ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1] $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $f(x) = \sum_{v=0}^{n} a_v x^v \in \mathbb{C}[x]$, $\bar{f}(x) = \sum_{v=0}^{n} \bar{a}_v x^v$

νδο.

$\rightsquigarrow$ $ch_{A^*}(x) = \overline{ch_A}(x)$, $m_{A^*}(x) = \overline{m_A}(x)$, Αν λ ιδιοτιμή του A, τότε $\bar{\lambda}$ ιδιοτιμή του A^*.

ΛΥΣΗ

$\cdot\ ch_{A^*}(x) = \det(A^* - x\mathbb{I}_n) = \det(\overline{A^t} - x\mathbb{I}_n) \overset{\bar{\bar{x}}}{=} \det(\overline{A^t - \bar{x}\mathbb{I}_n}) = \overline{\det(A^t - \bar{x}\mathbb{I}_n)} =$

$= \overline{\det(A - \bar{x}\mathbb{I}_n)} = \overline{ch_A(\bar{x})} = \overline{ch}_A(x)$. ▨

$\det A = \det A^t$

$\boxed{\det\bar{A} = \overline{\det A}}$
ισχύει πάντα:

$\det A = \sum_{\sigma\in S_n} (-1)^{sgn\sigma} a_{1,\sigma(1)}, a_{2\sigma(2)} \dots$

$\rightarrow \det\bar{A} = \sum (-1)^{sgn\sigma}\, \overline{a_{1\sigma(1)}} \cdot \overline{a_{2\sigma(2)}} \dots$

$= \sum (-1)^{sgn\sigma}\, \overline{a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdots}$

$= \overline{\det A}$.

ΠΡΟΣΟΧΗ

$\bar{f}(x) = \sum \bar{a}_v x^v$, ενώ $\overline{f(x)} = \sum \overline{a_v x^v}$

↓ Εδώ η συζυγία είναι μόνο στον συντελεστή

$\cdot\ f(x) = \sum_{v=0}^{n} a_v x^v$ πολυώνυμο, ώστε $f(A) = 0$.

$0 = 0^* = [f(A)]^* = \overline{f(A)}^t = \bar{f}(\bar{A}^t)$

Άρα Αν $f(A) = 0 \Rightarrow \bar{f}(A^*) = 0 \;=\; \bar{\bar{f}}((A^*)^*)$

$m_A(x) \to$ πολυώνυμο ελαχίστου βαθμού που μηδενίζει τον A
ισχύει ότι αν $f(A)$ τότε $m_A(x) | f(x)$.

τετραγωνικός: $n\times n$

$\rightsquigarrow f(A) = \sum_{v=0}^{n} a_v A^v$

$f(A)^* = \overline{\left(\sum_{v=0}^{n} a_v A^v\right)}^t$

$= \left(\sum_{v=0}^{n} \bar{a}_v \bar{A}^v\right)^t =$

$= \sum_{v=0}^{n} \bar{a}_v (\bar{A}^v)^t$

$= \sum_{v=0}^{n} \bar{a}_v (A^*)^v$

$= \bar{f}(A^*)$

$(A+B)^t = A^t + B^t$

$(AB)^t = B^t A^t$
⇓
$(A^{2t}) = A^t A^t \Rightarrow$
$(A^n)^t = \underbrace{A^t \dots A^t}_{n}$

θυμάμαι:...

Έστω $f \in \mathbb{C}[x]$ ώστε $f(x) = 0$

$f(x) = m_A(x) \cdot \pi(x) + v(x)$ $\begin{cases} v(x) = 0 \\ \text{ή} \\ \deg v(x) < \deg m_A(x) \end{cases}$

⇓

$\underbrace{f(A)}_{0} = \underbrace{m_A(A)}_{0} \cdot \pi(A) + v(A) \Rightarrow \boxed{v(A) = 0}$

→ το ελάχιστο πολυώνυμο διαιρεί κάθε άλλο πολ. που μηδενίζει τον A.

⟶

Άρα $m_A(A)=0 \Rightarrow \overline{m}_A(A^*)=0$ Άρα

$\boxed{m_{A^*}(x) \mid \overline{m}_A(x)}$, συνεπώς $m_{(A^*)^*}(x) \mid \overline{m}_{A^*}(x)$

Εφαρμόζω για $A \to A^*$

$m_{(A^*)^*}(x) = m_A(x)$

Άρα $m_A(x) \mid \overline{m}_{A^*}(x)$

$$\overline{m}_{A^*}(x) = q(x)\cdot m_A(x) \Rightarrow m_{A^*}(x) = \overline{q}(x)\cdot \overline{m}_A(x) \Rightarrow \boxed{\overline{m}_A(x) \mid m_{A^*}(x)}$$

Άρα

$\overline{m}_A(x) = m_{A^*}(x)$ (είναι και τα 2 μονικά) $\Rightarrow$ ταυτίζονται ∎

γιατί;

Θυμάμαι από πολυώνυμα:

$\mathbb{Z}$ $\left.\begin{matrix} a \mid b \\ b \mid a \end{matrix}\right\} \Rightarrow a = \pm b$

$\mathbb{F}[x]$ $\left.\begin{matrix} a \mid b \\ b \mid a \end{matrix}\right\} \Rightarrow a = cb$, $c \in \mathbb{F}^*$

$a \mid b \Rightarrow b = \pi a$

$b \mid a \Rightarrow a = qb \to q$ αντιστρέψιμο.

$\to b = \pi q b$, $b \neq 0 \Rightarrow$

$1 = \pi q$

• Αν λ ιδιοτιμή του $A \Rightarrow \overline{\lambda}$ ιδιοτιμή A^*.

$$ch_{A^*}(x) = \overline{ch_A}(x) \Rightarrow$$

$$ch_A(\lambda) = 0 \Rightarrow \overline{ch_A(\lambda)} = 0 \Rightarrow \overline{ch}_A(\overline{\lambda}) = 0 \Rightarrow ch_{A^*}(\overline{\lambda}) = 0. ∎$$

2] $X = (x_1, \dots, x_n)$, $n \geq 2$, $B = X^t X$, $\|X\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$, $A = \mathbb{I}_n + B$

Δείξτε ότι $B^2 = \|X\|^2 B$ ① και βρείτε το $m_A(x)$

Δείξτε ότι ο A είναι διαγωνοποιήσιμος ② και βρείτε τις διαστάσεις των ιδιοχώρων του

Δείξτε ότι $\det(A) = 1 + \|X\|^2$ ③

ΛΥΣΗ

$$B = (b_{ij}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} (x_1, \dots, x_n)$$ $n\times n$ πίνακας

$$= \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \vdots \\ c_{v1} \end{pmatrix} (d_{11}, d_{12}, \dots, d_{1n})$$ $d_{1i} = x_i$, $c_{v1} = x_v$

$$(b_{ij}) = \sum_{v=1}^{1} c_{i1} d_{1j} = x_i x_j \longleftrightarrow$$

$$= \begin{pmatrix} x_1x_1 & x_1x_2 & \dots & x_1x_n \\ x_2x_1 & x_2x_2 & \dots & \\ & & \ddots & \end{pmatrix}$$

$\Downarrow$

$\boxed{(b_{ij}) = x_i x_j}$

$B^2 = (\varepsilon_{ij})$, άρα $\varepsilon_{ij} = \sum_{v=1}^{n} b_{iv} b_{vj} =$

$$\sum_{v=1}^{n} x_i x_v x_v x_j = \underbrace{\sum_{v=1}^{n} x_v^2 x_i x_j}_{\|X^2\| \cdot b_{ij}} =$$

$\longrightarrow$

24.11.23

Θα μπορούσα να το δείξω και έτσι:

$B = X^tX$

$B^2 = (X^tX)(X^tX) = X^t(XX^t)X = X^t\langle X,X\rangle X = X^t\|X^2\|X = \|X^2\|X^tX = \|X^2\|B.$

$\underset{n\times1\ 1\times n}{X^tX} \to n\times n \mid \underset{1\times n\ n\times1}{XX^t} \to 1\times1 \to$ το εσωτερικό τους γινόμενο.

$A^2 = (I+B)^2 = I + B^2 + 2B$

τα προσθέτω τα πράσινα $= I + (\|X\|^2+2)B$

$$X^2 - (2+\|X\|^2)X + 1 + \|X\|^2$$

$-(2+\|X\|)^2A = -(2+\|X\|^2)I - (\|X\|^2+2)B.$

[Άρα $A^2 - (2+\|X\|)^2A = (1-2-\|X\|^2)I = (-1-\|X\|^2)I$]

$+(1+\|X\|^2)I = 0$

Άρα το $f(X) = X^2 - (2+\|X\|^2)X + 1 + \|X\|^2$ είναι ένα πολυώνυμο που μηδενίζει το A.

$f(A)=0$

$(A^2 - (2+\|X\|^2)A)$

είναι το ελάχιστο;

$f(X) = (X-1)(X-(1+\|X\|)^2)$

$f(A)=0 \Rightarrow m_A \mid f \Rightarrow \begin{cases} m_A = f \\ m_A = X-1 \\ m_A = X-(1+\|X\|^2) \end{cases}$ Δεν μηδενίζουν του πίνακα A!

παρατηρώ ότι

$(X-1) = B \neq 0$ Άρα $m_A(X) = f$

(2) Ιδιόχωρος: Για την ιδιοτιμή $\lambda=1$:

$A - I = B \Rightarrow (A-I)v = 0 \Rightarrow \underline{Bv=0}$

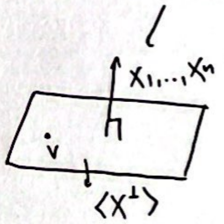
ποια είναι η διάσταση του χώρου των λύσεων;

ψάχνω v ώστε $X^tXv=0$

Αν $v \in \langle X\rangle^{\perp} \Rightarrow Xv = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \underbrace{(x_1 \ldots x_n)\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}}_{0}$

↳ αν είναι αυτό 0 τότε είναι όλο το γινόμενο.

Αν $v \in \langle x \rangle^{\perp} \Rightarrow xv = 0 \Rightarrow$



$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \underbrace{(x_1, \dots, x_n) \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}}_{0} = 0 \Rightarrow v \in \ker B = \ker(A - I) = E_1$$

$\underline{\dim E_1 \geq n-1}$

$\rightsquigarrow \langle x \rangle^{\perp} \subset E_1 \quad \dim \langle x \rangle^{\perp} = n-1$

$W \oplus W^{\perp} = V \Rightarrow \dim W + \dim W^{\perp} = n$ ①

Ιδιοτιμή λ:

$\dim E_\lambda \geq 1$

άρα $\dim E_1 + \dim E_\lambda \geq n$

όμως $n \geq \dim E_1 + \dim E_\lambda$

$\left.\begin{array}{l} \dim E_1 + \dim E_\lambda \geq n \\ n \geq \dim E_1 + \dim E_\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \dim E_1 = n-1 \\ \dim E_\lambda = 1. \end{cases}$

- $\lambda = 1 + \|x\|^2$

Άρα $ch_A(x) = (x-1)^{n-1}(x - (1 + \|x\|^2))(-1)^n$

$\det A = 1^{n-1}(1 + \|x\|^2) = \underline{1 + \|x\|^2}$.