-6+2^n) \\ 5^{n-1} & \boxed{(3+2^{1+n})} \end{pmatrix}$$

? Δεν φαίνεται καλά στο δίπλος...