Εξετάσεις Γραμμικής Άλγεβρας ΙΙ
10 Σεπτεμβρίου 2024

(1) Να μελετηθεί για $a, b, c, d, k \in \mathbb{R}$ ως προς την διαγωνισιμότητα ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ b & d & 2 & 0 \\ c & e & k & 3 \end{pmatrix}$$

2 μονάδες

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα (είναι διαγώνιος και υπολογίζεται εύκολα) είναι το

$$(x-1)^2(x-2)(x-3)$$

Ο πίνακας είναι διαγωνοποιήσιμος αν για κάθε ιδιοτιμή ρ_i που εμφανίζεται ως ρίζα πολλαπλότητας k_i ο αντίστοιχος ιδιόχωρος έχει διάσταση k_i. Οι ιδιοτιμές $2, 3$ εμφανίζονται με πολλαπλότητα 1 και ο αντίστοιχος ιδιόχωρος έχει διάσταση 1, οπότε δεν αποτελούν πρόβλημα στην διαγωνοποίηση.

Η ιδιοτιμή 1 εμφανίζεται με πολλαπλότητα 2 και πρέπει να μελετήσουμε την διάσταση του αντίστοιχου υπόχωρου, δηλαδή τις λύσεις του συστήματος

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ b & d & 1 & 0 \\ c & e & k & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι ο πίνακας αυτός έχει τάξη 2 αν $a = 0$, οπότε ο πυρήνας έχει διάσταση 2 και ο πίνακας είναι διαγωνοποιήσιμος ή έχει τάξη 3 αν $a \neq 0$, οπότε ο πυρήνας (που ταυτίζεται με τον ιδιόχωρο της ιδιοτιμής 1) έχει διάσταση 1 και ο πίνακας δεν είναι διαγωνοποιήσιμος.

(2) Έστω $f : E \to E$, διαγωνοποίησιμη γραμμική συνάρτηση, όπου E πεπερασμένης διάστασης διανυσματικός χώρος, ώστε $f^3 = f^2$ να δειχθεί ότι $f^3 = f$. **2 μονάδες**

Αφού ο f μηδενίζει το πολυώνυμο $x^3 - x^2 = x^2(x-1)$, έχουμε ότι το ελάχιστο πολυώνυμο είναι διαιρέτης του $x^2(x-1)$. Το ότι το f είναι διαγωνοποιήσιμο επιβάλει στο ελάχιστο πολυώνυμο του να έχει απλές ρίζες. Άρα το ελάχιστο πολυώνυμο μπορεί να είναι το x ή το $x-1$ ή το $x(x-1)$. Δηλαδή έχουμε αντίστοιχα τις περιπτώσεις $f = 0$ ή $f = I_E$, ή $f^2 = f$. Σε κάθε μία από τις περιπτώσεις αυτές ισχύει ότι $f^3 = f$.

(3) Δείξτε ότι ιδιοδιανυσματα u, v που αντιστοιχουν σε διαφορετικες ιδιοτιμές είναι γραμμικα ανεξάρτητα. **1 μονάδα**

Ας υποθέσουμε ότι τα ιδιοδιανύσματα u, v ικανοποιούν μία σχέση

$$\lambda u + \mu v = 0 \tag{1}$$

και ας εφαρμόσουμε την σχέση $f(u) = ku$, $f(v) = k'v$ για να πάρουμε

$$0 = f(0) = f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v) = \lambda k u + \mu k' v. \tag{2}$$

Πολλαπλασιάζουμε την σχέση (1) με k και αφαιρούμε από την (2) για να πάρουμε:

$$\mu(k' - k)v = 0$$

Αφού το v είναι ιδιοδιάνυσμα είναι $v \neq 0$ συνεπώς έχουμε από την παραπάνω σχέση ότι $\mu(k' - k) = 0$ και τελικά έχουμε ότι $\mu = 0$ αφού $k \neq k'$. Επιστρέφουμε στην σχέση (1) με $\mu = 0$ για να καταλλήξουμε (αφού $u \neq 0$) στο ότι $\lambda = 0$, άρα τα u, v είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

(4) Έστω $V, \langle\cdot,\cdot\rangle$ χώρος με πραγματικό εσωτερικό γινόμενο και $f : V \to V$ γραμμική απεικόνιση τέτοια ώστε $|f(x)| = |x|$ για κάθε $x \in V$. Να δειχθεί ότι αν $\{v_1, v_2 \cdots, v_n\}$ είναι ορθοκανονική βάση του V τότε η $\{f(v_1), f(v_2) \cdots, f(v_n)\}$ είναι ορθοκανονική βάση. **2 μονάδες**

Είναι σαφές ότι
$$|f(v_i)| = v_i = 1, \text{ για κάθε } 1 \leqslant i \leqslant n.$$
Αρκεί να δείξουμε ότι
$$\langle f(v_i), f(v_j)\rangle = 0 \text{ για κάθε } 1 \leqslant i, j \leqslant n, i \neq j.$$
Υπολογίζουμε
$$\begin{aligned}|f(v_i + v_j, v_i + v_j)|^2 &= \langle f(v_i) + f(v_j), f(v_i) + f(v_j)\rangle \\ &= \langle f(v_i), f(v_i)\rangle + \langle f(v_i), f(v_j)\rangle + \langle f(v_j), f(v_i)\rangle + \langle f(v_j), f(v_j)\rangle\end{aligned}$$
Από την άλλη η παραπάνω ποσότητα είναι ίση με
$$|v_i + v_j|^2 = \langle (v_i) + (v_j), (v_i) + (v_j)\rangle = \langle (v_i), (v_i)\rangle + \langle (v_i), (v_j)\rangle + \langle (v_j), (v_i)\rangle + \langle (v_j), (v_j)\rangle$$
Οπότε αφαιρώντας κατά μέλη και χρησιμοποιόντας ότι $\langle f(v_i), f(v_i)\rangle = \langle v_i, v_i\rangle$, $\langle f(v_j), f(v_j)\rangle = \langle v_i, v_i\rangle$ καταλλήγουμε στο
$$0 = \langle f(v_i), f(v_j)\rangle + \langle f(v_j), f(v_i)\rangle - \langle v_i, v_j\rangle - \langle v_j, v_i\rangle = \langle f(v_i), f(v_j)\rangle + \langle f(v_j), f(v_i)\rangle,$$
αφού $\langle v_i, v_j\rangle = 0$ για $i \neq j$. Από την άλλη επειδή το εσωτερικό γινόμενο είναι πραγματικό έχουμε $\langle f(v_i), f(v_j)\rangle = \langle f(v_j), f(v_i)\rangle$ και καταλλήγουμε στο
$$2\langle f(v_i), f(v_j)\rangle + = 0 \Rightarrow \langle f(v_i), f(v_j)\rangle = 0.$$

(5) Δείξτε ότι ένας ερμητιανός πίνακας έχει πραγματικές ιδιοτιμές. **1 μονάδα**

Ένας πίνακας είναι ερμητιανός αν $A = A^*$. Για ένα ιδιοδιάνυσμα v με ιδιοτιμή λ υπολογίζουμε
$$\lambda\langle v, v\rangle = \langle \lambda v, v\rangle = \langle Av, v\rangle = \langle v, A^*v\rangle = \langle v, Av\rangle = \langle v, \lambda v\rangle = \overline{\lambda}\langle v, v\rangle.$$
Το ζητούμενο προκύπτει από το ότι $v \neq 0$ άρα $\langle v, v\rangle = |v|^2 \neq 0$.

(6) Έστω $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ερμητιανός πίνακας με ιδιοτιμές $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Να δειχθεί ότι
$$\sum_1^n \lambda_i^2 = \sum_{i,j} |a_{ij}^2|$$
2 μονάδες

Γνωρίζουμε ότι ο πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος ως ερμητιανός. Άρα για κατάλληλο αντιστρέψιμο πίνακα Q έχουμε
$$QAQ^{-1} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$
Υπολογίζουμε ότι
$$\mathrm{tr}(AA^*) = \mathrm{tr}(AA)\mathrm{tr}(QAQ^{-1}QAQ^{-1}) = \mathrm{tr}(\mathrm{diag}(\lambda_1^2, \ldots, \lambda_n^2)) = \sum_i \lambda_i^2.$$
Από την άλλη ο πίνακας $AA^* = B = (b_{ij})$, έχει ως στοιχεία
$$b_{ij} = \sum_v a_{iv} a_{v,j}^* = a_{i,v}\overline{a_{j,v}},$$
αφού $A^* = \overline{A}^t$. Δηλαδή
$$\mathrm{tr}(AA^*) = \mathrm{tr}(B) = \sum_{\mu=1}^n b_{\mu\mu} = \sum_{\mu,v} a_{iv}\overline{a_{iv}}.$$
Το ζητούμενο προκύπτει από το ότι
$$a_{iv}\overline{a_{iv}} = |a_{iv}|^2 = |a_{iv}^2|.$$

(7) Έστω $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Ένας πίνακας λέγεται μηδενοδύναμος αν υπάρχει κ φυσικός αριθμός τέτοιος ώστε $A^{\kappa} = 0$. Να δειχθεί ο A είναι μηδενοδύναμος αν και μόνο εάν είναι όμοιος με πίνακα άνω τριγωνικό με μηδενικά τα στοιχεία της διαγωνίου. **2 μονάδες**

Αν ένας πίνακας είναι μηδενοδύναμος δηλαδή $A^{\kappa} = 0$ τότε το ελάχιστο πολυώνυμο του είναι διαιρέτης του x^{κ} και αφού κάθε ιδιοτιμή είναι ρίζα του ελαχίστου πολυωνύμου η μοναδική ιδιοτιμή του A είναι η μηδενική. Είναι γνωστό ότι κάθε πίνακας στους μιγαδικούς αριθμούς είναι όμοιος με άνω τριγωνικό πίνακα. Οι ιδιοτιμές του άνω τριγωνικού πίνακα αυτού είναι ίδιες με τα στοιχεία της διαγωνίου και είναι όλες μηδενικές.

Αντιστρόφως, ένας άνω τριγωνικός πίνακας με μηδενικές ιδιοτιμές έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο x^{n}, και το θεώρημα Caley-Hamilton εξασφαλίζει ότι $A^{n} = 0$, άρα ο A είναι μηδενοδύναμος.

Για το «Άριστα» απαιτούνται 10 μονάδες
Διάρκεια εξέτασης 1 ώρα 45 λεπτά