$\langle Tv, w\rangle = \langle v, T^* w\rangle$

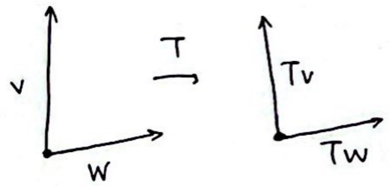
$T: V \to V$, $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ μια ορθ. βάση, $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$

$(T^*, B, B) = (T, B, B)^*$, $A = (a_{ij})$, $A^* = (\overline{a_{ij}})^t = \bar{A}^t = \overline{A^t}$

• Μια $T: V \to V$ θα λέγεται $\boxed{\text{μοναδιαία}}$ (unitary), αν διατηρεί το εσωτερικό γινόμενο.

Δηλαδή: $\langle Tv, Tw\rangle = \langle v, w\rangle$, $\forall\, v, w \in V$.

$\Rightarrow \|Tv\| = \|v\|$ (και αν είμαστε σε πραγματικό χώρο, διατηρείται και η γωνία τους)!



• Μια unitary συνάρτηση: $\mathrm{Ker}T = \{0\}$, η T είναι 1-1:

↳ $v \in \mathrm{Ker}T \Rightarrow Tv = 0$

$\langle v, v\rangle = \langle Tv, Tv\rangle = 0 \xRightarrow[\text{εσ.γιν}]{\text{ιδιότητα}} \dots \ \langle v, v\rangle = 0 \Rightarrow v = 0$

⇝ Αν $\dim V < \infty$ ($= n$), $T: V \to V$: unitary $\Big\} \Rightarrow$ T αντιστρέψιμη!

↳ $T: V \to V$ $\dim V < \infty$ είναι 1-1 αν είναι επί

[$\dim V = \dim \cancel{\mathrm{Ker}T}_{0} + \dim \mathrm{Im}T \Rightarrow \dim \mathrm{Im}T = \dim V$, $\Rightarrow \mathrm{Im}T \subseteq V$ $\Big\} \Rightarrow$ $\mathrm{Im}T = V \Rightarrow$ επί]

• $T: V \to W$ $\dim W = \dim V$

$B = \{e_1, \dots, e_n\}$ ορθοκανονική βάση

↳ $\boxed{\text{Η } T \text{ είναι μοναδιαία} \Leftrightarrow \{Te_1, \dots, Te_n\} \text{ είναι ορθοκαν. βάση του } W}$

↳ Αν η T είναι μοναδιαία:

$\delta_{ij} = \langle e_i, e_j\rangle = \langle Te_i, Te_j\rangle \Rightarrow \{Te_1, \dots, Te_n\}$: ορθοκανονική βάση.

• Έστω $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ ορθοκανονική βάση του V, $B = \{Te_1, \dots, Te_n\}$ — " — του W $\Big\} \xRightarrow{\text{τότε}}$ η T είναι μοναδιαία

↳ $v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$, $w = \sum_{j=1}^{n} \mu_j e_j$

• $\langle v, w\rangle = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overline{\mu_j} \underbrace{\langle e_i, e_j\rangle}_{\delta_{ij}} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overline{\mu_i} = [W]_B^* [V]_B$

• $\langle Tv, Tw\rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} \lambda_i Te_i, \sum_{j=1}^{n} \mu_j Te_j\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \lambda_i \overline{\mu_j} \underbrace{\langle Te_i, Te_j\rangle}_{\delta_{ij}} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overline{\mu_j}$

$[v]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$

$[w]_B = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}$

↳ Έχουμε δείξει ότι το εσωτερικό γινόμενο στις συντεταγμένες είναι ανεξάρτητο της ορθοκανονικής βάσης

↳ Σελ (2)

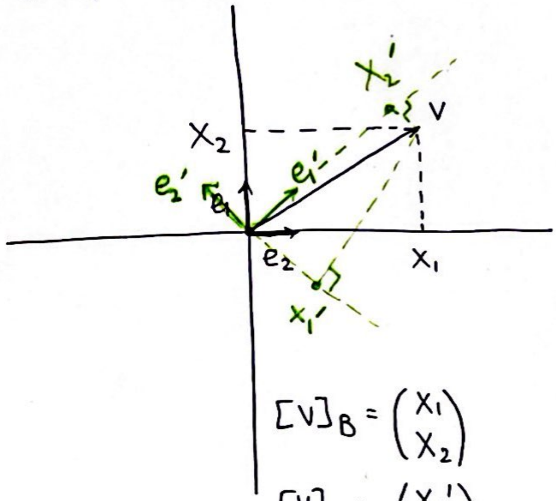
10.11.2023

Δηλαδή, αν έχω $B=\{e_1,\dots,e_n\}$ ορθοκαν. βάση

$\langle v,w\rangle = [w]^*_B [v]_B$

$B'=\{e_1',\dots,e_n'\}$ ορθοκαν. βάση

$\langle v,w\rangle = [w^*]_{B'}[v]_{B'}$



$[v]_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$[v]_{B'} = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$

$$\left\{\begin{array}{l} [v]_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ [w]_B = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow [w]_B \cdot [v]_B = x_1\bar{y}_1 + x_2\bar{y}_2$$

$\|$ ίσα

$$\left\{\begin{array}{l} [v]_{B'} = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} \\ [w]_{B'} = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow [w]_{B'}[v]_{B'} = x_1'\bar{y}_1' + x_2'\bar{y}_2'$$

Έτσι αν έχω B και B′ έχω γρ. απεικόνιση που πάω από την μία στην άλλη (γρ. Ι)

και εδώ συγκεκριμένα αν έχω 2 ορθοκανονικές βάσεις:

$$\begin{array}{ccc} B & \longrightarrow & B' \\ e_1 & \longrightarrow & e_1' \\ \vdots & & \vdots \\ e_n & \longrightarrow & e_n' \end{array}$$

Αυτή η συνάρτηση θα είναι μοναδιαία!

Να βρεθούν όλα τα εσωτερικά γινόμενα στον χώρο V

$v_1,\dots,v_n$ βάση

$q_{ji} = \langle v_i, v_j\rangle$ → Q $n\times n$

$[v]_B$, $[w]_B$ $\Rightarrow$ $\boxed{\langle v,w\rangle = [w]^*_B\, Q\, [v]_B}$, πρέπει $Q=Q^*$ και $[v]^*_B Q [v]_B \geq 0$ και ίση με το 0 ανν $v=0$

Άρα αν έχω ορθοκανονική βάση, αυτός ο πίνακας θα είναι ο ταυτοτικός ($Q=I_n$)

Σε μη, πεπερασμένο χώρο:

$$\langle x,y\rangle = \int_0^1\int_0^1 f(x)\,Q(x,y)\,\overline{y(x)}\,dx\,dy$$ → Για ποιές τιμές της Q είναι αυτό εσωτερικό γινόμενο.

↳ (θέματα της συναρτησιακής ανάλυσης).

10.11.23

$\boxed{\text{Μια γραμμική συνάρτηση } T: V \to V,\ \dim V<\infty \text{ είναι μοναδιαία αν και μόνο αν είναι αντιστρέψιμη και } T^{-1}=T^*.}$

Έστω T μοναδιαία τότε είναι αντιστρέψιμη, ($\dim V<\infty$)

$$\left.\begin{array}{l}\langle Tv, w\rangle = \langle Tv, Id_V v\rangle = \langle Iv, IT^{-1}w\rangle = \langle v, T^{-1}w\rangle \\ \quad \| \\ \langle v, T^*w\rangle\end{array}\right\} \Rightarrow T^* = T^{-1} \quad \forall v,w\in V \quad \blacksquare$$

↳ ένα επιχείρημα που το έχουμε ξαναπεί: $\langle v, Aw\rangle = \langle v, Bw\rangle \ \forall v,w \Rightarrow A=B$

Αντιστρόφως:

Αν $T^{-1}=T^*$: $\langle Tv, Tw\rangle = \langle v, T^*Tw\rangle = \langle v, T^{-1}Tw\rangle = \langle v,w\rangle$ $\blacksquare$

- $A\in \mathbb{C}^{n,n}$ $\boxed{\text{Μοναδιαίος}}$: $A^*A = AA^* = \mathbb{I}_n$, $A^* = \bar{A}^t$

Ένας πίνακας A θα λέγεται ορθογώνιος αν: $AA^t = A^tA = \mathbb{I}_n$

αν $A\in\mathbb{R}^{n,n}$ ορθογώνιος = μοναδιαίος

- Ένας πίνακας είναι μοναδιαίος αν και μόνο αν οι γραμμές (ή οι στήλες του) αποτελούν ορθοκανονική βάση.

$A = (a^1, \dots, a^n)$ — a^1: 1η στήλη, a^n: nστή στήλη

- $A^* = \begin{pmatrix} (\bar{a}^1)^t \\ (\bar{a}^2)^t \\ \vdots \\ (\bar{a}^n)^t\end{pmatrix}$ — $(\bar{a}^1)^t$: 1η γραμμή, $(\bar{a}^2)^t$: 2η γραμμή

Να το σκεφτούμε λίγο...

- $A^*A = (c_{ij}) = (\bar{a}^j)^t \cdot a^i = (a^j)^* a^i = \langle a_j, a_i\rangle = \delta_{ij}$

$(c_{ij}) = \begin{pmatrix} A \\ i\text{-γραμμή}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} B & j\text{-στήλη}\end{pmatrix}$

$c_{ij} = a_i \cdot b^j$ — a_i: i γραμμή, b^j: j στήλη

πολλαπλασιασμός πινάκων

$(c_{ij}) = A^*A = \mathbb{I}_n$

$c_{ij} = \delta_{ij}$

$$\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix},\ y\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n\end{pmatrix} \mapsto \langle x,y\rangle = y^*x$$

10.11.23

A είναι μοναδιαίος

$A^*A = AA^* = Id$

$\Downarrow t$

$(A^*A)^t = (AA^*)^t = Id^t = Id$

$A^t(A^*)^t = (A^*)^t A^t = I$

$(A^*)^t = (A^t)^*$

$A^* = (\bar{A})^t$, $(A^*)^t = \bar{A}$

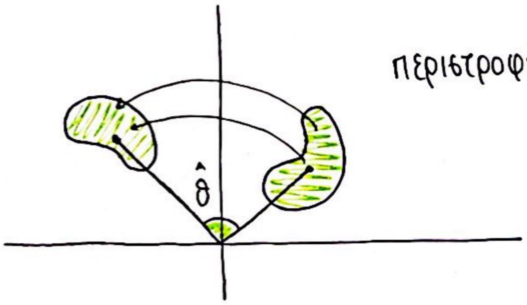
$A^* = \bar{A}^t$

$\Rightarrow$ Άρα A μοναδιαίος αν και μόνο αν οι στήλες του είναι ορθοκανονική βάση.

$\boxed{\text{Παραδείγματα}}$

- $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

περιστροφή κατά γωνία $\hat{\theta}$



$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

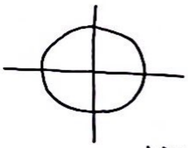
↳ διατηρεί το εσωτερικό γινόμενο (θυμάμαι γεωμετρία)

$AA^t = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2\theta + \sin^2\theta & \cos\theta\sin\theta - \cos\theta\sin\theta \\ \sin\theta\cos\theta - \cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta + \cos^2\theta \end{pmatrix} = \mathbb{I}_2$

λογικό αφού διατηρεί εσ.γιν.!

- Να βρεθούν όλοι οι μοναδιαίοι και ορθογώνιοι πίνακες $n\times n$, $\boxed{n=1,2}$

$z \in \mathbb{C} \leftrightarrow 1\times 1$



- Μοναδιαίος: $z\bar{z} = |z|^2 = 1$

$z = e^{i\theta} = \cos\theta + \sin\theta.$ ⟶ Να τα θυμηθούμε! (πολική μορφή μιγαδικού κτλ)

- ορθογώνιος:

$z^2 = 1 \Rightarrow z = \pm 1$

Για 2×2: πότε $AA^t = Id$? ⤳ Η ορίζουσα ενός τέτοιου πίνακα: $\det A = \pm 1$ γιατί: $AA^t = Id \Rightarrow$
$\det(AA^t) = \det A \cdot \det A^t = (\det A)^2 = 1$

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $A^{-1} = \underbrace{\frac{1}{ad-bc}}_{\pm 1} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

- Αν $\det A = -1$: $A^t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -d & b \\ c & -a \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \to \det A = -a^2 - b^2$
$\Downarrow$
$\underline{a^2 + b^2 = 1}$

- Αν $\det A = 1$: $A^t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \to \det A = \underline{a^2 + b^2 = 1}$

→ Συνέχεια Σελ. (5)

- ορθογώνιος $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ $a^2+b^2=1$ $\det=1$

  $\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ $a^2+b^2=1$ $\det=1$

⤳ Η μιγαδική περίπτωση :

$$AA^* = I_2 \Rightarrow \det(\bar{A}^t)\cdot\det(A)=1 \Rightarrow \overline{\det(A^t)}\cdot\det A = 1 \Rightarrow$$

$$\overline{\det A}\cdot\det A = 1 \Rightarrow |\det(A)|=1 \Rightarrow \det A = e^{i\theta} \Rightarrow \frac{1}{\det A} = e^{-i\theta}$$

Άρα ο πίνακας είναι μοναδιαίος αν και μόνο αν:

$$\begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} -d & -b \\ -c & -a \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ -e^{i\theta}\bar{b} & e^{i\theta}\bar{a} \end{pmatrix} \text{ και } |a|^2+|b|^2=1.$$