$$\boxed{V \text{ δ.χ.}, \quad V \times V \to \mathbb{F}, \quad \mathbb{F} = \mathbb{R} \text{ ή } \mathbb{C} \qquad (v, w) \mapsto \langle v, w \rangle}$$

$|\langle v,w\rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|$

$\|v\| = \langle v, v\rangle^{1/2}$

Αν το εσωτερικό γινόμενο είναι πραγματικό, τότε η ανισότητα $|\langle v,w\rangle| \leq \|v\|\cdot\|w\|$:

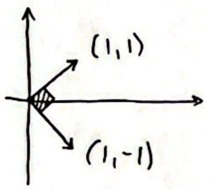
$$-\|v\|\cdot\|w\| \leq \langle v,w\rangle \leq \|v\|\cdot\|w\| \Leftrightarrow -1 \leq \frac{\langle v,w\rangle}{\|v\|\cdot\|w\|} \leq 1$$

$$\Downarrow$$

$$-1 \leq \cos\theta \leq 1$$

θ: γωνία των v και w.

⇝ Αν $\langle v, w\rangle = 0$, τότε λέμε ότι το v είναι κάθετο στο W.



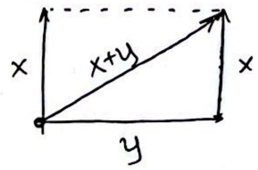
$(1,1)\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = 0$

$\int_0^{2\pi} \sin(2x)\cos(3x)\,dx = 0 \Rightarrow$

η $\sin(2x)$ και $\cos(3x)$ είναι "κάθετες συναρτήσεις"

↳ θα ξαναγυρίσουμε σε λίγο σε αυτό!

• $\langle x, y\rangle = 0$, τότε $\boxed{\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2}$ (Πυθαγόρειο θεώρημα)



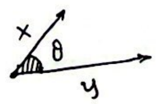
$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \underbrace{\langle x,x\rangle}_{=\|x\|^2} + \underbrace{\cancel{\langle x,y\rangle}}_{0} + \underbrace{\cancel{\langle y,x\rangle}}_{0} + \underbrace{\langle y,y\rangle}_{\|y\|^2}$$

• $\langle x_i, x_j\rangle = 0 \quad \forall i,j$, τότε $\|x_1 + \dots + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \dots + \|x_n\|^2$

↳ ΑΠΟΔΕΙΞΗ με επαγωγή στο πλήθος των προσθετέων

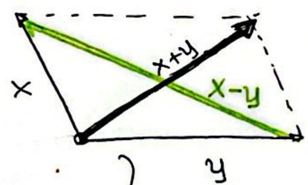
Πραγματικό εσωτερικό γινόμενο $(\langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle} = \langle y,x\rangle)$

$$\boxed{\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x,y\rangle} = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\|\cos\theta$$



Κανόνας του παραλληλογράμμου:

$$\boxed{\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2}$$



↓ ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

$$\left.\begin{aligned} \|x+y\|^2 &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + \overset{\text{(πριν)}}{\langle x,y\rangle} + \langle y,x\rangle \\ \|x-y\|^2 &= \langle x-y, x-y\rangle = \underbrace{\langle x,x\rangle}_{\|x\|^2} + \underbrace{\langle y,y\rangle}_{\|y\|^2} - \langle y,x\rangle - \langle y,y\rangle \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\oplus} \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2. \blacksquare$$

• $(X, \|\cdot\|)$ → χώρος με νόρμα και ισχύει η ταυτότητα του παραλληλογράμμου, τότε η νόρμα προέρχεται από εσωτερικό γινόμενο: (αν)

$$\begin{cases} \langle x,y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) & \text{αν } \mathbb{F} = \mathbb{R} \\ \langle x,y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2\right) & \text{αν } \mathbb{F} = \mathbb{C} \end{cases}$$

Σελ. (2) →

1.11.23

ΟΡΙΣΜΟΣ: V διανυσματικός χώρος $V \times V \xrightarrow[\text{γινόμενο}]{\text{εσωτερικό}} \mathbb{F}$

$S \subset V$ θα λέγεται **ορθογώνιο** αν $\forall s, s' \in S, s \neq s' : \langle s, s' \rangle = 0$

ορθοκανονικό αν $\langle s, s' \rangle = 1$

Παρατήρηση: Αν το S είναι ορθογώνιο, $S' = \left\{ \frac{s}{\|s\|}, s \in S \right\}$ είναι ορθοκανονικό

$$\left\langle \frac{s}{\|s\|}, \frac{s'}{\|s'\|} \right\rangle = \frac{1}{\|s\|} \cdot \frac{1}{\|s'\|} \underbrace{\langle s, s' \rangle}_{=0 \text{ αν } s \neq s'}$$

$$\left\| \frac{s}{\|s\|} \right\| = \frac{1}{\|s\|} \|s\| = 1$$

πχ) Στον $\mathbb{R}^n$ τότε τα $e_1, \dots, e_n$, όπου $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

$x, y \in \mathbb{R}^n \to \langle x, y \rangle = x^t y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \qquad \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{αν } i=j \\ 0 & \text{αν } i \neq j \end{cases}$

⤳ Ένα ορθογώνιο υποσύνολο είναι <u>γραμμικά ανεξάρτητο</u>.

$S = (s_i)_{i \in I}$, $0 = \sum_{i \in I} \lambda_i s_i$, $\langle s_j, 0 \rangle = \langle s_j, \sum_{i \in I} \lambda_i s_i \rangle = \sum_{i \in I} \langle s_j, \lambda_i s_i \rangle$

$$= \sum_{i \in I} \overline{\lambda_i} \langle s_j, s_i \rangle = \overline{\lambda_j} \langle s_j, s_j \rangle \neq 0$$

Ανάλυση Fourier:

$e_1, \dots, e_n$ → πεπερασμένη ορθοκανονική βάση $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$

Κάθε $v \in V$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός $v = \sum \langle v, e_i \rangle e_i$

↓ <u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>

$e_1, \dots, e_n$ βάση $V \ni v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$, $\lambda_i \in \mathbb{F}$

$\langle v, e_j \rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i, e_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle e_i, e_j \rangle = \lambda_j$ ∎

Παράδειγμα: $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = (3, 2, 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 3$

$\left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 2$, $\left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 1$

$X = \{ f : [\pi, 2\pi] \to \mathbb{R} : f(0) = f(2\pi), f \text{ συνεχής} \}$

ταυτίζεται με τον χώρο των περιοδικών συναρτήσεων $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με περίοδο 2π

↳ **Παράδειγμα 2**

$f(x) = f(x + 2\pi)$ $\quad \langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(t) g(t) dt$

$f(x)$, $x = k \cdot 2\pi + v$

$e_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

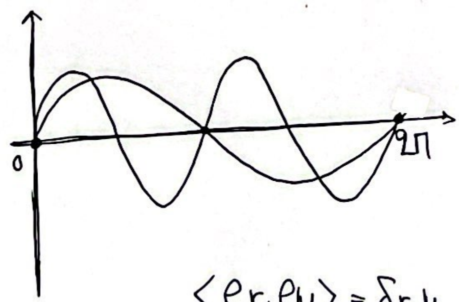
$e_1(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(x)$

$e_2(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(x)$

$\vdots$

$e_{2r-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(rx)$

$e_{2r}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(rx)$



$\langle e_r, e_\mu \rangle = \delta_{r,\mu}$

$f(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \langle f, e_r \rangle \cdot e_r$