Ένας πίνακας είναι **μοναδιαίος** αν $\boxed{AA^* = A^*A = \mathbb{I}_n}$ (ορισμός)

ή αν και μόνο αν οι γραμμές (ή οι στήλες) αποτελούν ορθοκανονική βάση.

↓ Συμπέρασμα

με θετικά στοιχεία στη διαγώνιο!

A αντιστρέψιμος, τότε υπάρχει μοναδικός κάτω τριγωνικός B πίνακας ώστε BA να είναι μοναδιαίος.

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & 0 \\ & \ddots & \\ b_{ij} & & b_{nn} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} i<j \\ i=j \\ i>j \end{array}$$

↳ Αυτή είναι η μέθοδος Gram-Schmidt:

Αφού A αντιστρέψιμος, οι γραμμές του A είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

$v_1, \dots, v_n$ οι γραμμές του A

↓ Gram-schmidt

$u_1, \dots, u_n$ ορθοκανονική βάση

$\Big\} \quad \langle v_1, \dots, v_n \rangle = \langle u_1, \dots, u_2 \rangle$ (*)

Παράλληλα, θα έχουμε το παράδειγμα:

Να βρεθεί κάτω τριγωνικός πίνακας B με θετικά στοιχεία στη διαγώνιο και BA να είναι μοναδιαίος, αν
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \to v_1 \\ \to v_2 \\ \to v_3 \end{array}$$

⤳ Gram-Schmit στις γραμμές:

$\boxed{u_1 = v_1} = (1,2,3)$

$\boxed{u_2} = v_2 - \frac{2}{7}u_1 \xrightarrow{\text{θέλουμε}} = \boxed{v_2 - \frac{2}{7}v_1}$ (**)

$\boxed{u_3} = v_3 - \frac{1}{2}u_1 + \frac{21}{27}u_2 \xrightarrow[v_1, v_2, v_3]{\text{Συνάρτηση των}} = \boxed{v_3 + \frac{21}{27}v_2 - \frac{13}{18}v_1}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2/7 & 1 & 0 \\ -\frac{13}{18} & \frac{21}{27} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{—} \; v_1 \; \text{—} \\ v_2 - \frac{2}{7}v_1 \\ v_3 + \frac{21}{27}v_2 - \frac{13}{18}v_1 \end{pmatrix}$$

(*) $u_k = v_k + \sum_{j=1}^{k-1} \gamma_{kj} v_j$.

Και στον B βάζω τους συντελεστές από την (**) ανάλυση αντίστοιχα:

$$B' = (b_{ij}) = \begin{cases} +\gamma_{kj} & j<k \\ 1 & j=k \\ 0 & j>k \end{cases}$$

$$B'A = \begin{pmatrix} \text{—} \; u_1 \; \text{—} \\ \text{—} \; u_2 \; \text{—} \\ \vdots \\ \text{—} \; u_n \; \text{—} \end{pmatrix} \quad \langle u_i, u_j \rangle = 0 \quad i \neq j$$

Συνέχεια ⟶

$$u_k = v_k + \sum_{j=1}^{k-1} \gamma_{kj} v_j$$

$$\frac{u_k}{\|u_k\|} = \frac{1}{\|u_k\|} v_k + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\gamma_{kj}}{\|u_k\|} v_j$$

$$B = \begin{cases} +\frac{\gamma_{kj}}{\|u_k\|} & j<k \\ \frac{1}{\|u_k\|} & j=k \\ 0 & j>k \end{cases}$$

Άρα, στο παράδειγμα:

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{14}} & 0 & 0 \\ -\frac{2\sqrt{7}}{7\sqrt{27}} & \sqrt{7/27} & 0 \\ \frac{13}{18}\sqrt{6} & \frac{7}{9}\sqrt{6} & \sqrt{6} \end{pmatrix}$$

↳ ο B' αλλά κάθε γραμμή έχει διαιρεθεί με το μέτρο της γραμμής.

→ Τα B και τα U είναι μονοσήμαντα καθορισμένα $(BA = U)$.

**Άσκηση**:

**Βήμα Ⓐ**: Το γινόμενο κάτω τριγωνικών είναι κάτω τριγωνικός.

**Βήμα Ⓑ**: Ο αντίστροφος κάθε κάτω τριγωνικού είναι κάτω τριγωνικός:

↳ L, κάτω τριγωνικός, αντιστρέψιμος

$L = \Delta + L_1$ → $L_1$: κάτω τριγωνικός με 0 στη διαγώνιο.

$\Delta$: διαγώνιος με στοιχεία διάφορα του 0

$$L = \begin{pmatrix} \ddots & 0 \\ \triangle & \ddots \end{pmatrix} : \text{αντιστρέψιμος: } \det L \neq 0$$

$$= \Delta + \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & 0 & \\ \triangle & 0 & \ddots 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \Delta(\underbrace{\mathbb{I}_n + \Delta^{-1}L_1}_{}) \qquad N = \Delta^{-1}L_1$$

κάτω τριγωνικός με μηδενικά στη διαγώνιο.

$(\mathbb{I}_n + N)^{-1} = ;$

$$N = \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & \ddots & \\ \triangle & & 0 \end{pmatrix} \quad ch_N(x) = (-1)^n x^n$$

caley-hamilton

$N^n = 0$

$(1-\lambda)(1+\lambda+\lambda^2+\dots+\lambda^{n-1}) = \lambda^n - 1$

$(1+\lambda)(1-\lambda+\lambda^2+\dots+(-1)^{n-1}\lambda^{n-1}) = \lambda^n - 1$

$(\mathbb{I}_n + N)(\mathbb{I}_n - N^2 + \dots + (\pm)N^{n-1}) = \mathbb{I}_n - \cancel{N^n}^{\,0}$

⇓

$(\mathbb{I}_n + N)^{-1}$: είναι κάτω τριγωνικός ως άθροισμα γινομένων κάτω τριγωνικών πινάκων.

---

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} - & v_1 & - \\ & \vdots & \\ - & v_n & - \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -\lambda_1 v_1 - \\ \vdots \\ -\lambda_n v_n - \end{pmatrix} \to \text{υπενθύμιση}$$

13.11.2023

$\boxed{T^+(n) = \{\text{το σύνολο των κάτω τριγωνικών αντιστρέψιμων πινάκων με διαγώνια στοιχεία θετικών}\}}$ → ομάδα!

Έστω $B_1, B_2 \in T^+(n)$, $\left.\begin{matrix} B_1 A \\ B_2 A \end{matrix}\right\}$ → μοναδιαίοι.

$(B_1A)(B_2A)^{-1} = B_1AA^{-1}B_2^{-1} = B_1B_2^{-1}$ → μοναδιαίος

γιατί;

- Το γινόμενο μοναδιαίων είναι μοναδιαίος και
- ο αντίστροφος μοναδιαίου είναι μοναδιαίος.

Άρα $\underbrace{(B_1B_2^{-1})^{-1}}_{\text{κάτω τριγωνικός}} = \left.(B_1B_2^{-1})^*\right\}$ → με το αστεράκι έγινε άνω τριγωνικός

↳ Άρα αφού έχουμε ισότητα άνω και κάτω τριγωνικά

⇒ $B_1B_2^{-1}$ : ΔΙΑΓΩΝΙΟΣ

με στοιχεία που έχουν μέτρο 1 (unitary)

+ θετικά στοιχεία στη διαγώνιο

⇓

Άρα είναι ο $I_n$!

---

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

$\mathbb{C}^{n,n}$ : $\langle A,B\rangle = tr\langle AB^*\rangle$. Να βρεθεί το ορθογώνιο συμπλήρωμα του χώρου των διαγωνίων πινάκων.

$A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $AB^* = (c_{ij})$

$c_{ij} = \sum a_{i\nu} \overline{b_{j\nu}}$

$tr(AB^*) = \sum_{i=1}^{n} c_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu}\overline{b_{i\nu}}$

$\mathbb{C}^{n,n} \qquad \mathbb{C}^{n^2}$

$A \longrightarrow (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}, a_{21}, \dots, a_{n2}, \dots, a_{n1}, \dots, a_{nn}) = [A]_B$

$E_{ij} = \begin{pmatrix} & 0 \\ 0 & 1 \\ & 0 \end{pmatrix}$ → i γραμμή, j στήλη

$B = \{E_{11}, E_{22}, E_{13}, \dots\}$

Ερμητιανό εσωτερικό γινόμενο: $\mathbb{C}^{n^2}$.

$A = \sum_{j,i} a_{ij} E_{ij}$

$\langle A,B\rangle = tr(AB^*)$

$\langle E_{ij}, E_{i'j'}\rangle = \begin{cases} 0 & (i,j) \neq (i',j') \\ 1 & (i,j) = (i',j') \end{cases}$

$e_i = (0, \dots, 1, \dots 0)$ : ορθοκανονική
↳ i-θέση.

Συνέχεια σελ. 4

13.11.23

Διαγώνιοι Πίνακες: $\langle E_{11}, E_{22}, \dots, E_{nn} \rangle$

Τι ψάχνουμε; ~ Στοιχεία $v = \sum a_{ij} E_{ij} : \underset{\underset{a_{kk}}{\parallel}}{\langle v, E_{kk} \rangle} = 0$. για $1 \leq k \leq n$

Το να έχω ορθ. βάση βοηθά τις πράξεις που θέλω να κάνω.

$$\left\langle \sum_{i,j} a_{ij} E_{ij}, E_{kk} \right\rangle = \sum_{i,j} a_{ij} \underbrace{\langle E_{ij}, E_{kk} \rangle}_{0 \text{ εκτός από } i=j=k} = a_{kk}.$$

Άρα θέλουμε $a_{kk} = 0 \quad \forall k \quad 1 \leq k \leq n$

$\Downarrow$

τους πίνακες: $\begin{pmatrix} 0 & & \sim \\ & \ddots & \\ \sim & & 0 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{\text{Ένας πίνακας είναι αντιστρέψιμος ανν όλες οι ιδιοτιμές του είναι μη-μηδενικές.}}$$

Από γραμμική ① ⇒ $A$ αντιστρέψιμος ανν $\det(A) \neq 0$

Από γραμμική ② ⇒ $\det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_n$ (γινόμενο των ιδιοτιμών)

πως το βλέπουμε αυτό;

$ch_A(x) = \det(A - x\mathbb{I}_n)$, $ch_A(0) = \det A$

$ch_A(x) = (\lambda_1 - x) \cdot \dots \cdot (\lambda_n - x) \quad \sim (-1)^n \prod_{i=1}^{n} (x - \lambda_i)$

ιδιοτιμές και ρίζες $ch_A(x)$.

- $(x-\lambda_1)(x-\lambda_2) = x^2 - (\lambda_1+\lambda_2)x + \lambda_1\lambda_2$ Vieta
- $(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)(x-\lambda_3) = x^3 - (\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)x^2 + (\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_3)x - \lambda_1\lambda_2\lambda_3$

<u>Συμπέρασμα</u>: Στο $f(x) = \prod_{i=1}^{n} (x - \lambda_i)$, ο σταθερός όρος είναι $(-1)^n \lambda_1 \cdots \lambda_n$ ⊛

Στο $ch_A(x) = (-1)^n \prod_{i=1}^{n} (x - \lambda_i)$

$ch_A(0) = \cancel{(-1)^n (-1)^n} \lambda_1 \cdots \lambda_n$. ∎

⊛ $a_0$

$$\left.\begin{array}{l} \mathbb{R}^2[x] \longrightarrow \mathbb{R}^2[x] \\ L : g(x) \longrightarrow x \cdot g(1) \end{array}\right\}$$ Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα.

ΛΥΣΗ

Τα κάνω όλα πίνακες:

$$\mathbb{R}^2[x] \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^3$$

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \longrightarrow (a_0, a_1, a_2) = [f]_B \quad , \; B = \{1, x, x^2\}$$

$[L, B, B] = ;$

$$\left.\begin{array}{l} 1 \longrightarrow x \\ x \longrightarrow x \\ x^2 \longrightarrow x \end{array}\right\} \quad \begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccc} 1 & x^2 & x^2 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ x^2 \\ x^2 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} = A$$

- $ch_A(x) = \det \begin{pmatrix} -x & 0 & 0 \\ 1 & 1-x & 1 \\ 0 & 0 & -x \end{pmatrix} =$

$$= -x \det \begin{pmatrix} 1-x & 1 \\ 0 & -x \end{pmatrix} = x^2(1-x) \rightsquigarrow$$ υπολογίζω ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα.

$\lambda_1 = 1 \; , \; \lambda_2 = 0.$

Για $\underline{\lambda_1 = 1}$: $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ rank = 2 $\quad E_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ → ιδιόχωρος ιδιοτιμής 1

↳ $\begin{pmatrix} a \\ b \\ \gamma \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ → ιδιοδιάνυσμα.

Για $\underline{\lambda_2 = 0}$: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ rank = 1 ⇒ $\underline{\dim \ker f = 2.}$

$$a + b + \gamma = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b-\gamma \\ b \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b \\ b \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\gamma \\ 0 \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} b + \gamma \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$b, \gamma \in \mathbb{F}$

Άρα $\left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ :

↳ ο ιδιόχωρος ιδιοτιμής 0