$A \in \mathbb{C}^{n,n}$

$A = (a_1, \dots, a_n)$

γραμμές του A

$a_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$

$\|a_1\| \cdot \|a_2\| \cdots \|a_n\| \geq |\det A|$

Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν τα $a_1, \dots, a_n$ είναι ορθογώνια $\langle a_i, a_j \rangle = \delta_{ij} \|a_i\|^2$ ή κάποιο $a_i = 0$.

⇝ Αν ο A δεν είναι αντιστρέψιμος, τότε η ανισότητα είναι προφανής, διότι $\det A = 0$ και $\|a_1\| \cdots \|a_n\| > 0$

⇝ Αν κάποιο a_i είναι 0 ισχύει η ισότητα

⇝ Αν A αντιστρέψιμος, τότε υπάρχει μοναδικός κάτω τριγωνικός πίνακας με θετικά στοιχεία στην διαγώνιο, ώστε $BA = U$ ⇝ μοναδιαίος

$$
\begin{aligned}
\cdot |\det U|^2 &= \det U \cdot \overline{\det U} \\
&= \det U \cdot \overline{\det U^t} \\
&= \det U \cdot \det \overline{U}^t \\
&= \det U \cdot \det U^* \\
&= \det(U \cdot U^*) = \det(I_n) = 1.
\end{aligned}
$$

(γιατί οι μοναδιαίοι πίνακες έχουν πραγματικές ιδιοτιμές)

$\langle Uv, v \rangle = \langle \lambda v, v \rangle = \lambda \langle v, v \rangle$

$\langle v, U^* v \rangle = \langle v, \bar{\lambda} v \rangle = \bar{\bar{\lambda}} \langle v, v \rangle = \lambda \langle v, v \rangle$

ή καλύτερα: $\langle Uv, Uv \rangle = \langle v, v \rangle$

$\langle \lambda v, \lambda v \rangle = \lambda \bar{\lambda} \langle v, v \rangle \Rightarrow \underline{\lambda \bar{\lambda} = 1}$.

$$\boxed{|\det U|^2 = 1}$$

γιατί όλες οι ιδιοτιμές έχουν μέτρο 1

Οπότε:

$BA = U \Rightarrow A = B^{-1} U \Rightarrow |\det(A)| = |\det(B^{-1})| \cdot \cancel{|\det(U)|}^{\,1}$

Ο B είναι κάτω τριγωνικός(*) με στοιχεία στη διαγώνιο: $\begin{pmatrix} b_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & b_{nn} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \det B = b_{11} \cdots b_{nn}$, άρα

$\det B^{-1} = b_{11}^{-1} \cdots\cdots b_{nn}^{-1}$

⇝ Ο B είναι κάτω τριγωνικός ⇒ ο B^{-1} είναι κάτω τριγωνικός

Άρα $B^{-1} = \begin{pmatrix} b_{11}^{-1} & & & 0 \\ c_{21} & b_{22}^{-1} & & \\ c_{31} & c_{32} & \ddots & \\ c_{n1} & & & b_{nn}^{-1} \end{pmatrix}$ $\quad B^{-1} = (c_{ij}) = \begin{cases} 0, & i<j \\ b_{ii}^{-1}, & i=j \end{cases}$

Άρα $A = B^{-1} U \Rightarrow a_i = (c_{i1}\, c_{i2}, \dots, b_{ii}^{-1}, 0, \dots, 0) U$

a_i: i-γραμμή του b

U^i οι στήλες του U

$= c_{i1} U^1 + c_{i2} U^2 + \dots + b_{ii}^{-1} U$

$$\|a_i\|^2 = |c_{i1}|^2 \|U^1\|^2 + \dots + |b_{ii}^{-1}| \|U^i\|^2$$ — πυθαγόρειο θεώρημα

$\Rightarrow$

Οι στήλες ενός μοναδιαίου είναι ορθοκανονικές

27.11.2023

Τι λέει το Π.Θ.?

$v_1,\dots,v_n \quad \langle v_i, v_j\rangle = 0$ αν $i\neq j$

$\|v_1+\dots+v_n\|^2 = \|v_1\|^2+\dots+\|v_n\|^2$

Άρα $\quad \|a_i\|^2 = |c_{i1}|^2\underbrace{\cancel{\|U_1\|^2}}_{1} + \dots + |b_{ii}^{-1}|^2 \underbrace{\cancel{\|U_i\|^2}}_{1} \geq |b_{ii}^{-1}|^2$

Άρα $\quad \|a_i\| \geq |b_{ii}|^{-1} \Rightarrow \|a_1\|\cdots\|a_n\| \geq |b_{11}|^{-1}\cdots|b_{nn}|^{-1} = |\det A|$

Για να έχω ισότητα πρέπει τα $c_{i1} = \dots = c_{i,i-1} = 0$

Το οποίο μου λέει ότι ο πίνακας A είναι:

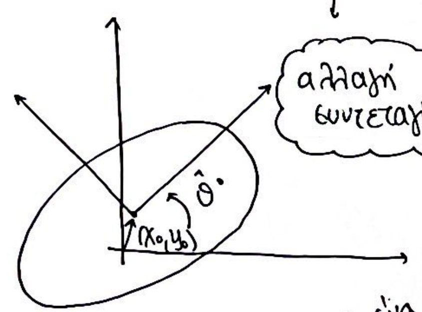
$$A = \begin{pmatrix} b_{11}^{-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & b_{nn}^{-1}\end{pmatrix} U \quad \Rightarrow \quad a_i = b_{ii}^{-1} U$$

→ Άσκηση που για να την λύσω χρειάζομαι υπόδειξη.

$$\boxed{AX^2 + 2BXY + CY^2 + 2DX + 2EY + F = 0}$$

Στην αναλυτική γεωμετρία: $\begin{cases} x = x_0 + X\cos\theta - Y\sin\theta \\ y = y_0 + X\sin\theta - Y\cos\theta \end{cases} \Rightarrow$ και έτσι έχω

αλλαγή συντεταγμένων



$$A'X^2 + 2B'XY + C'Y^2 + 2D'X + 2E'Y + F = 0$$

όπου:

$A' = A\cos^2\theta + 2B\sin\theta\cos\theta + C\sin^2\theta$

$B' = -A\sin\theta\cos\theta + B(\cos^2\theta - \sin^2\theta) + C\sin\theta\cos\theta$

$\vdots$

Να βρω ένα θ

$B' = 0$

Αν $\quad A = C$

$B\cdot\cos 2\theta = 0$

$B \neq 0 \quad \theta = \pi/4 \quad \rightarrow \quad B = 0$ δεν χρειαζόταν στροφή.

Αν $\quad A \neq B$

$$\frac{2B}{A-C} = \frac{2\sin\theta\cos\theta}{\cos^2\theta - \sin^2\theta} = \tan 2\theta$$

$\longrightarrow$

Αφού κάνω τη στροφή φεύγει το $2BXY$ 27.11.23

τώρα θέλω να διώξω τα $2DX + 2EY$:

$$D' = (Ax_0 + By_0 + D)\cos\theta + (Bx_0 + Cy_0 + E)\sin\theta = 0$$
$$E' = -(Ax_0 + By_0 + D)\sin\theta + (Bx_0 + Cy_0 + E)\cos\theta = 0$$

$$\det\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = 1$$

Αληθές αν και μόνο αν $\begin{cases} Ax_0 + By_0 + D = 0 \\ Bx_0 + Cy_0 + E = 0 \end{cases}$ (✱) $\overset{\text{λύνω το σύστημα}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$

άρα $2DX + 2EY$ μηδενικά.

Άρα $A'X^2 + C'Y^2 + F = 0$

Αν το ✱ δεν έχει λύση, τότε είναι παραβολή.

Όλη αυτή η διαδικασία είναι περίπλοκη ... πως βοηθάει η γραμμική σε αυτό; ?

Η αρχική εξίσωση γράφεται:

$$(x, y)\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2(D, E)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + F = 0$$

και ο μετασχηματισμός:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + P\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \rightsquigarrow P^tP = I_n \quad \text{: } P \text{ μοναδιαίος } \in \mathbb{R}^{n,n}$$

$$P^* = P^t \Rightarrow$$
$$P^tP = PP^t = I_n$$

• $P = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \Rightarrow P^t = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow P^tP = \begin{pmatrix} \cos^2\theta + \sin^2\theta & 0 \\ 0 & \sin^2\theta + \cos^2\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

• $\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} \rightsquigarrow$ αυτοσυζυγής, άρα $\exists$ μοναδιαίος P ώστε:

$$P^t\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Συνέχεια → Σελ. 4

$\rightarrow$ Οι μοναδιαίοι πίνακες κρατάνε τα εσωτερικά γινόμενα, δηλαδή 27.11.2023

$\langle Pv, Pw\rangle = \langle v, w\rangle$ $\rightarrow$ άρα κρατάει σταθερή την γεωμετρία των v, w. (μήκος και την γωνία τους) στη στροφή.

Άρα:

$$(x, y)\begin{pmatrix} A & B \\ B & C\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix} = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2, \text{ και } \begin{pmatrix} A & B \\ B & C\end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}P^t$$

Άρα $(x, y)P\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}P^t\begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix}$ και θέτω $\begin{pmatrix} X \\ Y\end{pmatrix} = P^t\begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix}$

Άρα $(X, Y)\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y\end{pmatrix} = \lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2$ $\rightarrow$ αυτό είναι γενικό για όλες τις διαστάσεις

δηλαδή

Τρεις διαστάσεις:

$$\underbrace{Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz}_{} + Zzx + \dots$$

$$= (x\ y\ z)\begin{pmatrix} A & D/2 & Z/2 \\ D/2 & B & E/2 \\ Z/2 & E/2 & C\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A & D/2 & Z/2 \\ D/2 & B & E/2 \\ Z/2 & E/2 & C\end{pmatrix} = Q$$

$\rightarrow$ αυτός είναι συμμετρικός, άρα $Q^t = Q$, υπάρχει P μοναδιαίος ώστε: $P^tQP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_3\end{pmatrix}$

Αν $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$ τότε γράφεται: $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \dots$ μοιάζει με έλλειψη

Αν $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$, τότε $\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} + \dots$ υπερβολή.

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

$$(x\ y)\begin{pmatrix} A & B \\ B & C\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix} + 2(E, D)\begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix} + F = 0, \quad \begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} X \\ Y\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\underline{(X, Y)P^t\begin{pmatrix} A & B \\ B & C\end{pmatrix}P}\begin{pmatrix} X \\ Y\end{pmatrix} + 2(E, D)\cdot P\begin{pmatrix} X \\ Y\end{pmatrix} + F = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + 2(E, D)P\begin{pmatrix} X \\ Y\end{pmatrix} + F = 0 \quad (*) \Rightarrow$$

27.11.23

$$P = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix}$$

$$2(E, D)P = 2(EP_{11} + DP_{21},\ EP_{12} + DP_{22})$$

$$2(E, D)P\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = 2(EP_{11} + DP_{21})X + 2(EP_{12} + DP_{22})Y$$

Άρα έχω: $\lambda_1 X^2 + 2(EP_{12} + DP_{22})X =$

$$\lambda_1\left(X^2 + \frac{2(EP_{12} + DP_{22})}{\lambda_1}X + \left[\frac{2(EP_{12}+DP_{22})}{\lambda_1}\right]^2 - \underbrace{\left(\frac{2(EP_{12}+DP_{22})}{\lambda_1}\right)^2}_{C_1}\right.$$

σταθερά

Άρα

$\lambda_1(X - X_0)^2 - C_1$ — σταθερά που θα προστεθεί στο F

Κάνω το ίδιο για το y και:

- Αν $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$: $\lambda_1(X-X_0)^2 + \lambda_2(Y-y_0)^2 = -F'$

και κάνω διερεύνηση:

$\lambda_1, \lambda_2 > 0 \Rightarrow \varnothing$ αν $-F' < 0$ $\quad \left(\frac{X - X_0}{\sqrt{\lambda_1}}\right)^2$

$\lambda_1, \lambda_2 < 0 \Rightarrow$ Έλλειψη αν $-F' < 0$

- Αν $\lambda_1, \lambda_2 = 0$ τότε ο $\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} = 0$ $\left[P^t\begin{pmatrix}\lambda_1 & \\ & \lambda_2\end{pmatrix}P = 0\right] \Rightarrow$ Ευθεία: $2DX + 2EY + F = 0$

- Αν $\lambda_2 = 0 \neq \lambda_1$ τότε έχω μια εξίσωση της μορφής

$$\lambda_1(X-X_0)^2 + \underset{0}{\cancel{\lambda_2 Y}} + u_1 Y + u_2 = 0 \Rightarrow \text{παραβολή}$$

Ποιά είναι τα πλεονεκτήματα;

Ξέρω την μορφή κοιτώντας τις ιδιοτιμές:

$$A = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} \sim Ch_A = X^2 - \underset{tr(A)}{\underbrace{(A+C)}}X + \underset{det(A)}{\underbrace{(AC - B^2)}}$$

⟶

Μπορω να βγάλω συμπέρασμα για τις ιδιοτιμές χωρις να τις υπολογίσω

27.11.23

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} \text{ όμοιος με } \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} tr(A) = \lambda_1 + \lambda_2 \\ det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \end{array}$$

Άρα αν το πολυωνυμο έχει 2 διαφορετικές ρίζες (πραγματικές γιατί ο $\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$ αυτοσυζυγής)

Άρα απο τα πρόσημα των λ_1, λ_2 καταλαβαίνω την μορφή.

Πως θα το έβλεπα σε εξετάσεις;

$$x^2 + 3y^2 + xy + x + y + 5 = 0$$

γράφω

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 3 \end{pmatrix} \sim$$ διαγωνοποιω ορθογώνια και για τις ιδιοτιμές που είναι $\neq 0$ τα ενσωματώνω στο x και βρίσκω την μορφή.