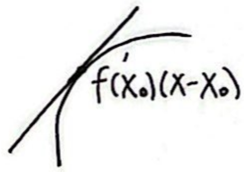
Εφαρμογή

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)(x-x_0)^2}{2!} + \frac{f'''(x_0)(x-x_0)^3}{3!} + \dots$

Αν είμαστε "κοντά" στο $x_0 \Rightarrow$

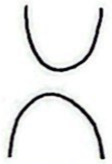
$|x - x_0| < h \to$ μικρό

Άρα την συνάρτηση την ελέγχει το $f'(x)$



Αν $f'(x_0) = 0$, το τι κάνει η συνάρτηση το ελέγχει το $\frac{f''(x_0)(x-x_0)}{2!}$ κλπ.

Έτσι για x κοντά στο x_0 : $\left\{ \begin{array}{l} f''(x_0) > 0 \\ f''(x_0) < 0 \end{array} \right.$



• $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \to f(x_0, \dots, x_n)$

$\overset{\shortparallel}{x}$

$f\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \underbrace{\nabla f|_{x=x_0}}_{\text{πίνακας γραμμή}} \begin{pmatrix} x_1 - a_1 \\ \vdots \\ x_n - a_n \end{pmatrix} + (*) \dots$, $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$

$$\nabla f|_{x=a} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)\Big|_{x=a}$$

$(*)$ $+ \underbrace{(x-a)^t}_{\text{γραμμή}} H \underbrace{(x-a)}_{\text{στήλη}} + \dots$

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \end{pmatrix}$$

$H^t = H$ γιατί $\frac{\partial^2 f}{dx_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial j d i}$

Για $n=2$:

Υποψήφιο τοπικό ακρότατο, τότε $\nabla f|_{x=a} = 0$.

Η H είναι διαγωνοποιήσιμη μέσω ενός μοναδιαίου μετασχηματισμού:

$P^* H P = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

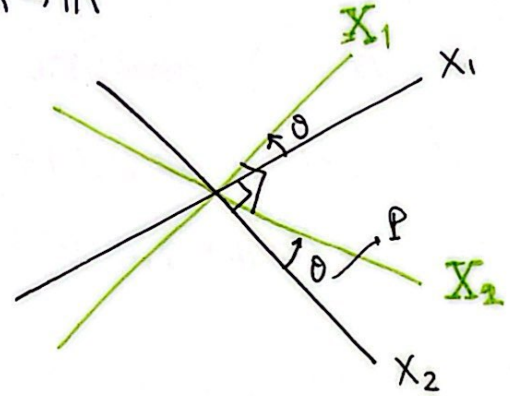
$\overset{\shortparallel}{P^t H P}$ και $P^t P = I_n$

συνέχεια → σελ. 2

1.12.23

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$xP = X$



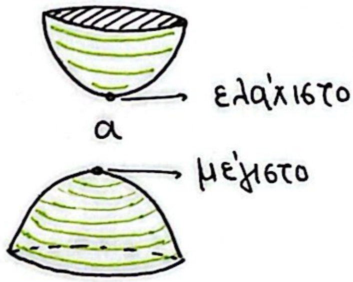
$$f(x_1,x_2) = f(a) + (x_1 \ \ x_2) P^t H P \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$f(x_1,x_2) = f(a) + \lambda_1 X_1^2 + \lambda_2 X_2^2$$

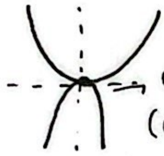
↓ Διερεύνηση

• $\lambda_1, \lambda_2 > 0 \rightsquigarrow$

• $\lambda_1, \lambda_2 < 0 \rightsquigarrow$



• $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$



σαγματικό σημείο
(ούτε μέγιστο ούτε ελάχιστο)

Άρα: • <u>ελάχιστο</u>, αν όλες οι ιδιοτιμές της εσσιανής $H = \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)$ είναι θετικές

• <u>μέγιστο</u>, αν όλες είναι αρνητικές

• <u>σαγματικό σημείο</u>, . (προς κάποιες κατευθύνσεις μεγαλώνει η συνάρτηση και προς άλλες μικραίνει.)

↳ ένα κενό του απειροστικού πολλών μεταβλητών που καλύπτεται από την γραμμική.

$\mathbb{R}^n \xrightarrow{F} \mathbb{R}^m$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} g_1(x_1,\dots,x_n) \\ \\ g_m(x_1,\dots,x_n) \end{pmatrix}$$

$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$$J(F) = \left.\begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial g_1}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & & \\ & & & \end{pmatrix}\right|_{x=a}$$

Παράγωγος $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

V διανυσματικός χώρος $\mathbb{F} = \mathbb{C}, \mathbb{R}$. 1.12.2023

Μια απεικόνιση $f: V \times V \to \mathbb{F}$, θα λέγεται διγραμμική αν

$$\begin{cases} ① \cdot f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, v_3) = \lambda_1 f(v_1, v_3) + \lambda_2 f(v_2, v_3) \\ ② \cdot f(v_1, \lambda_1 v_2 + \lambda_2 v_3) = \lambda_1 f(v_1, v_2) + \lambda_2 f(v_1, v_3) \end{cases}$$

↝ Αν ισχύει η ① και αντί της ② ισχύει η:

$②' \cdot f(v_1, \lambda_1 v_2 + \lambda_2 v_3) = \bar{\lambda}_1 f(v_1, v_2) + \bar{\lambda}_2 f(v_1, v_3)$ → $\underbrace{\text{sesqui}}_{\text{"μιαμιση"}}$-linear

Αν $\mathbb{F} = \mathbb{R}$: διγραμμική $= 1\frac{1}{2}$-γραμμική (λόγω συζυγίας)

<u>Παραδείγματα</u>: • $f: V \times V \to \mathbb{F}$

$(v, w) \to \langle v, w \rangle$ $1\frac{1}{2}$-γραμμική,
αν είμαστε στο $\mathbb{R}$: διγραμμική.

Έστω $\{e_1, \dots e_n\}$ μια βάση του V

$$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \quad , \quad w = \sum_{j=1}^{n} \mu_j e_j$$

$$f(v, w) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i, \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j\right) = \begin{cases} \sum_{j,i=1}^{n} \lambda_i \mu_j f(e_i, e_j) & \text{αν } f \text{ διγραμμική} \\ \sum_{j,i=1}^{n} \lambda_i \overline{\mu_j} f(e_i, e_j) & \text{αν } f \ 1\frac{1}{2}\text{-γραμμική} \end{cases}$$

Τι μας λείπει για να γίνει εσωτερικό γινόμενο;

Χρειαζόμαστε: $\begin{cases} f(v, w) = \overline{f(w, v)} & \text{(ερμιτιανή διγραμμική μορφή)} \\ \text{και} \quad f(v, v) \geq 0, \text{ και } f(v, v) = 0 \Leftrightarrow v = 0. \end{cases}$

→

1.12.23

$A = (a_{ij})$, $a_{ij} = f(e_j, e_i)$, $B = e_1, \dots, e_n$

$$f(v,w) = \underbrace{\overline{[w]}_B^{\,t} \cdot A \cdot [v]_B}_{} \Rightarrow$$

$[v]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$

$[w]_B = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}$

γινόμενο πινάκων $\rightarrow$ $\underset{n\times m}{A}\,\underset{m\times n}{B} = C$, $C_{ij} = \sum_{v=1}^{m} a_{iv} b_{vj}$

$A = a_{ij}$, $B = b_{ij}$

$\underset{n\times \ell}{D} = (d_{ij})$

$(\underset{n\times m}{A}\,\underset{m\times n}{B}\,\underset{n\times \ell}{D}) = (C_{ij}') \Rightarrow C_{ij}' = \sum_{v=1}^{m} \sum_{\mu=1}^{n} a_{iv} \underbrace{b_{v\mu}} \underbrace{d_{\mu j}}$

$$\Rightarrow f(v,w) = \overline{[w]}_B^{\,t} \cdot A \cdot [v]_B$$

$\overline{[w]}_B^{\,t} = c_{1j}$, $A = a_{ji}$, $[v]_B = d_{i1} = \lambda_i$

$c_{1,j} = \overline{\mu}_j$, $a_{ji} = f(e_i, e_j)$, d_{i1}

$$\begin{tikzcd}
V \times V \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{F} \\
\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &
\end{tikzcd}
\qquad
v \mapsto [v]_B, \quad w \mapsto [w]_B$$

$$\begin{tikzcd}
V\times V \ni (v,w) \arrow[r] \arrow[d] & f(v,w) \arrow[d, phantom, "\shortparallel"] \\
\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \ni ([v]_B, [w]_B) \arrow[r] & \overline{[w]}_B^{\,t} A [v]_B
\end{tikzcd}$$

- V, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ εσωτερικό γινόμενο, $f: V \times V \to \mathbb{F}$, $1\tfrac{1}{2}$-γραμμική. $\Rightarrow$ Τότε $\exists\, L: V \to V$ γραμμική έτσι ώστε: $f(v,w) = \langle Lv, w\rangle$.

Αναλυτικά, σταθεροποιώ το w:

$f(v,w): V \to \mathbb{F}$ γραμμική, δηλαδή ένα στοιχείο του V^*

Συνεπώς, έχουμε αποδείξει ότι υπάρχει u ώστε το $f(v,w) = \langle v, u\rangle$

Αυτό το u από τι εξαρτάται; από το $\underline{w}$. Δηλαδή η $f(v,w)$ είναι άλλη συνάρτηση από την $f(v,w')$. Οπότε το $f(v,w) = \langle v, u_w\rangle$.

$\rightsquigarrow$ Το $f(v, \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2) \overset{1\frac{1}{2}}{=} \overline{\lambda}_1 f(v,w_1) + \overline{\lambda}_2 f(v,w_2)$

$\qquad = \overline{\lambda}_1 \langle v, u_{w_1}\rangle + \overline{\lambda}_2 \langle v, u_{w_2}\rangle$

$\qquad = \langle v, \lambda_1 u_{w_1} + \lambda_2 u_{w_2}\rangle$

$f(v, \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2) = \langle v, u_{\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2}\rangle$

$\Rightarrow$

Άρα $\Rightarrow$ $u_{\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2} = \lambda_1 u_{w_1} + \lambda_2 u_{w_2}$ (Η εξάρτηση του u από το w είναι γραμμική)

Δηλαδή: $V \to V$

$w \to u_w$ γραμμική $= U(w)$

$\Downarrow$

$$f(v,w) = \langle v, U(w) \rangle$$
$$= \langle U^* v, w \rangle \quad , \; L = U^* \; = \langle Lv, w \rangle$$
Αυτό που θέλαμε.

- Διανυσματικός χώρος των $1\frac{1}{2}$ μορφών:

$\left.\begin{array}{l} f_1(v,w) + f_2(v,w) \\ \lambda f(v,w) \end{array}\right\} \to$ το άθροισμα και το γινόμενο των $1\frac{1}{2}$ μορφών είναι $1\frac{1}{2}$ μορφή

$\mathrm{End}(V) = V \to V$ γραμμικές

$f \longmapsto L_f \qquad f(v,w) = \langle L_f v, w \rangle$

είναι ισομορφισμός.

- $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 \longrightarrow \lambda_1 L_{f_1} + \lambda_2 L_{f_2}$

$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 f_1(v,w) = \lambda_1 \langle L_{f_1} v, w \rangle \\ \lambda_2 f_2(v,w) = \lambda_2 \langle L_{f_2} v, w \rangle \end{array}\right\} \xrightarrow{\oplus} \lambda_1 f_1(v,w) + \lambda_2 f_2(v,w) =$

$\lambda_2 \langle L_{f_1} v, w \rangle + \lambda_2 \langle L_{f_2} v, w \rangle$

$= \langle (\lambda_1 L_{f_1} + \lambda_2 L_{f_2}) v, w \rangle.$

ιδιότητες εσ. γιν.

αν $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ ορθοκανονική βάση

$a_{ij} = f(e_j, e_i) = \langle L_f e_j, e_i \rangle =$ πίνακας της γραμμικής συνάρτησης L_f.

$$L_f e_j = \sum_{v=1}^{n} b_{vj} e_v \quad , \; (b_{vj}) = (L_f, B, B)$$

$$\langle L_f e_j, e_i \rangle = \langle \sum_{v=1}^{n} b_{vj} e_v, e_i \rangle = \sum_{v=1}^{n} b_{vj} \underbrace{\langle e_v, e_i \rangle}_{\delta_{ij}} = b_{ij}$$

δ_{ij} γιατί έχω ορθοκανονική βάση

SOS

Για τον πίνακα αλλαγής βάσης: 1.12.23

$f(v,w) = \overline{[w]}_B^t A [v]_B$

<u>Αλλαγή βάσης</u>: B, B'

$P = (1_V, B, B')^{-1}$

$P [v]_{B'} = [v]_B$

$\Rightarrow f(v,w) = \underbrace{[w]_B^*}\, A\, \underbrace{[v]_B} =$

$= \overbrace{[w]_{B'}^* P^*}\, A\, \overbrace{P \cdot [v]_{B'}}$

Άρα σε μια αλλαγή βάσης P ο πίνακας της $1\frac{1}{2}$ γραμμικής αλλάζει:

$A \to P^* A P.$

<u>Που οδηγούν αυτά</u>;

ορίζουμε $\to$ Hermitian $1^{1/2}$-μορφή $f(v,w) = \overline{f(w,v)}$

Συμμετρική διγραμμική μορφή $f(v,w) = f(w,v)$

και $f(v,v) > 0$