$1\frac{1}{2}$ μορφές $\leftrightarrow$ εσωτερικά γινόμενα.

Διγραμμικές μορφές $\to$ $\mathbb{R}$: Η θεωρία ταυτίζεται με τις $1\frac{1}{2}$ μορφές

Διγραμμικές μορφές $\to$ $\mathbb{C}$: διαφορετικό.

$f: V\times V \to \mathbb{F}$

$f(\lambda v_1+\mu v_2, w) = \lambda f(v_1,w) + \mu f(v_2,w)$

$f(v,\lambda w_1 + \mu w_2) = \lambda f(v,w_1) + \mu f(v,w_2)$

$L_1 L_2 \in V^* = \mathrm{Hom}(V,\mathbb{F}) \to$ γραμμικές συναρτήσεις $V \to \mathbb{F}$

$f: V\times V \to \mathbb{F}$

$(v,w) \to L_1(v)L_2(w)$ είναι διγραμμική

πχ) $f(\lambda v_1+\mu v_2, w) = L_1(\lambda v_1 + \mu w_2)L_2(w) = (\lambda L_1(v_1)+\mu L_1(v_2))L_2(w)$

$= \lambda L_1(v_1)L_2(w) + \mu L_1(v_2)L_2(w) = \lambda f(v_1,w) + \mu f(v_2,w)$

- $B = \{v_1,\dots,v_n\}$

$v = x_1v_1 + \dots + x_nv_n \longrightarrow [v]_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$w = y_1v_1 + \dots + y_nv_n \longrightarrow [w]_B = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

$f(v,w) = [v]_B^t A [w]_B$

$A(a_{ij}) \to a_{ij} = f(v_i,v_j)$,

$A = [f]_B$.

$f(v,w) = f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i v_i, \sum_{j=1}^{n} y_j v_j\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_j f(v_i,v_j)$

Ο χώρος των διγραμμικών μορφών $L(V,V,\mathbb{F})$ είναι διανυσματικός χώρος

$f_1(\cdot,\cdot), f_2(\cdot,\cdot) \to (f_1+f_2)(v,w) = f_1(v,w) + f_2(v,w)$

$\to (\lambda f_1)(v,w) = \lambda f_1(v,w)$.

$\rightsquigarrow$ $L(V,V,\mathbb{F}) \longrightarrow \mathbb{F}^{n,n}$

$f \longrightarrow [f]_B$

- γραμμική: $[\lambda f_1 + \mu f_2]_B = \lambda [f_1]_B + \mu [f_2]_B$
- $f \xrightarrow{1-1}$ μονοσήμαντα $[f]_B$
- $\underset{n\times n}{A\in\mathbb{F}^{n,n}} \longrightarrow f_A(v,w) = [v]_B^t A [w]_B$ (επί)

Η διάσταση του χώρου των διγραμ. μορφών:

$$\dim L(V,V,\mathbb{F}) = n^2$$

Μπορούμε να φτιάξουμε μια βάση:

$V^* = Hom(V,\mathbb{F})$ και μια βάση $v_1,\dots,v_n$ του V

$v_1^*,\dots,v_n^*$ του V^*

γραμμικές συναρτήσεις. $V \to \mathbb{F}$

$V_i^*(v_j) = \delta_{ij}$

Αυτή η βάση είναι φτιαγμένη ώστε να ισχυει:

$V \ni v = \sum_{i=1}^{n} v_i^*(v)v_i$ → γιατί; $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$

$$v_i^*(v) = v_i^*(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n)$$

$$= \lambda_1 v_i^*(v_1) + \dots + \lambda_n v_i^*(v_n) = \lambda_i$$

(έτσι κατασκευάσαμε την δυική βάση)

Και η

$f_{ij}(v,w) = v_i^*(v)v_j^*(w)$ → τετραγωνική μορφή

γινόμενο 2 στοιχείων $L_1, L_2 \in V^*$ → δυικός χώρος.

Αν έχουμε οποιαδήποτε τετραγωνική μορφή f, $a_{ij} = f(v_i,v_j)$

Πως θα το δείξουμε αυτό;

$$f_A(v,w) = [v]_B^t A[w]_B$$

$$= (x_1,\dots,x_n)A\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j a_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j a_{ij} f_{ij}$$

$$A = \sum_{i,j} a_{ij} E_{ij}$$

P πίνακας αλλαγής βάσης.

$$[v]_B = P[v]_{B'}$$

$f(v,w) = [v]_B^t \cdot [f]_B [w]_B \xrightarrow{\text{έχουμε}} [w]_B = P[w]_{B'}$, $[v]_B = P[v]_{B'}$ $\Rightarrow [v]_B^t = (P[v]_{B'})^t = [v]_{B'}^t P^t$

$$= [v]_{B'}^t P[f]_B P[w]_{B'}$$

$$[f]_{B'}$$

$v \in V$ το οποίο σταθεροποιώ.

Τότε η διγρ. μορφή μας δίνει: $V^* = V \to \mathbb{F}$
$w \to f(v,w)$

$V \to V^*$
$v \to L_f(v) : V \to \mathbb{F}$
$= f(v,\cdot)$ → έτοιμη να δεχτεί όρισμα

Ομοίως, αν σταθεροποιήσουμε $w \in V$:

$V \to V^*$
$w \to R_f(w) = f(\cdot, w)$

ΟΡΙΣΜΟΣ $r(L_f)$ → Η τάξη της απεικόνισης $= \dim \operatorname{Im} L_f$.
$\| \; r(R_f) = \dim \operatorname{Im} R_f$
$\Rightarrow r(A)$ Η τάξη της f.

Αρκεί νδο $\dim \ker L_f = \dim \ker R_f$:

$L_f : V \to V^*$
$R_f : V \to V^*$
$\Big\} \; n = \dim V = \dim \ker \underset{R_f}{L_f} + \dim \operatorname{Im} \underset{R_f}{L_f}$

Έστω $v \in \ker L_f$

$V^* \ni L_f(v)$ είναι η μηδενική συνάρτηση $V \to \mathbb{F}$

$[v]^t A [w]_B = 0 \quad \forall w \in V \Rightarrow [v]_B^t A = 0_{n \times n} \Rightarrow A^t [v]_B = 0 \Rightarrow v \in \ker A^t$

όμοια:

$w \in \ker R_f \quad f(v,w) = 0 \in V^*$

$[v]_B^t A [w]_B = 0 \quad \forall v \in V^*$

$A[w]_B = 0_{n,n} \Rightarrow [w]_B \in \ker A$

$\left.\begin{array}{l} \dim \ker L_f = \dim \ker A^t \\ \dim \ker R_f = \dim \ker A \end{array}\right\} \xrightarrow{r(A^t) = r(A)} n = \ker A^t + r(A^t) = \ker(A) + r(A)$

6.12.23

- $f: V\times V \to \mathbb{F}$ διγραμμική, ισχύουν τα εξής:

1] $r(f)=n$
2] $\forall v\neq 0,\ v\in V : \exists w\ f(v,w)\neq 0$
3] $\forall w\neq 0,\ w\in V : \exists v\ f(v,w)\neq 0$

} μη-ομοιόμορφες διγραμμικές.

- Μια διγραμμική μορφή θα λέγεται συμμετρική αν

$$f(v,w) = f(w,v)\quad \forall v,w$$

H f συμμετρική $\Leftrightarrow [f]_B = [f]_B^t$

γιατί

$$f(v_i,v_j) = a_{ij}$$
$$f(v_j,v_i) = a_{ji}$$

- Συμμετρική $f: V\times V \to \mathbb{F}$

$q(v)$ τετραγωνική μορφή

$$q(v) = f(v,v) = [v]_B^t\, A\, [v]_B = \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j$$

ισχύει:

$$f(v,w) = \frac{1}{4} q(v+w) - \frac{1}{4} q(v-w) \to$$ Η τετραγωνική μορφή γνωρίζει την διγραμμική

ΘΕΩΡΗΜΑ: V δ.χ. $\mathbb{F}$, υπάρχει βάση ώστε $[f]_B$ να είναι διαγώνιος

Ψάχνουμε για διατ. βάση $B=\{v_1,\dots,v_n\}$

$f(v_i,v_j)=0$ αν $i\neq j$

Αν $f=0$ τετριμμένο

$\dim V = 1$ — " —

$\dim V \geq 2$

$f\neq 0$ υπάρχει ένα v $f(v,v)\neq 0$

$W = \langle v \rangle$

$W^\perp = \{w\in W : f(v,w)=0\}$

$V = W \oplus W^\perp$

$W\cap W^\perp \{0\}$

$\lambda v \quad \lambda\in\mathbb{F}$

αν $\lambda v\in W^\perp$

$f(\lambda v,\lambda v)=0$

$\lambda^2 f(v,v)\neq 0 \Rightarrow \lambda = 0$

αρκεί $w \in V$ $\quad w = \underset{\hat{W}}{a} + \underset{\hat{W}}{b}$

$$w_1 = w - \frac{f(w,v)}{f(v,v)} v$$

$w \in W^{\perp}$

$$f(v,w_1) = f\left(v, w - \frac{f(w,v)}{f(v,v)} v\right) = f(v,w) - \frac{f(w,v)}{\cancel{f(v,v)}} \cancel{f(v,v)} = 0$$

$\frac{f(w,v)}{f(v,v)} \in \mathbb{F}$

$$\underset{n}{V} = \overset{\dim W = 1}{W} \oplus \underset{\dim W^{\perp} = n-1}{W^{\perp}}$$

$f|_{W^{\perp}}$ είναι συμμετρική διγραμμική

Επαγωγή

$\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$ $\quad f(v_i, v_j) = 0, \; i \neq j$

$\{v_1, \dots, v_{n-1}, v_n\} \to f(v_i, v_j) = 0$ όταν $0 \leq i,j \leq n-1$ επαγωγική υπόθεση

$f(v_i, v_n) = 0 \quad 1 \leq i \leq n-1$ αφού $v_1, \dots, v_n \in W^{\perp}$.

Πόρισμα ①

V δ.χ. $\mathbb{C}$

τότε υπάρχει διατεταγμένη βάση $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ ώστε (f συμμετρική)

$$\left.\begin{array}{ll} f(v_i, v_i) = 1 & 1 \leq i \leq r(f) \\ f(v_i, v_j) = 0 & \text{διαφορετικά} \end{array}\right\} [f]_B = \begin{pmatrix} \begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Αρχική βάση: $\{v_1, \dots, v_n\}$ ώστε $[f]_B$ διαγώνιος
  $f(v_i, v_i) \in \mathbb{F}$
- Διαλέγουμε (αναδιατάσσοντας τη βάση) τα $v_1, \dots, v_r$ ώστε $f(v_i, v_i) \neq 0 \quad 1 \leq i \leq r$ εν οπότε όλα τα υπόλοιπα είναι μηδενικά: $f(v_i, v_i) = 0 \quad i > r$
- $v_i' = \dfrac{v_i}{\sqrt{f(v_i, v_i)}} \quad 1 \leq i \leq r$

$B_1 = \{v_1', \dots, v_r', v_{r+1}, \dots, v_n\} \to f(v_i', v_i') = f\left(\frac{v_i}{\sqrt{f(v_i,v_i)}}, \frac{v_i}{\sqrt{f(v_i,v_i)}}\right) = \frac{1}{f(v_i,v_i)} \Rightarrow f(v_i, v_i) = 1$

Αν τωρα V δχ. $\underline{\mathbb{R}}$. $\sqrt{a} \notin \mathbb{R}$ 6.12.2023

τοτε $\exists$ βάση $B = \{v_1, \dots, v_r, \dots, v_n\}$

$f(v_i, v_j) = 0, \quad i \neq j$

$f(v_i, v_i) = \pm 1, \quad 1 \leq i \leq r$

Διαλέγω βάση ωστε $[f]_B$ διαγώνιος

$f(v_i, v_i) \neq 0 \qquad 1 \leq i \leq r$

$v_i' = |f(v_i, v_i)|^{-1/2} v_i \qquad 1 \leq i \leq r$

πχ) $\left.\begin{array}{l} f(v_1, v_1) = 5 \\ f(v_2, v_2) = -3 \\ f(v_3, v_3) = -2 \end{array}\right\}$ $v_1' = \dfrac{v_1}{\sqrt{5}}, \quad v_2' = -\dfrac{v_2}{\sqrt{3}}$ ...

Ισχύει το εξής:

Το πλήθος p των διανυσμάτων v_i $1 \leq i \leq r$ έτσι ωστε $f(v_i, v_i) = 1$ είναι ανεξάρτητο της βάσης με αυτή την ιδιότητα.

<u>Απόδειξη</u>

Έστω ότι καταλήγουμε σε μια βάση $\{v_1, \dots, v_n\}$: $[f]_B = \left(\begin{array}{ccc|c} \pm 1 & & & \\ & \pm 1 \ddots & & 0 \\ & & \pm 1 & \\ \hline & 0 & & 0 \end{array}\right)$

Θεωρούμε $V^+ = \{v_i : [f(v_i, v_i) > 0] \text{ και } f(v_i, v_i) = 1\}$

$V^- = \{v_i : [f(v_i, v_i) \leq 0] \text{ και } f(v_i, v_i) = -1\}$

$V^0 = \{v_i : f(v_i, v_i) = 0\}$

$p = \dim V^+$

$V = V^+ \oplus V^- \oplus V^0$

Έστω $W \subset V$ ώστε $f(w, w) > 0 \ \forall w \in W$ και $f(w, w) = 0 \Leftrightarrow w = 0$

$w + v^- + v^0 = 0 \qquad w \in W, \ v^- \in V^-, \ v^0 \in V^0$

τοτε $w = v^- = v^0 = 0$,

γιατί;?

$0 = f(w^+, w^+, v^-, v^0) = f(w^+, w^+) + f(w^+, v^-) + f(\cancel{w^+, v^0})^{\nearrow 0}$

$w = \sum \lambda_i v_i$

$0 = f(v^-, w^+ + v^- + v^0) = f(v^-, w^+) + f(v^-, v^-) + \cancel{f(v^-, v^0)}^{\,0}$ 6.12.2023

Αφού f συμμετρική $f(v^-, w^+) = f(w^+, v^-)$

$\Downarrow$

$0 \leq f(w^+, w^+) = f(v^-, v^-) \leq 0 \Rightarrow f(w^+, w^+) = 0 = f(v^-, v^-)$

$\Rightarrow \quad w^+ = 0 \;,\; v^- = 0 \Rightarrow v^0 = 0$

Άρα το W περιέχεται στο V^+ και $\dim W \leq \dim V^+$

δίνει το ζητούμενο.

$L : V \to V$ κανονική συνάρτηση: $LL^* = L^*L$ $\mathbb{F} = \mathbb{C}$

$L^* = L$ $\mathbb{F} = \mathbb{R}$

και $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ $k \leq n$ είναι το σύνολο των διαφορετικών ανά 2 ιδιοτιμών.

E_i = ιδιόχωρος της λ_i , $V = \underbrace{E_1}_{\{v_1^{(1)}, \dots, v_{\lambda_1}^{(1)}\}} \oplus \dots \oplus \underbrace{E_k}_{\{v_1^{(k)}, \dots, v_{\lambda(k)}^{(k)}\}}$ (διότι L διαγωνοποιήσιμη)

$\{v_1^{(1)}, \dots, v_{\lambda_1}^{(1)}\} \to$ βάση του E_1

$\{v_1^{(k)}, \dots, v_{\lambda(k)}^{(k)}\}$ βάση E_k

$\Pi_i : V \to V$ (προβολή)

$\operatorname{Im} \Pi_i = E_i$

$\Downarrow$

$$\left.\begin{array}{l} \Pi_i (v_v^{(j)}) = \begin{cases} v_v^{(j)} & j = i \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases} \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \Pi_i|_{E_j} = 0 \quad j \neq i \\ \Pi_i|_{E_i} = Id_{E_i} \end{array}$$

- $\Pi_i \circ \Pi_j = \Pi_j \circ \Pi_i = \delta_{ij} \Pi_i$ $\leadsto$ $V \xrightarrow{\Pi_j} E_j \xrightarrow{\Pi_i} 0$, $j \neq i$, $\Pi_i \circ \Pi_j$
- $\Pi_i \circ \Pi_i = \Pi_i$

$\leadsto Id_V = \Pi_1 + \dots + \Pi_k$

↳ γιατί; διότι αν πάρω $v_i^{(j)} \in$ Βάση
τότε $(\Pi_1 + \dots + \Pi_k)(v_i^{(j)}) = v_i^{(j)}$

Αυτό μας επιτρέπει: $L = L \circ Id_V = L(\Pi_1 + \dots + \Pi_k) =$

$L \circ \Pi_1 + L \circ \Pi_2 + \dots + L \circ \Pi_k = \lambda_1 \Pi_1 + \dots + \lambda_k \Pi_k$ "φασματική ανάλυση"

(ένας άλλος τρόπος να γράψω την διαγωνοποίηση)

$\longrightarrow$

6.12.23

$$P_i(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} \frac{(x-\lambda_j)}{(\lambda_i - \lambda_j)}$$ πολυώνυμο στο $\mathbb{F}[x]$

$P_i(\lambda) = \Pi_i$

$\delta_{ij}\Pi_i = \Pi_i \circ \Pi_j$

$L^2 = (\lambda_1 \Pi_1 + \dots + \lambda_k \Pi_k)(\lambda_1 \Pi_1 + \dots + \lambda_k \Pi_k) =$

$= \lambda_1^2 \Pi_1 + \dots + \lambda_k^2 \Pi_k$

$\Rightarrow L^n = \lambda_1^n \Pi_1 + \dots + \lambda_k^n \Pi_k$

$\Rightarrow f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$

$f(L) = f(\lambda_1 \Pi_1) + \dots + f(\lambda_k \Pi_k)$

$P_i(L) = P_i(\lambda_1)\Pi_1 + \dots + P_i(\lambda_k)\Pi_k = \Pi_i$

$$P_i(\lambda_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$$