Διάλεξη 24

4.12.2023

$f: V \times V \to \mathbb{F}$
$(v,w) \to f(v,w)$

Ανακεφαλαίωση

· f μιαμιση μορφή:
- $f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, w) = \lambda_1 f(v_1,w) + \lambda_2 f(v_2,w)$
- $f(v, w_1+w_2) = f(v,w_1) + f(v,w_2)$
- $f(v,\lambda w) = \bar{\lambda} f(v,w)$

· f διγραμμική, όμοια αλλά $f(v,\lambda w) = \lambda f(v,w)$

Γιατί σε πραγματικό χώρο διγραμμική = $1\frac{1}{2}$ μορφή

· Εσωτερικό γινόμενο είναι μιάμιση μορφή
· $f(v,w) = \langle Lw, v \rangle$ —— ″ ——
· $\dim V \leq n < \infty$, τότε κάθε μιαμιση μορφή f: $f(v,w) = \langle L_f v, w \rangle$, $L_f: V \to W$
· Αν $\{v_1,\dots,v_n\}$ διατεταγμένη βάση
  Πίνακας της f: $A = (a_{ij})$, $a_{ij} = f(v_j, v_i)$
· Αν $\{v_1,\dots,v_n\}$ είναι ορθοκανονική βάση. $a_{ij} = f(v_j,v_i) = (L_f, B, B)$

$\langle L v_i, v_j \rangle = (a_{ij}) \to$ πίνακας της L ως προς ορθοκανονική βάση B.

Τα εσωτερικά γιν. είναι $1\frac{1}{2}$ μορφές, Η $1\frac{1}{2}$ μορφή δεν είναι εσωτερικό γινόμενο, θα δούμε τι θα χρειαστεί να της βάλουμε ώστε να γίνει εσωτερικό γινόμενο.

ΟΡΙΣΜΟΣ: f λέγεται ερμητιανή αν $f(v,w) = \overline{f(w,v)}$ $\forall v,w \in V$.

και αν $f(v,w) = \langle L_f v, w \rangle$, η f είναι ερμητιανή αν και μόνο αν L_f είναι $L_f^* = L_f$

γιατί;

· $f(v,w) = \langle L_f v, w \rangle = \langle v, L_f^* w \rangle = \overline{\langle L_f^* v, w \rangle}$
$\overline{f(w,v)} = \overline{f(L_f w, v)}$ αν και μόνο αν $L_f^* = L_f$.

Έχουμε δει ότι αν $[v]_B \to$ Η στήλη των συντεταγμένων του v ως προς βάση B
και $[w]_B \to$ —— ″ —— w —— ″ ——

τότε $f(v,w) = [w]_B^* \cdot A \cdot [v]_B$
↳ πίνακας της f.

ΟΡΙΣΜΟΣ: Μια μιαμιση μορφή f θα λέγεται μη-αρνητική αν είναι ερμητιανή και $f(v,v) \geq 0$ $\forall v \in V$

θα λέγεται θετική αν είναι ερμητιανή και $f(v,v) > 0$ $\forall v \in V$, $v \neq 0$ ($f(0,0)=0$)

[Άρα ψάχνουμε να βρούμε πότε μια μιαμιση μορφή είναι εσωτερικό γινόμενο. Ικανοποιεί τη σχέση της διγραμμικότητας, θέλουμε να ικανοποιεί την συμμετρία (άρα να είναι ερμητιανή) και να είναι θετική]

Γιατί θέλουμε στον παραπάνω ορισμό να είναι ερμητιανή; 4.12.23

Αν f ερμητιανή, τότε $f(v,v) = \overline{f(v,v)} \Rightarrow f(v,v) \in \mathbb{R}$ και έτσι έχει νόημα το $f(v,v) \geq 0$

Στην μη-αρνητική, μπορώ να έχω $f(v,v) = 0$, $v \neq 0$

Θετική μιαμιση μορφή = εσωτερικό γινόμενο $f(v,v)=0 \Leftrightarrow v=0$

Αν $A=(a_{ij})$, $a_{ij} = f(v_j, v_i)$ και $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$ όπου $\{v_1, \dots, v_n\} = B$ διατεταγ. βάση του V.

$[v]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$, $f(v,v) = [v]_B^* A [v]_B$

$= (\bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_n) A \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_i \bar{\lambda}_j a_{ij} \geq 0$ θέλουμε

- $A \in \mathbb{F}^{n,n}$, $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$
  $\mathbb{F}^n \times \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}$
  $(x,y) \to y^* A x$

δίνει μια θετική μορφή $\left(\begin{array}{l} y^*Ay \geq 0 \\ y^*Ay = 0 \Rightarrow y = 0 \end{array} \right)$ αν και μόνο αν $\exists$ αντιστρέψιμος P ώστε $A = P^*P$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αν $A = P^*P$, τότε $f(x,x) = x^*Ax = x^*P^*Px = (Px)^*(Px) \geq 0$ — γιατί; ⊛

P αντιστρέψιμος

$(Px)^*$: διάνυσμα γραμμή, (Px): διάνυσμα στήλη

⊛ $Px = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

$(Px)^* = (\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n)$

$\Rightarrow (Px)^*Px = (\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n)\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} y_i \bar{y}_i = \sum_{i=1}^{n} |y_i|^2 \geq 0$

Για την θετικότητα:

$(Px)^* Px = 0 \Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}_{=y} = 0 \Rightarrow Px = y = 0 \Rightarrow x = 0$ γιατί P αντιστρέψιμος

(Πόσο κάνει $A^* = (P^*P)^* = P^*(P^*)^* = P^*P \Rightarrow A$ αυτοσυζυγής.)

Αντιστρόφως, έστω ότι η

$f(x,y) = y^*Ax$ είναι θετική. ⇝ Άρα είναι εσωτερικό γινόμενο, άρα έχει $\{Q^1, \dots, Q^n\}$ ← ορθοκανονική βάση!

Άρα $\delta_{ij} = f(Q^i, Q^j) = (Q^j)^* A Q^i$

Αυτό σημαίνει ότι αν πάρω τον πίνακα $Q = (Q^1, \dots, Q^n)$ ↳ πίνακας με στήλες τα Q^i

τότε το $Q^*AQ = I_n \Rightarrow A = (Q^*)^* Q^* \Rightarrow$

θέτω $P = Q^*$ $\Big\} \Rightarrow A = P^*P$

ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΘΕΤΙΚΟΤΗΤΑΣ

4.12.2023

ΟΡΙΣΜΟΣ $A = (a_{ij})$. $\Delta_k(A) = \det\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{pmatrix}$, δηλαδή $\Delta_n(A) = \det(A)$

$\Delta_1(A) = a_{11}$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ a_{k1} & & a_{kk} & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad 1 \le k \le n$$

↳ ορίζουσα ενός μέρους του πίνακα

Μια μιάμιση μορφή f με πίνακα $(a_{ij}) = A$, είναι θετική, $A = A^*$ και $\Delta_k > 0 \ \forall k \in [1,n]$

Γι'αυτό θα χρειαστούμε πρώτα ένα **λήμμα:**

Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

1] Υπάρχει άνω τριγωνικός πίνακας P με μονάδες στη διαγώνιο ώστε $B = AP$ να είναι κάτω τριγωνικός

κάτω / τυχαίος / άνω } άνω κάτω

2] $\Delta_k(A) \neq 0 \quad \forall k \in [1,n]$

$P = (p_{ij})$, $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ $\quad B = AP \Rightarrow b_{ij} = \sum_{v=1}^{n} a_{iv} p_{vj}$ ⊛

Αν ο P είναι άνω τριγωνικός $[p_{vj} = 0$ αν $v > j]$

και $p_{vv} = 1$

Άρα η ⊛ γίνεται: $b_{ij} = a_{ij} + \sum_{v=1}^{j-1} a_{iv} p_{vj}$

Για να είναι ο B κάτω τριγωνικός, θα πρέπει (αν και μόνο αν)

$\sum_{v=1}^{j-1} a_{iv} p_{vj} + a_{ij} = 0$ για όλα τα $1 \le i \le j-1$ και $j \le n$

$$\Rightarrow \sum_{v=1}^{j-1} \underbrace{a_{iv}}_{\text{γνωστά}} \overbrace{p_{vj}}^{\text{άγνωστοι}} = \underbrace{-a_{ij}}_{\text{γνωστά}}$$

Αυτό όμως είναι ένα γραμμικό σύστημα!

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,j-1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j-1,1} & \dots & a_{j-1,j-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{1,j} \\ \vdots \\ p_{j-1,j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_{ij} \\ \vdots \\ -a_{ij} \end{pmatrix}$$

Αν το $\Delta_{j-1}(A)$ τότε όλα τα συστήματα έχουν μοναδικές λύσεις → υπολογίζουμε τον P.

Άρα ισχύει η 2η σχέση του λήμματος και έχω ότι ισχύει και η 1η.

Σελ. (4) → Η συνέχεια

4.12.2023

Αντίστροφως, αν ισχύει η $1^η$ σχέση

Γράφω τον $A = (a^1, \dots, a^n)$ οι στήλες του A, $(b^1, \dots, b^n) \to$ οι στήλες του B

και έτσι: $b^1 = a^1$

$$b^n = \sum_{j=1}^{r-1} P_{jr} a^j + a^r, \quad r>1$$

Δηλαδή, για ένα K: $1 \leq K \leq n$, K-σταθερό, έχουμε ότι η r-στήλη του

$\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1K} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{K1} & \cdots & b_{KK} \end{pmatrix}$ δίνεται προσθέτοντας στην a^r στήλη έναν γραμμικό συνδυασμό των άλλων στηλών.

Αυτός όμως είναι ένας στοιχειώδης μετασχηματισμός στηλών που δεν αλλοιώνει την ορίζουσα, άρα $\Delta_K(A) = \Delta_K(B) = b_{11} b_{22} \cdots b_{KK}$.

A αντιστρέψιμος

P αντιστρέψιμος (διότι είναι άνω τριγωνικός με μονάδες στη διαγώνιο $\to$ ορίζουσα $= 1$)

Άρα και ο B είναι αντιστρέψιμος, άρα $b_{11} \cdots b_{nn} = \det B \neq 0$

Άρα και $b_{11} \cdots b_{KK} \neq 0$

$\hookrightarrow = \Delta_K(A)$

ΟΠΟΤΕ, ΤΟ ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΤΗΣ ΘΕΤΙΚΟΤΗΤΑΣ:

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} f(x,y) = y^* A x \\ A^* = A \\ \Delta_K(A) > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Η } f \text{ είναι θετική}}$$

κάτω τριγωνικός × κάτω τριγωνικός = κάτω τριγωνικός

$\underset{\text{κάτω τριγ.}}{B} = A \underline{P} \to$ άνω τριγωνικός με 1 στην διαγώνιο $\to$ ο P^* είναι κάτω τριγωνικός $\to$ ο $P^* B = P^* A P$ είναι κάτω τριγωνικός και αυτοσυζυγής

$(P^* A P)^* = P^* A^* (P^*)^* = P^* A P$

Άρα είναι διαγώνιος! (το είχαμε αποδείξει)

Άρα $P^* A P = \Delta \to$ διαγώνιος

και $\Delta_K(D) = \Delta_K(P^* A) = \Delta_K(B) = \Delta_K(A)$

Συμπέρασμα: Αν $D = \mathrm{diag}(d_{11}, d_{22}, \dots, d_{nn})$, $\Delta_K(D) = d_{KK}$, $d_{KK} > 0 \Rightarrow d_{KK} > 0$

$\rightsquigarrow D = P^* A P$, $B' = \{v_1', \dots, v_n'\}$: $v_K' = \sum_{i=1}^{n} P_{ij} v_i$ (Αλλαγή βάσης)

ο πίνακας της f στη νέα βάση είναι ο D

δηλαδή $f(x,x) = x^* D x > 0$ γιατί έχω $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) D \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\overset{>0}{d_{ii}} x_i \bar{x}_i}_{\text{θετική μορφή}}$

4.12.2023

Άσκηση: Δείξτε ότι μια μιάμιση μορφή είναι Ερμητιανή αν και μόνο αν το $f(v,v) \in \mathbb{R}$ $\forall v \in V$.

$\rightsquigarrow$ $f(v,w) = \overline{f(w,v)} \Rightarrow f(v,v) = \overline{f(v,v)} \Rightarrow f(v,v) \in \mathbb{R}$ (Η μια κατεύθυνση)

$\rightsquigarrow$ Η ανάποδη: Έστω $f(v,v) \in \mathbb{R}$. Θα δείξουμε ότι $f(v,w) = \overline{f(w,v)}$ $\forall v \in V$:

(θέλει τρικ): $f(v,w) + f(w,v) = f(v+w, v+w) - f(v,v) - f(w,w) \in \mathbb{R}$

με όμοιο τρόπο: $-if(v,w) + if(w,v) = f(v+iw, v+iw) - f(v,v) - f(w,w)$

το ίδιο για iw αντί για w άρα $\in \mathbb{R}$ ✓

Από τα οποία παίρνω: $f(v,w) + f(w,v) = \overline{f(v,w)} + \overline{f(w,v)}$ ① (αφού είναι πραγματικό μπορώ να τραβήξω συζυγία)

και $-if(v,w) + if(w,v) = i\overline{f(v,w)} - i\overline{f(w,v)}$

$\downarrow$ πολλαπλασιάζω με i

$f(v,w) - f(w,v) = -\overline{f(v,w)} + \overline{f(w,v)}$

$\downarrow$ την προσθέτω με την ①

$2f(v,w) = 2\overline{f(w,v)} \Rightarrow f(v,w) = \overline{f(w,v)}$ ▨

Άσκηση: f είναι $1\frac{1}{2}$ μορφή σε πεπ. διάστασης δ.χ. με εσωτερικό γινόμενο. Δείξτε ότι $\exists$ ορθοκανονική βάση στην οποία ο πίνακας της f να είναι άνω τριγωνικός.

$\rightsquigarrow$ $f(v,w) = (L_f v, w)$

Γνωρίζω ότι $\exists$ ορθοκανονική βάση $B = \{e_1, \dots, e_n\}$: (L, B, B) να είναι άνω τριγωνικός

αυτό το γνωρίζω για κάθε πίνακα

$a_{ji} = f(e_i, e_j) = \langle Le_i, e_j \rangle = (L, B, B)$ άνω τριγωνικός

ο πίνακας της γρ. απ.

ορθοκ/κή βάση

$\downarrow$

Γενικά $Le_i = \sum_{v=1}^{n} b_{vi} e_v$ $\quad L = (e_{ij})$

$\langle Le_i, e_j \rangle = b_{ji}$ γιατί

$\langle \sum_{v=1}^{n} b_{vi} e_v, e_j \rangle = \sum_{v=1}^{n} b_{vi} \delta_{vj} = b_{ji}$