ΓΕΩΜΕΤΡΙΕΣ ΤΟΥ KLEIN

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΡΩΤΟ: Βασικές έννοιες και πρώτα συμπεράσματα

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1. Μετά την αξιωματικοποίηση (:θεωρητικοποίηση) και την αλγ
βροποίηση της Γεωμετρίας, η άποψη που αποδίδεται στον Kle
(1849-1925) αποτελεί την τρίτη "επαναστατική" ιδέα για τη Γεωμ
τρία. Χωρίς αυστηρότητα θα λέγαμε ότι κατά την άποψη του Kle
μια "Γεωμετρία" χαρακτηρίζεται από τους "μετασχηματισμούς"
που "επιτρέπει" πάνω στο σύνολο που ορίζεται. Ένα, βασικό για τα
σύγχρονα Μαθηματικά, πλεονέκτημα της άποψης του Klein είνα
ότι οι "Γεωμετρίες Klein" δεν προϋποθέτουν οποιοδήποτε είδος "εποπτεί

Για να γίνουμε πιο ακριβείς, χρειαζόμαστε το συμβολισμό που ακολουθεί
Έστω $X \neq \phi$. Όπως είναι γνωστό, το σύνολο

$$B(X)=\{f:X\to X \ : \text{η } f \text{ είναι "1-1" και "επί"}\}$$

εφοδιασμένο με την πράξη της σύνθεσης απεικονίσεων αποτελεί ομ
δα. Σε κάθε υποομάδα, G, της ομάδας $(B(X), \circ)$ αντιστοιχεί το ζ
γάρι (G,X), που λέγεται Γεωμετρία Klein (Γ.Κ.) που ορίζεται στ
σύνολο X από την ομάδα G. (Τα στοιχεία της ομάδας G είνα
οι "μετασχηματισμοί" που "επιτρέπει" η Γ.Κ. (G,X) πάνω στο X.)

Ο βασικός προβληματισμός της Γ.Κ. (G,X), που πρέπει να ενσωμα
τωθεί στον ορισμό της (!), είναι ο εξής: να μελετηθούν εκείνες οι
ιδιότητες των υποσυνόλων του X, που παραμένουν αναλλοίωτες ω
προς (τα στοιχεία της) G. Μια ιδιότητα "J" ενός υποσυνόλου A του X
"παραμένει αναλλοίωτη ως προς G", αν το $f(A)$ έχει την ιδιότητα "J" γι
κάθε $f \in G$. Τα υποσύνολα του X νοούνται ως "σχήματα" για τη Γ.Κ. $(G,$

2. Όπως θα δούμε, μια από τις πιο ενδιαφέρουσες ειδικές περιπτώ
σεις Γ.Κ. είναι εκείνες που αναφέρονται σ' ένα σύνολο X εφοδιασμ
νο με μια μετρική $d: X \times X \to \mathbb{R}^+$, η οποία (όπως είναι γνωστό) χα

τηρίζεται από τις επόμενες τρεις απαιτήσεις:

$$\left.\begin{array}{l}(1)\ d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y\\ (2)\ d(x,y)=d(y,x)\\ (3)\ d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y)\end{array}\right\}\ \forall\ x,y,z\in X.$$

ζευγάρι (X,d) λέγεται μετρικός χώρος. Όταν θεωρούμε το X ως ικό χώρο, μας ενδιαφέρουν κυρίως εκείνες από τις απεικονίσεις $\to X$, που "διατηρούν τη μετρική", δηλαδή οι "ισομετρίες".

$f: X\to X$ λέγεται ισομετρία, αν ισχύει $d(x,y)=d(f(x),f(y))$ για κάθε $x,y\in X$, δή αν η "απόσταση" των εικόνων δυο σημείων ισούται με την "απόσταση" των προτύπων. Μια ισομετρία $f: X\to X'$ ανάμεσα στους μετρικούς χώρους (X,d) και (X',d') ορίζεται από απαίτηση να ισχύει $d(x,y)=d'(f(x),f(y))$.

ταση. Έστω (X,d) ένας μετρικός χώρος. Τότε:

Μια ισομετρία $f: X\to X$ δεν είναι απαραίτητο να είναι "επί", ενώ αι πάντα "1-1".

Το σύνολο $I_d(X)=\{f: X\to X : η\ f\ είναι\ ισομετρία\ και\ "επί"\}$ αι υποομάδα της $(B(X),\circ)$ (πρβλ. 1).

όδειξη. (α) Για την απόδειξη του πρώτου ισχυρισμού, θεωρούμε το εξής ράδειγμα: $X=(0,+\infty)\subset\mathbb{R}$; $d(x,y)=|x-y|\ \forall\ x,y\in X$ και $f: X\to X$ με $)=x+1$. Είναι προφανές ότι η f είναι ισομετρία ως προς d και ότι ισχύει $()=(1,+\infty)\subsetneqq X$. Επομένως, η f δεν είναι "επί".

Για την απόδειξη του δεύτερου ισχυρισμού, υποθέτουμε ότι ισχύει $f(x)=$ $y)$ και θ' αποδείξουμε ότι ισχύει $x=y$, δηλαδή ότι ισχύει $d(x,y)=0$ (πρβλ. (1)):

$$d(x,y)\underset{f\ ισομ.}{=}d(f(x),f(y))=0.$$

Επειδή κάθε ισομετρία είναι "1-1", ισχύει $I_d(X)\subset B(X)$. Αρκεί, πόν, ν' αποδείξουμε ότι το $I_d(X)$ είναι "κλειστό" ως προς την πράξη σύνδεσης απεικονίσεων και ότι αν $f\in I_d(X)$, τότε $f^{-1}\in I_d(X)$:

Έστω $f,g\in I_d(X)$. Τότε:

$$d(f\circ g(x),f\circ g(y))=d(f(g(x)),f(g(y)))\underset{f\ ισομ.}{=}d(g(x),g(y))\underset{g\ ισομ.}{=}d(x,y).$$

Επομένως $f\circ g\in I_d(X)$, αφού η σύνδεση δυο "επί" απεικονίσεων είναι "επί".

Έστω $f\in I_d(X)$. Τότε:

$$d(f^{-1}(x),f^{-1}(y))\underset{f\ ισομ.}{=}d(f(f^{-1}(x)),f(f^{-1}(y)))=d(x,y).$$

Άρα $f^{-1}\in I_d(X)$. ∎

Από τη στιγμή που η $(I_d(X),\circ)$ είναι υποομάδα της $(B(X),\circ)$, ορίζεται η Γ.Κ. $(I_d(X),X)$ με βασικό προβληματισμό να μελετηθούν οι ιδιότητες των υποσυνόλων του X, που "παραμένουν αναλλοίωτες ως προς τις ισομετρίες του μετρικού χώρου (X,d)". Γι' αυτό, η θεωρία που αντιστοιχεί στη Γ.Κ. $(I_d(X),X)$ δεν είναι άλλη από τη θεωρία του μετρικού χώρου (X,d).

3. Ακολουθούν μερικά παραδείγματα Γ.Κ. με γενικότερο ενδιαφέρον:

$\boxed{3.1.}$ Αν λάβουμε υπόψη μας ότι στη γνωστή μας Ευκλείδεια Γεωμετρία δυο τρίγωνα είναι ίσα αν έχουν τις πλευρές τους ανά δυο ίσες και, επιπλέον, ότι όλες οι ιδιότητες των "ευθυγράμμων σχημάτων" και των κύκλων που μας απασχολούσαν ήταν ιδιότητες αναλλοίωτες ως προς τις ισομετρίες του $\mathbb{R}^2$, που αντιστοιχούν στην "Ευκλείδεια μετρική", d_E, με τύπο

$$d_E((x_1,y_1),(x_2,y_2))=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2},$$

αν, λοιπόν, λάβουμε υπόψη μας αυτά, διαπιστώνουμε ότι η γνωστή μας Ευκλείδεια Γεωμετρία του Επιπέδου είναι η Γ.Κ. $(I_{d_E}(\mathbb{R}^2),\mathbb{R}^2)$! Λεπτομέρειες της Γ.Κ. αυτής θα μας απασχολήσουν στη συνέχεια.

$\boxed{3.2.}$ Έστω X ένας τοπολογικός χώρος και $H(X)$ το σύνολο των ομοιομορφισμών του X, δηλαδή:

$$H(X)=\{f: X\to X : η\ f\ είναι\ "1\text{-}1"\ και\ "επί",\ ενώ\ οι\ f\ και\ f^{-1}\ είναι\ συνεχείς\}.$$

Είναι εύκολο να διαπιστωθεί ότι η $(H(X),\circ)$ είναι υποομάδα της $(B(X),\circ)$. Ορίζεται, επομένως, η Γ.Κ. $(H(X),X)$, η μελέτη της οποίας αντιστοιχεί στη

ρούμε ότι (επειδή ισχύουν τα (γ) και (δ) για την $\mathcal{E}$, άρα και για την τ)
ρκεί ν' αποδείξουμε ότι η $\|\cdot\|$ ικανοποιεί την "τριγωνική ιδιότητα":

$$\|x+y\|^2=\tau(x+y)=\mathcal{E}(x+y,x+y)\underset{(a),(\beta),(\gamma)}{=}\mathcal{E}(x,x)+2\mathcal{E}(x,y)+\mathcal{E}(y,y)$$
$$=\|x\|^2+\|y\|^2+2\mathcal{E}(x,y)\le\|x\|^2+\|y\|^2+2\|x\|\|y\|=(\|x\|+\|y\|)^2$$
$$\Leftrightarrow \|x+y\|\le\|x\|+\|u\|.$$

χρησιμοποιήθηκε η γνωστή σχέση $\mathcal{E}(x,y)\le\sqrt{\mathcal{E}(x,x)\,\mathcal{E}(y,y)}$, η οποία αποδεί-
νύεται σύντομα ως εξής: $\forall\ \lambda\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$0\underset{(\delta)}{\le}\mathcal{E}(\lambda x+y,\lambda x+y)\underset{(a),(\beta),(\gamma)}{=}\lambda^2\mathcal{E}(x,x)+2\lambda\mathcal{E}(x,y)+\mathcal{E}(y,y),$$

π' όπου προκύπτει ότι το τριώνυμο του δεξιά μέλους είναι μη αρνητικό
ια κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$, που ισχύει μόνο αν η διακρίνουσα του τριωνύμου αυτό
ίναι μη θετική, δηλαδή μόνο αν ισχύει $(\mathcal{E}(x,y))^2-\mathcal{E}(x,x)\,\mathcal{E}(y,y)\le 0$].

Τέλος, σε κάθε τέτοια νόρμα αντιστοιχεί μια μετρική $d=d_{\|\cdot\|}$, που
ρίζεται από τον τύπο:

$$d(x,y)=\|x-y\|\quad\forall\ x,y\in V$$

οι δυο πρώτες ιδιότητες της μετρικής (πρβλ. 2) είναι άμεσες συνέπειες των
δ) και (α) αντίστοιχα, ενώ η τρίτη ιδιότητα της μετρικής προκύπτει από
την τριγωνική ιδιότητα της νόρμας:

$$d(x,y)=\|x-y\|=\|(x-z)+(z-y)\|\le\|x-z\|+\|z-y\|=d(x,z)+d(z,y)].$$

1. Ορισμοί. Έστω V ένας γραμμικός χώρος και $\mathcal{E}$ ένα εσωτερικό γι-
όμενο στον V με αντίστοιχη τετραγωνική μορφή, νόρμα και μετρική (που
ρίζονται όπως πιο πάνω) την τ, $\|\cdot\|$ και d. Τότε, τα ζευγάρια $(V,\mathcal{E})$,
$V,\tau)$, $(V,\|\cdot\|)$ και (V,d) λέγονται "χώρος με εσωτερικό γινόμενο",
χώρος με τετραγωνική μορφή", "χώρος με νόρμα" και "μετρικός χώρος"
ντίστοιχα (που προέρχεται από το $\mathcal{E}$).

Συμβολισμοί. Οι προηγούμενες έννοιες συνδέονται στα πλαίσια της θε-
ρίας των Γ.Κ. με τα εξής σύνολα (όπου τα x,y είναι τυχαία στοιχεία του V):

$G(V,\mathcal{E})=\{f:V\to V$: η f "διατηρεί" το $\mathcal{E}$, δηλαδή ισχύει $\mathcal{E}(x,y)=\mathcal{E}(f(x),f(y))\}$

$G(V,\tau)=\{f:V\to V$: η f "διατηρεί" το τ, δηλαδή ισχύει $\tau(x)=\tau(f(x))$
$G(V,\|\cdot\|)=\{f:V\to V$: η f "διατηρεί" την $\|\cdot\|$, δηλαδή ισχύει $\|x\|=\|f($
$G(V,d)=\{f:V\to V$: η f είναι ισομετρία ως προς $d=d_{\|\cdot\|}$ (πρβλ. 2

Επειδή η τ ορίζεται από την $\mathcal{E}$, ισχύει $G(V,\mathcal{E})\subseteq G(V,\tau)$. Επίσης, από
τον ορισμό της νόρμας συνάγεται $\boxed{G(V,\tau)=G(V,\|\cdot\|)}$.

Στη συνέχεια θα μελετήσουμε το $G(V,d)$ (πρβλ. 5.(ε)) και θα διερευ
σουμε τη σχέση του ως προς το $G(V,\mathcal{E})$ (πρβλ. 5.(α), 5.(γ) και 5.(δ)).

Θα χρειαστούμε τους επόμενους συμβολισμούς:

$Gl(V)=\{f:V\to V$: η f είναι γραμμικός ισομορφισμός$\}$.

Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι η $(Gl(V),\circ)$ είναι υποομάδα της $(B(V)$

Μια απεικόνιση $f:V\to V$ λέγεται "μεταφορά" (κατά a), αν υπάρχ
$a\in V$ έτσι, ώστε να ισχύει $f(x)=x+a\ \forall\ x\in V$. Μια μεταφορά κατά
θα τη συμβολίζουμε με f_a. Είναι προφανές ότι η f_a είναι "1-1" και "
και ότι είναι γραμμικός ισομορφισμός τότε και μόνο τότε, αν $a=\mathbb{O}$ (αφού
θε γραμμική απεικόνιση αντιστοιχεί το $\mathbb{O}$ στο $\mathbb{O}$), οπότε η f_a είναι η ταυτοτική απεικό

Με τους συμβολισμούς αυτούς ισχύει:

5. Πρόταση. (α) Η $(G(V,\mathcal{E}),\circ)$ είναι υποομάδα της $(Gl(V),\circ)$
(β) $f\in G(V,d)\cap Gl(V)\Leftrightarrow f\in G(V,d)$ και $f(\mathbb{O})=\mathbb{O}$.
(γ) Έστω $\mathbb{O}(V)=\{f:V\to V$: η f είναι ισομετρία ως προς $d=d_{\|\cdot\|}$ και γραμμι
Τότε, η $(\mathbb{O}(V),\circ)$ είναι υποομάδα της $(G(V,d),\circ)$ και λέγεται ορθογω
ομάδα (που αντιστοιχεί στο $\mathcal{E}$), ενώ τα στοιχεία της λέγονται ορθογώνιες απεικονί
(δ) $\forall\ a\in V$ ισχύει $f_a\in G(V,d)$. $\forall\ f\in G(V,d)$ υπάρχει μια ορθογώνια απεικό
και μια μεταφορά f_2 έτσι, ώστε $f=f_2\circ f_1$. Οι f_1, f_2 ορίζονται μονο
μαντα από την f.
(ε) $G(V,d)=I_d(V)$. Επίσης: $\mathbb{O}(V)=G(V,\|\cdot\|)\cap Gl(V)$.

Απόδειξη. (α) Θ' αποδείξουμε πρώτα ότι κάθε $f\in G(V,\mathcal{E})$ είναι γραμμική απεικό
δηλαδή ότι $\forall\ x,y\in V$ και $\lambda\in\mathbb{R}$ ισχύει $f(x+y)=f(x)+f(y)$ και $f(\lambda x)=\lambda f(x)$. Θ' απο

ουμε μόνο τη δεύτερη ισότητα, αφήνοντας την (τελείως ανάλογη) απόδειξη της ρώτης στον αναγνώστη.

Σύμφωνα με το 4.(δ), αρκεί ν' αποδείξουμε ότι $\mathcal{E}(f(\lambda x)-\lambda f(x), f(\lambda x)-\lambda f(x))=0$ (οπότε θα ισχύει $f(\lambda x)-\lambda f(x)=\mathbb{O}$):

$$\mathcal{E}(f(\lambda x)-\lambda f(x), f(\lambda x)-\lambda f(x))=\mathcal{E}(f(\lambda x),f(\lambda x))-2\mathcal{E}(f(\lambda x),\lambda f(x))+\mathcal{E}(\lambda f(x),\lambda f(x))$$
$$=\mathcal{E}(f(\lambda x),f(\lambda x))-2\lambda\mathcal{E}(f(\lambda x),f(x))+\lambda^2\mathcal{E}(f(x),f(x)) \underset{f\in G(V,\mathcal{E})}{=}$$
$$=\mathcal{E}(\lambda x,\lambda x)-2\lambda\mathcal{E}(\lambda x,x)+\lambda^2\mathcal{E}(x,x)=\lambda^2\mathcal{E}(x,x)-2\lambda^2\mathcal{E}(x,x)+\lambda^2\mathcal{E}(x,x)=0.$$

Το ότι η f είναι <u>"1-1"</u> φαίνεται αμέσως: αν $f(x)=f(y)$, τότε:

$$\mathcal{E}(x,y)=\mathcal{E}(f(x),f(y))=0 \Leftrightarrow x=y.$$

Τώρα, αφού η $f:V\to V$ είναι γραμμική και "1-1", θα είναι και <u>"επί"</u>, πως είναι γνωστό από τη Γραμμική Άλγεβρα.

Τα προηγούμενα αποδεικνύουν τη σχέση: $G(V,\mathcal{E})\subset Gl(V)$. Απομένει, οιπόν, ν' αποδείξουμε ότι το $G(V,\mathcal{E})$ είναι "κλειστό" ως προς την πράξη της ύνδεσης απεικονίσεων και ως προς την αντιστοιχία $f\mapsto f^{-1}$:

$$f,g\in G(V,\mathcal{E}) \Rightarrow \mathcal{E}(f\circ g(x), f\circ g(y))=\mathcal{E}(f(g(x)),f(g(y))) \underset{f\in G(V,\mathcal{E})}{=}$$
$$=\mathcal{E}(g(x),g(y)) \underset{g\in G(V,\mathcal{E})}{=} \mathcal{E}(x,y) \Rightarrow f\circ g\in G(V,\mathcal{E}).$$

$$f\in G(V,\mathcal{E}) \Rightarrow \mathcal{E}(f^{-1}(x),f^{-1}(y)) \underset{f\in G(V,\mathcal{E})}{=} \mathcal{E}(f(f^{-1}(x)),f(f^{-1}(y)))=\mathcal{E}(x,y) \Rightarrow f^{-1}\in G(V,\mathcal{E}).$$

<u>β)</u> Το <u>ευθύ</u> είναι προφανές. Για το <u>αντίστροφο</u> παρατηρούμε ότι:

$$f\in G(V,d) \Leftrightarrow d(x,y)=d(f(x),f(y)) \Leftrightarrow \boxed{\|x-y\|=\|f(x)-f(y)\|}\ \forall\ x,y\in V.$$

φαρμόζοντας την τελευταία ισότητα για $y=\mathbb{O}$, συμπεραίνουμε: $\boxed{\|x\|=\|f(x)\|}$ αφού $f(\mathbb{O})=\mathbb{O}$). Επιπλέον, έχουμε:

$$\|x-y\|^2=\|f(x)-f(y)\|^2 \Leftrightarrow \tau(x-y)=\tau(f(x)-f(y) \Leftrightarrow \mathcal{E}(x-y,x-y)=\mathcal{E}(f(x)-f(y),f(x)-f(y))$$
$$\Leftrightarrow \mathcal{E}(x,x)-2\mathcal{E}(x,y)+\mathcal{E}(y,y)=\mathcal{E}(f(x),f(y))-2\mathcal{E}(f(x),f(y))+\mathcal{E}(f(y),f(y))$$
$$\Leftrightarrow \|x\|^2-2\mathcal{E}(x,y)+\|y\|^2=\|f(x)\|^2-2\mathcal{E}(f(x),f(y))+\|f(y)\|^2 \Leftrightarrow \boxed{\mathcal{E}(x,y)=\mathcal{E}(f(x),f(y))}$$

Επομένως, με τις υποθέσεις για το αντίστροφο, η f "διατηρεί" το $\mathcal{E}$, οπότε σύμφωνα με το (α)) θα ισχύει $f\in Gl(V)$ και το ζητούμενο αποδείχτηκε.

<u>(γ)</u> Όπως σημειώσαμε και πιο μπροστά, η $(Gl(V),\circ)$ είναι υποομάδα $(B(V),\circ)$. Από το (β) της Πρότασης στο 2 και από το (ε), που θ' απο χθεί στη συνέχεια ανεξάρτητα από το (γ), συνάγεται ότι και η $(G(V,d),$ είναι υποομάδα της $(B(V),\circ)$. Έτσι, για ν' αποδείξουμε το ζητούμενο αρκεί να παρατηρήσουμε ότι $\boxed{\mathcal{O}(V)=G(V,d)\cap Gl(V)}$ να λάβουμε υπόψη ότι η τομή δυο υποομάδων μιας ομάδας είναι ομάδα.

<u>(δ)</u> Επειδή $\|f_a(x)-f_a(y)\|=\|(x+a)-(y+a)\|=\|x-y\|$, ισχύει $f_a\in G(V,d)$.

Έστω $f\in G(V,d)$. Αν θέσουμε $\boxed{f_1(x)=f(x)-f(\mathbb{O})}$, διαπιστώνουμε ότι

$$\|f_1(x)-f_1(y)\|=\|(f(x)-f(\mathbb{O}))-(f(y)-f(\mathbb{O}))\|=\|f(x)-f(y)\| \underset{f\in G(V,d)}{=} \|x-y\|,$$

δηλαδή ότι $f_1\in G(V,d)$. Επίσης, παρατηρούμε ότι $f_1(\mathbb{O})=\mathbb{O}$, οπότε (από (β)) συνάγεται $f_1\in G(V,d)\cap Gl(V)$, δηλαδή ότι η f_1 είναι <u>ορθογώνια απεικόνισ</u>

Αν θέσουμε $\boxed{f_2(x)=x+f(\mathbb{O})}$ ορίζουμε μια <u>μεταφορά</u>, για την οποία ισχύει

$$f_2\circ f_1(x)=f_2(f_1(x))=f_1(x)+f(\mathbb{O})=f(x)\ \forall x\in V \Rightarrow f=f_2\circ f_1.$$

Απομένει, λοιπόν, ν' αποδείξουμε ότι τα f_1, f_2 ορίζονται <u>μονοσήμαντα</u> α την f. Έστω ότι ισχύει $f=f_2'\circ f_1'$, όπου f_2' είναι μια μεταφορά και f_1' μια ορ γώνια απεικόνιση. Ειδικότερα, έστω $f_2'(x)=x+a$. Τότε, έχουμε:

$$f(x)=f_2\circ f_1(x)=f_1(x)+f(\mathbb{O}) \text{ και } f(x)=f_2'\circ f_1'(x)=f_1'(x)+a \Rightarrow f_1(x)+f(\mathbb{O})=f_1'(x)+$$

Εφαρμόζοντας την τελευταία ισότητα για $x=\mathbb{O}$ (οπότε $f_1(\mathbb{O})=\mathbb{O}$ και $f_1'(\mathbb{O})=$ αφού πρόκειται για γραμμικές απεικονίσεις), βρίσκουμε ότι $a=f(\mathbb{O})$, απ όπου έπεται $f_2=f_2'$. Με αυτό υπόψη συνεχίζουμε:

$$f=f_2\circ f_1 \Leftrightarrow f_1=f_2^{-1}\circ f=(f_2')^{-1}\circ f=f_2' \quad (\text{αφού } f=f_2'\circ f_1').$$

Επομένως, η μεταφορά f_2 και η ορθογώνια απεικόνιση f_1 ορίζονται μονοσήμαντα από τ

<u>(ε)</u> Αφού κάθε $f\in G(V,d)$ είναι ισομετρία ως προς d, αρκεί ν' αποδείξου ότι η f είναι "επί". Αυτό συνάγεται από το (δ), αφού τόσο η f_1 όσο κα είναι "επί".

Το ευθύ του τελευταίου ισχυρισμού είναι απόρροια της απόδειξης του (β), με υπόθεση ότι $f\in G(V,d)$ και $f(\mathbb{O})=\mathbb{O}$ (που ισχύει για κάθε γραμμική απε κιση) φτάσαμε στο συμπέρασμα ότι η f "διατηρεί" το $\mathcal{E}$ άρα και τη νόρμα.

αντίστροφο εργαζόμαστε ως εξής:
Έστω ότι η f είναι γραμμική και "διατηρεί" τη νόρμα. Θέλουμε ν' απο-
ζουμε ότι η f "διατηρεί" και τη μετρική $d=d_{\|\cdot\|}$, δηλαδή ότι ισχύει
$(x)-f(y)\|=\|x-y\|\ \forall\ x,y\in V$:

$$\|f(x)-f(y)\| \underset{f\in Gl(V)}{=} \|f(x-y)\| \underset{f\in G(V;\|\cdot\|)}{=} \|x-y\|.$$

. Παρατήρηση. Μας ενδιαφέρουν οι Γ.Κ. $(I_d(V),V)$, που ορίζονται σύμφω-
με το 5.(ε), δηλαδή οι Γ.Κ. που αντιστοιχούν στις ομάδες ισομετριών
αμμικών χώρων (πεπερασμένης διάστασης) ως προς μετρικές, οι οποίες
έρχονται από ένα εσωτερικό γινόμενο. Από τα (δ) και (ε) της προηγούμε-
Πρότασης φαίνεται ότι η ομάδα $I_d(V)$ "παράγεται" από τις "μεταφορές"
ι από ένα σύνολο "γεννητόρων" της αντίστοιχης ορθογώνιας ομάδας $\mathbb{O}(V)$.
ειδή οι "μεταφορές" είναι (ως απεικονίσεις) γνωστές, το ενδιαφέρον για ένα
νολο "γεννητόρων" του $I_d(V)$ εντοπίζεται στην αναζήτηση ενός συνόλου
εννητόρων" του $\boxed{\mathbb{O}(V)\subset I_d(V)}$ (πρβλ. τα 5.(γ) και 5.(ε)).
Πριν προχωρήσουμε σε γενικές θεωρήσεις, ας δούμε πώς βρίσκεται ένα
νολο "γεννητόρων" της $(\mathbb{O}(V),\circ)$ στην ειδική περίπτωση $V=\mathbb{R}^2$ και $d=d_E$ (πρβλ. 3.1).

ΕΠΙΠΕΔΗ ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΩΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ KLEIN

6. Θεωρούμε τη Γ.Κ. $(I_d(\mathbb{R}^2),\mathbb{R}^2)$, όπου $d=d_E$ είναι η "Ευκλείδεια
ρική" πάνω στο $\mathbb{R}^2$, που προέρχεται από το εσωτερικό γινόμενο $\mathcal{E}=\mathcal{E}_E$
τύπο $\mathcal{E}((x_1,y_1),(x_2,y_2))=x_1x_2+y_1y_2$, οπότε $\|(x,y)\|^2=x^2+y^2$ και,
τά συνέπεια, ισχύει:

$$\left[d((x_1,y_1),(x_2,y_2))\right]^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2.$$

διαφερόμαστε για την αντίστοιχη ορθογώνια ομάδα $\mathbb{O}(\mathbb{R}^2)$ (πρβλ. 5.1).
Έστω $f\in\mathbb{O}(\mathbb{R}^2)$. Επειδή η f είναι γραμμικός ισομορφισμός, ορίζεται
ένα πίνακα $\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\\gamma&\delta\end{pmatrix}$ με $\alpha\delta-\beta\gamma\neq0$ ως εξής:

$$\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\\gamma&\delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha x+\beta y\\\gamma x+\delta y\end{pmatrix} \iff f((x,y))=(\alpha x+\beta y,\gamma x+\delta y).$$

Από το δεύτερο ισχυρισμό του 5.(ε) η f διατηρεί τη νόρμα, οπότε:

$$x^2+y^2=(\alpha x+\beta y)^2+(\gamma x+\delta y)^2\ \forall\ x,y\in\mathbb{R} \iff x^2+y^2=(\alpha^2+\gamma^2)x^2+(\beta^2+\delta^2)y^2+2(\alpha\beta+\gamma\delta)xy\ +$$

$$\iff \alpha^2+\gamma^2=1,\ \beta^2+\delta^2=1,\ \alpha\beta+\gamma\delta=0.$$

Για τη λύση του συστήματος αυτού (απ' όπου θα προκύψει το $f=\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\\gamma&\delta\end{pmatrix}$) δι
νουμε δυο περιπτώσεις:

(I) $\alpha=0 \Rightarrow \beta\gamma\neq0$ και $\gamma\delta=0 \Rightarrow \alpha=\delta=0$ και $\gamma=\pm1,\ \beta=\pm1 \Rightarrow f=\begin{pmatrix}0&\pm1\\\pm1&0\end{pmatrix}$

(II) $\alpha\neq0 \Rightarrow \beta=-\frac{\delta}{\alpha}\gamma \Rightarrow$ αν $\lambda=\frac{\delta}{\alpha}$, δηλαδή $\boxed{\delta=\lambda\alpha}$, θα ισχύει $\boxed{\beta=-\lambda\gamma}$

$$\Rightarrow 1=\beta^2+\delta^2=\lambda^2(\alpha^2+\gamma^2)=\lambda^2 \Rightarrow \boxed{\lambda=\pm1} \Rightarrow$$

για $\lambda=1 \Rightarrow f=\begin{pmatrix}\alpha&-\gamma\\\gamma&\alpha\end{pmatrix}$ με $\alpha^2+\gamma^2=1$, ενώ για $\lambda=-1 \Rightarrow f=\begin{pmatrix}\alpha&\gamma\\\gamma&-\alpha\end{pmatrix}$ με α^2+

Λαμβάνοντας, τώρα, υπόψη το 5.(δ), συμπεραίνουμε ότι $\boxed{\forall\ g\in I_d(}$
αν συμβολίσουμε με $[g((x,y))]^T$ τη στήλη που αντιστοιχεί στη γραμμή $g(($
θα έχουμε:

$$\boxed{[g((x,y))]^T = \begin{array}{l} \nearrow \begin{pmatrix}\alpha&-\gamma\\\gamma&\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} \\ \text{διαζευκτικά} \\ \searrow \begin{pmatrix}\alpha&\gamma\\\gamma&-\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} \end{array},\ \text{με } \alpha^2+\gamma^2=1},$$

όπου (με το συμβολισμό από το 5.(δ)) έχουμε θέσει:

$$f_2((x,y))=(x,y)+(a,b) \text{ και } [f_1((x,y))]^T=\begin{pmatrix}\alpha&-\gamma\\\gamma&\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \text{ ή } \begin{pmatrix}\alpha&\gamma\\\gamma&-\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

$\boxed{6.1.}$ Αν επανέλθουμε στην $f\in\mathbb{O}(\mathbb{R}^2)$ και θέσουμε $\boxed{\alpha=\text{συν}\vartheta,\ \gamma=\text{ημ}\vartheta}$ για κα
λητο $\vartheta\in\mathbb{R}$ (αφού $\alpha^2+\gamma^2=1$), τα προηγούμενα σημαίνουν ότι σε κάθε $f\in$
αντιστοιχεί κάποιο $\vartheta\in\mathbb{R}$ έτσι, ώστε:

$$f=\begin{pmatrix}\text{συν}\vartheta&-\text{ημ}\vartheta\\\text{ημ}\vartheta&\text{συν}\vartheta\end{pmatrix} \quad \text{ή} \quad f=\begin{pmatrix}\text{συν}\vartheta&\text{ημ}\vartheta\\\text{ημ}\vartheta&-\text{συν}\vartheta\end{pmatrix}.$$

Η αριστερά παράσταση της f αντιστοιχεί (όπως είναι γνωστό) σε στροφ
κατά γωνία ϑ με κέντρο την αρχή των αξόνων που θεωρούμε. Επειδή

$$\begin{pmatrix}\text{συν}\vartheta&\text{ημ}\vartheta\\\text{ημ}\vartheta&-\text{συν}\vartheta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\text{συν}\vartheta&-\text{ημ}\vartheta\\\text{ημ}\vartheta&\text{συν}\vartheta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},$$

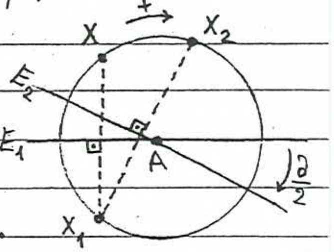
υ ο πρώτος παράγοντας του δεξιά μέλους είναι στροφή και ο δεύτερος "κα-τρισμός" ως προς τον άξονα των y $\left(: \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}\right)$, όσα προηγήθη- αποδεικνύουν την

ταση. Ένα σύνολο "γεννητόρων" για την ομάδα (⊕($\mathbb{R}^2$), ∘) αποτελούν "στροφές" (ως προς κάθε γωνία και κάθε κέντρο) και οι "κατοπτρισμοί" ς προς κάθε ευθεία, που είναι (προφανώς) ισομετρίες ως προς d_E].

Μια "στροφή κατά γωνία ∂ με κέντρο ένα στοιχείο A του $\mathbb{R}^2$" ορίζεται ό τον πίνακα $\begin{pmatrix} \text{συν}\partial & -\text{ημ}\partial \\ \text{ημ}\partial & \text{συν}\partial \end{pmatrix}$, αν οι συντεταγμένες των σημείων του $\mathbb{R}^2$ θεω-ρούν ως προς ένα σύστημα αξόνων με κέντρο το A.

Ο "κατοπτρισμός ως προς την ευθεία x του $\mathbb{R}^2$" είναι η απεικόνιση, υ αντιστοιχεί κάθε σημείο της x στον εαυτό του και κάθε άλλο σημείο στο μμετρικό του σημείο ως προς την x.

2.] Είναι εύκολο ν' αποδειχτεί ότι κάθε "στροφή" είναι σύνδεση 2 κατοπτρι-ών (που δεν ορίζονται μονοσήμαντα από τη "στροφή"):



δώσουμε μια καθαρά γεωμετρική απόδειξη. Έστω το κέντρο μιας στροφής κατά γωνία ∂, που μας ει δοθεί (πρβλ. το σχήμα). Θεωρούμε δυο ευ-ίες E_1 και E_2 που περιέχουν το A και σχηματί-ν γωνία $\frac{\partial}{2}$ (ενώ κατά τα άλλα είναι τυχαίες). εικόνα ενός σημείου X ως προς τη στροφή αυτή θα είναι ένα σημείο X', που ίσκεται πάνω στην περιφέρεια με κέντρο A και ακτίνα το AX και έχει ν ιδιότητα η (προσημασμένη) γωνία XAX' να είναι ∂.

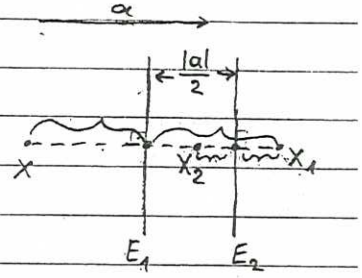
Έστω X_1 η εικόνα του X για τον "κατοπτρισμό" ως προς την ευθεία E_1 ι X_2 η εικόνα του X_1 για τον "κατοπτρισμό" ως προς E_2. Είναι εύκολο διαπιστωθεί η γωνία XAX_2 είναι διπλάσια από τη γωνία των E_1, E_2, δηλα-ισούται με ∂, οπότε ισχύει $X' = X_2$. Επομένως, η στροφή που μας δόθη-είναι σύνδεση των 2 "κατοπτρισμών" που θεωρήσαμε.

Τα προηγούμενα και η Πρόταση στο 6.1 αποδεικνύουν την

Πρόταση 1. Η ομάδα (⊕($\mathbb{R}^2$), ∘) "παράγεται" από (όλους) τους "κατοπτρι

Πρόταση 2. (α) Κάθε "μεταφορά" είναι σύνδεση 2 "κατοπτρισμών" δεν ορίζονται μονοσήμαντα από τη "μεταφορά".

(β) Η ομάδα ($I_{d_E}(\mathbb{R}^2)$, ∘) "παράγεται" από (όλους) τους "κατοπτρισμούς"



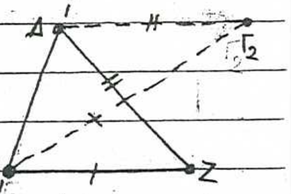
Απόδειξη. (α) Έστω ότι μας δόθηκε η "μεταφορά" κατά α (όπως υποδεικνύεται στο σχήμα). Θεωρούμε δυο ευθείες κάθετες στο "φορέα" του "ελεύθερου διανύσματος" του α που απέχουν $\frac{|a|}{2}$, όπου |a| είναι το "μήκος" του διανύσματος $\vec{a}$ (και κατά τα άλλα είναι τυχαίες). Αν συμβολίσουμε με X_1 την εικόνα του για τον "κατοπτρισμό" ως προς E_1 και με X_2 την εικόνα του X_1 για "κατοπτρισμό" ως προς E_2, είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι ισχύει $|XX_2| = 2\frac{|a|}{2} = |a|$, απ' όπου συνάγεται ότι η "μεταφορά" που μας δ θηκε είναι σύνδεση των δυο "κατοπτρισμών" που θεωρήσαμε.

(β) Το συμπέρασμα είναι άμεση συνέπεια των 5.(ε) και 5.(δ), της Πρ τασης (1) και του (α).

Πόρισμα. Κάθε $f \in I_{d_E}(\mathbb{R}^2)$ απεικονίζει ευθείες σε ευθείες (αφού κάθε " τοπτρισμός" έχει την ιδιότητα αυτή).

Παρατήρηση. Το προηγούμενο Πόρισμα αποτελεί απλώς ένδειξη για το πώς μπορεί ν' αξιοποιηθεί το συμπέρασμα (β) της Πρότασης (2), που (ας σημειωθεί) μπορεί ν' αποδειχτεί και με καθαρά αλγεβρικές μεθόδους, αλλά με "μακρόσυρτες" διαδικασίες. Μια ακόμα εφαρμογή του συμπερά σματος αυτού αποτελεί η απόδειξη του επόμενου ισχυρισμού.

7. Πρόταση. Αν δυο τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι ίσα (δηλαδή αν ισχύουν οι-
ητες $|AB|=|ΔE|$, $|AΓ|=|ΔZ|$ και $|BΓ|=|EZ|$), τότε υπάρχει $f\in I_{d_E}(\mathbb{R}^2)$ που απεικονίζει
Α, Β, Γ στα Δ, Ε, Ζ αντίστοιχα. (Ισχύει, προφανώς, και το αντίστροφο.)
δειξη: Η απόδειξη θα δοθεί σε τρία βήματα.
ια 1. Υπάρχει ένας "κατοπτρισμός" $k_1:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ με $k_1(A)=Δ$ και $|ΔB_1|=$
$E|$, όπου $B_1=k_1(B)$. Αν $A=Δ$, η k_1 είναι η "ταυτοτική" απεικόνιση,
, αν $A\neq Δ$, ο k_1 είναι ο "κατοπτρισμός" ως προς τη "μεσοκάθετη"
(ευθύγραμμο τμήμα) ΑΔ. Έστω $k_1(Γ)=Γ_1$.
ια 2. Υπάρχει ένας "κατοπτρισμός" $k_2:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ με $k_2(Δ)=Δ$ και
$(B_1)=E$. Αν $B_1=E$, η k_2 είναι η "ταυτοτική" απεικόνιση. Αν $B_1\neq E$,
k_2 είναι ο "κατοπτρισμός" ως προς τη "μεσοκάθετη" στο B_1E (που
ιέχει το Δ, αφού $|ΔE|=|AB|=|ΔB_1|$, δεδομένου ότι κάθε "κατοπ-
σμός" είναι ισομετρία). Έστω $k_2(Γ_1)=Γ_2$.
ια 3. Διακρίνουμε, τώρα, δυο περιπτώσεις:
ρίπτωση 1η: Το $Γ_2$ βρίσκεται σε διαφορετικό ημιεπίπεδο ως προς την
θεία, $ε_3$, των Δ και Ε απ' ό,τι το Ζ. Τότε, ο "κατοπτρισμός", k_3, ως
ς την $ε_3$ απεικονίζει το $Γ_2$ στο Ζ (: $|EZ|=|BΓ|=|B_1Γ_1|=|EΓ_2|$).
ομένως στην περίπτωση αυτή αρκεί να θέσουμε $\boxed{f=k_3\circ k_2\circ k_1}$.
ρίπτωση 2η: Τα $Γ_2$ και Ζ βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς $ε_3$. Τότε,
α ισχύει $Γ_2=Z$, οπότε αρκεί να θέσουμε $\boxed{f=k_2\circ k_1}$, ή τα τρίγωνα ΔΕΖ
ι $ΔEΓ_2$ θα είναι όπως στο δίπλα σχήμα,
ου (λόγω των ισομετριών που θεωρήσαμε)
ύει $|ΔZ|=|AΓ|=|ΔΓ_1|=|ΔΓ_2|$ και $|EZ|=$
$BΓ|=|B_1Γ_1|=|EΓ_2|$. Όμως, η τελευταία
ρίπτωση αποκλείεται, αφού, αν ήταν δυ-
τή, τα Δ και Ε θα έπρεπε να βρίσκονται πάνω στη "μεσοκάθε-
" στο $ZΓ_2$, και αυτό δεν συμβιβάζεται με την υπόθεση ότι τα Ζ και
στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς $ε_3$.



7.1. Πόρισμα. Η ισομετρία $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, που απεικονίζει το τρίγωνο
στο ίσο του ΔΕΖ (σύμφωνα με την προηγούμενη Πρόταση) είναι σύνθεσ
πολύ 3 "κατοπτρισμών" (καθένας από τους οποίους αντιστοιχεί σ' ε
από τα 3 βήματα της προηγούμενης απόδειξης).

Παρατήρηση. Η προηγούμενη Πρόταση δείχνει ότι η ισότητα δυο τριγ
δεν είναι μια σχέση που αναφέρεται στα δυο "σχήματα", δεν είναι δ
μια σχέση απλώς κορυφών και πλευρών, αλλά είναι περιορισμός στο ε
τα "σχήματα" ενός "ισομετρικού μετασχηματισμού" (δηλαδή ενός "επιτ
πτού μετασχηματισμού" στα πλαίσια της Γ.Κ. που θεωρούμε) ολόκλ
του χώρου στον εαυτό του! Αυτό σε συνδυασμό με το προηγούμενο Πόρ
από τη μια μεριά, ενισχύει την άποψη ότι η Γ.Κ. $(I_{d_E}(\mathbb{R}^2),\mathbb{R}^2)$ είναι η
πεδη Ευκλείδεια Γεωμετρία" και, από την άλλη, φωτίζει την "εσωτερική
της γνωστής μας Ευκλείδειας Γεωμετρίας (πρβλ. το Πόρισμα της σελ. 53).

8. Ορισμός. Έστω (G, X) μια Γ.Κ. και Α, Β δυο υποσύνολα του
δηλαδή δυο "σχήματα" αυτής της Γ.Κ. Τα "σχήματα" αυτά θα λέ
ται "σύμφωνα" ή "ίσα", αν υπάρχει $f\in G$ έτσι, ώστε $f(A)=B$.

Επειδή το G είναι ομάδα, η σχέση που απορρέει από τον προηγο
νο ορισμό είναι "σχέση ισοδυναμίας" και, κατά συνέπεια, ορίζει μια
ση "ισότητας", η σημασία της οποίας διαφαίνεται από την προηγούμε
Παρατήρηση.

9. Πρόταση. Κάθε $f\in I_{d_E}(\mathbb{R}^2)$ είναι σύνθεση το πολύ 3 "κατοπτρισμ
Απόδειξη. Θεωρούμε 3 μη συνευθειακά σημεία $A, B, Γ\in\mathbb{R}^2$ και θέτ
$Δ=f(A)$, $E=f(B)$ και $Z=f(Γ)$. Τότε, τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είν
ίσα, αφού ισχύουν οι ισότητες $|AB|=|ΔE|$, $|AΓ|=|ΔZ|$ και $|BΓ|=|EZ|$, επ
f είναι ισομετρία ως προς d_E. Επομένως, θα υπάρχουν το πολύ 3 "κα

ρίσμοί" $k_1, k_2, k_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ έτσι, ώστε η $g = k_3 \circ k_2 \circ k_1$ να δίνει για τ
,Β,Γ τις ίδιες εικόνες με την f. Από και το Λήμμα που ακολουθεί συν
γεται $f = g$, δηλαδή το συμπέρασμα.

ήμμα. Κάθε $f \in I_{d_E}(\mathbb{R}^2)$ καθορίζεται μονοσήμαντα από τις εικόνες 3 μη
υνευθειακών σημείων του $\mathbb{R}^2$ (πρβλ. την Πρόταση 1 της σελ. 51).

ιόδειξη. Σύμφωνα με το 5.(δ), αρκεί ν' αποδείξουμε ότι μια "μεταφο
ά" καθορίζεται μονοσήμαντα από την εικόνα ενός σημείου (που θα τ
ωρήσουμε ως αρχή των αξόνων) και ότι μια ορθογώνια απεικόνιση κα
ρίζεται μονοσήμαντα από τις εικόνες δυο σημείων (που δεν ανήκουν
ον ίδιο 1-διάστατο υπόχωρο, ώστε τα 3 σημεία να μην είναι συνευθειακά)
Έστω $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ μια "μεταφορά". Τότε, η f_2 ορίζεται από τον τύπο
$(x,y)) = (x,y) + (a, b)$. Αν είναι γνωστό ότι $f((0,0)) = (x_0, y_0)$, τότε $(a,b) = f_2((0,0)) -$
$0,0) = (x_0, y_0)$. Επομένως, η f_2 καθορίζεται μονοσήμαντα από το (x_0, y_0).
Σε κατάλληλο σύστημα αξόνων μια ορθογώνια απεικόνιση (ως γραμμική)
θορίζεται από ένα πίνακα $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$. Έστω ότι τα σημεία $A_1 = (x_1, y_1), A_2 =$
$, y_2)$ δεν ανήκουν στον ίδιο 1-διάστατο υπόχωρο$^{(*)}$, οπότε θα ισχύει
$\boxed{y_2 - x_2 y_1 \neq 0}$. Υποθέτουμε, επιπλέον, ότι μας έχουν δοθεί τα σημεία
$x_1, y_1)) = (z_1, \omega_1)$ και $f((x_2, y_2)) = (z_2, \omega_2)$. Θ' αποδείξουμε ότι, με δεδο-
α τα x_i, y_i, z_i, ω_i για $i = 1,2$, τα α, β, γ δ υπολογίζονται μονοσήμαντα:

Επειδή $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ \omega_1 \end{pmatrix}$ και $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2 \\ \omega_2 \end{pmatrix}$, έχουμε:

$x_1 \alpha + y_1 \beta = z_1, \; x_1 \gamma + y_1 \delta = \omega_1$ και $x_2 \alpha + y_2 \beta = z_2, \; x_2 \gamma + y_2 \delta = \omega_2$.
ρίζουσα του συστήματος αυτού με αγνώστους τα $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ είναι η:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} = -(x_1 y_2 - x_2 y_1)^2 \neq 0.$$

ένως, τα $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ υπολογίζονται μονοσήμαντα από το προηγούμενο σύστημα.

Αν τα A_1, A_2 βρίσκονται στην ίδια ευθεία με την αρχή, το ίδιο θα συμβαίνει
με τις εικόνες τους (πρβλ. το Πόρισμα της Πρότασης 2), οπότε η γωνία στρο
ίναι ακριβώς η γωνία των δυο αυτών ευθειών.

10. Παράδειγμα. Στα πλαίσια της Γ.Κ. $(I_{d_E}(\mathbb{R}^2), \mathbb{R}^2)$ θεωρούμ
"σχήμα" ένα (τυχαίο) υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$. Το παράδειγμα που ακολου
αναλύει πώς ελέγχουμε αν δυο "σχήματα" είναι ίσα (ή όχι) σε μια
πτωση, στην οποία οι γνωστές έννοιες ισότητας τριγώνων και κύκλων
είναι δυνατό να βοηθήσει. Ως "σχήματα" θεωρούμε τα σύνολα:
$S_1 = \{(y^2, y) : |y| \leq 2\} \cup \{(4,y) : |y| \leq 2\}, \; S_2 = \{(x, x^2 - 2x + 2) : -1 \leq x \leq 3\} \cup \{(x,5) : -1 \leq x$
Για να διερευνήσουμε την ισότητα των "σχημάτων" αυτών σύμφων
τον Ορισμό 8, θ' αναζητήσουμε (αν υπάρχει) μια ισομετρία $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$g(S_1) = S_2$. Θα δοκιμάσουμε να υπολογίσουμε τα α, γ (με $\alpha^2 + \gamma^2 = 1$)
τα a, b από το δεύτερο τύπο της σελίδας 11 (αν δεν φτάσουμε σε
τέλεσμα θα δοκιμάσουμε με τον πρώτο τύπο). Υποθέτουμε, λοιπόν, ότι ισ

$$[g((x,y))]^T = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x + \gamma y + a \\ \gamma x - \alpha y + b \end{pmatrix}, \text{ όπου } \boxed{\alpha^2 + \gamma^2 =}$$

Από το Πόρισμα της σελίδας 13 συνάγεται ότι το "ευθύγραμμο" (δεύτε
κομμάτι του S_1 θ' απεικονίζεται ("αμφιμονοσήμαντα" και "επί") στο "ε
γραμμο" (επίσης δεύτερο) κομμάτι του S_2, οπότε το ίδιο θα συμβαί
(πάντα με την υπόθεση ότι τα υπόψη "σχήματα" είναι ίσα) και με τ
"καμπυλόγραμμα" κομμάτια των S_1 και S_2.

Το $(0,0)$ ανήκει στο πρώτο κομμάτι του S_1. Επομένως, για κατά
λο $u \in \mathbb{R}$ θα ισχύει $g((0,0)) = (a,b) = (u, u^2 - 2u + 2) \Rightarrow \boxed{a = u, \; b = u^2 - 2u + 2}$

Σύμφωνα με το προηγούμενο Λήμμα, η g καθορίζεται από τις εικόνες
άλλων σημείων, που (για ευκολία) τα επιλέγουμε από το "ευθύγραμμο"
μάτι του S_1. Υποθέτουμε, λοιπόν, ότι $g((4,0)) = (w,5)$ και $g((4,1)) = (z,5)$
κατάλληλα $w, z \in \mathbb{R}$, οπότε θα ισχύουν τα εξής:

$$\boxed{4\alpha + a = w, \; 4\gamma + b = 5} \text{ και } \boxed{4\alpha + \gamma + a = z, \; 4\gamma - \alpha + b = 5}.$$

Επομένως, $\boxed{\alpha = 0}$, οπότε $\gamma = \pm 1$. Αν $\gamma = -1$, τότε $b = 9$ και $w = a = u = 1 \pm 2$
που απορρίπτεται, αφού $-1 \leq w \leq 3$. Για $\boxed{\gamma = 1}$ βρίσκουμε $\boxed{b = 1}$ και $\boxed{a = u =}$

$$\Rightarrow [g((x,y))]^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \boxed{g((x,y)) = (y+1, x+1)}.$$

θα ελέγξουμε, τώρα, αν η g που βρήκαμε ικανοποιεί την ισότητα $g(S_1)=S_2$:
$((y^2,y)) = (y+1, y^2+1) \in \{(x, x^2-2x+2) : -1 \leq x \leq 3\}$ (αφού:
$-2 \leq y \leq 2 \Leftrightarrow -1 \leq y+1 \leq 3$ και, αν $x=y+1$, τότε: $x^2-2x+2=y^2+1$)
$((4,y)) = (y+1, 5) \in \{(x,5) : -1 \leq x \leq 3\}$ (αφού: $-2 \leq y \leq 2 \Leftrightarrow -1 \leq y+1 \leq 3$).
τα (1) και (2) συνάγεται $g(S_1) \subset S_2$.
ντί της σχέσης $S_2 \subset g(S_1)$, θ' αποδείξουμε την ισοδύναμή της
$S_2) \subset S_1$, όπου $\boxed{g^{-1}((x,y)) = (y-1, x-1)}$, όπως διαπιστώνεται εύκολα.
έση αυτή αποδεικνύεται με δυο ελέγχους ανάλογους των (1) και (2).
ποδείξαμε, λοιπόν, ότι ισχύει $g(S_1)=S_2$, απ' όπου προκύπτει ότι τα
"σχήματα" που θεωρήσαμε είναι ίσα στα πλαίσια της Γ.Κ. $(I_{d_E}(\mathbb{R}^2), \mathbb{R}^2)$.

τήρηση. Αν, αντί των δυο προηγούμενων "σχημάτων", θεωρούσαμε τα
ματα" $S_1' = S_1 \cup \{(4,5)\}$ και $S_2' = S_2 \cup \{(5,5)\}$, επειδή $g((4,5))=(6,5)$,
σχύει $g(S_1') \subset S_2'$ και, κατά συνέπεια, τα καινούρια "σχήματα"
είναι ίσα στα πλαίσια της Γ.Κ. $(I_{d_E}(\mathbb{R}^2), \mathbb{R}^2)$.

ΗΣΕΙΣ

Έστω (X,d) ένας μετρικός χώρος. Αν θέσουμε $d^*(x,y)=\min\{1, d(x,y)\}$,
τε ότι η d^* είναι μετρική και ότι ισχύει $\underbrace{I_d(X) < I_{d^*}(X)}$ (:υποομάδα)
στω $d: X \times X \to \{0,1\}$ έτσι, ώστε $d(x,x)=0$ και $d(x,y)=1$ για $x \neq y$.
τε ότι η d είναι μετρική και βρείτε το $I_d(X)$.
είξετε ότι, αν η $f \in I_{d_E}(\mathbb{R}^2)$ έχει την ιδιότητα $f((1,1))=(1,1)$, $f((1,0))=$
) και $f((0,1))=(0,1)$, τότε η f είναι η "ταυτοτική" απεικόνιση.
είξετε ότι υπάρχουν ακριβώς 4 απεικονίσεις από το $I_{d_E}(\mathbb{R}^2)$, που
ονίζουν ένα ευθύγραμμο τμήμα AB $(: A \neq B)$ στον εαυτό του.
έγξετε αν τα δυο επόμενα "σχήματα" είναι ίσα στα πλαίσια της Γ.Κ.
$^2), \mathbb{R}^2)$: $A=\{(x,y): y^2=x+1, x\in[-1,0]\} \cup \{(x,y): x+y-1, x\in[0,1]\} \cup \{(x,y): x=0,$
$2]\}$; $B=\{(x,y): y^2+2y+x=1, x\in[1,2]\} \cup \{(x,y): x+y=-1, x\in[0,1]\} \cup \{(x,y): x=1,$
$]\}$. Εξετάσετε το ίδιο ερώτημα για τα "σχήματα": $A \cup \{(2,-3\}$ και $B \cup \{(1,2)\}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΥΤΕΡΟ: Τετραγωνικές μορφές στον $\mathbb{R}^n$

ΓΕΝΙΚΟΙ ΤΥΠΟΙ ΚΑΙ ΚΑΝΟΝΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

11. Στο 4 ασχοληθήκαμε με θετικά ορισμένα εσωτερικά γινόμε
σ' ένα γραμμικό χώρο V. Στο κεφάλαιο αυτό μας ενδιαφέρουν όχι α
ραίτητα θετικά ορισμένα εσωτερικά γινόμενα στον $\mathbb{R}^n$ που ικανοποιο
μια συνθήκη "μη εκφυλισμού", την οποία θα διατυπώσουμε πιο κάτω. Μας
ενδιαφέρουν, λοιπόν, εσωτερικά γινόμενα $\mathcal{E}: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, που ικανοποιού
τις απαιτήσεις (α), (β) και (γ) από το 4, αλλά όχι απαραίτητα και την (δ

Έστω $x=(x_1,\dots,x_n)$ και $y=(y_1,\dots,y_n)$ ως προς μια βάση $\{e_1,\dots,e_n$
Λόγω της "γραμμικότητας" και της "συμμετρικότητας" του $\mathcal{E}$, έχουμε

$$\mathcal{E}(x,y)=\mathcal{E}\left(\sum_i x_i e_i, \sum_i y_i e_i\right)=\sum_{i,j} x_i y_j \mathcal{E}(e_i,e_j)=\sum_{i,j} a_{ij} x_i y_j,$$

όπου $a_{ij}=\mathcal{E}(e_i,e_j)$. Επομένως:

☆ Οι τιμές ενός εσωτερικού γινομένου καθορίζονται από τις τιμές του σ
στοιχεία της θεωρούμενης βάσης (και, φυσικά, από τις συντεταγμένες των θεωρούμενων σημε

Έστω $\tau: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ η τετραγωνική μορφή που αντιστοιχεί στο $\mathcal{E}$. Ως προς τη
προηγούμενη βάση, ισχύει:

$$\boxed{\tau(x)=\mathcal{E}(x,x)=\sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j, \quad a_{ij}=\mathcal{E}(e_i,e_j)}.$$

Αν κάνουμε τους πολλαπλασιασμού πινάκων στο δεξιά μέλος του παρακάτω τύπ
και συγκρίνουμε το αποτέλεσμα με το δεξιά μέλος του προηγούμενου, διαπιστώνουμε ό

$$\boxed{\tau(x)=(x_1,\dots,x_n)\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad a_{ij}=\mathcal{E}(e_i,e_j)},$$

απ' όπου συνάγεται:

☆ Μια τετραγωνική μορφή $\tau: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, που προέρχεται από ένα εσωτερικό γινόμενο
ορίζεται από ένα (n×n)-πίνακα (a_{ij}), τα στοιχεία του οποίου ως προς μια βάση $\{e_1,\dots,e_n\}$ υπολογίζονται από τις ισότητες $a_{ij}=\mathcal{E}(e_i,e_j)$ για $i,j=1,\dots,n$.

☆ Για λόγους "μη εκφυλισμού" οι τετραγωνικές μορφές που θα θεωρούμε στη συνέχεια θ' αντιστοιχούν σε πίνακες με μη μηδενική ορίζουσα.

Ας σημειωθεί ότι σε μια όχι θετικά ορισμένη τετραγωνική μορφή, τ, δεν είναι απαραίτη

ια ισχύει $\tau(x) \geqslant 0$. Επομένως, δεν μπορούμε να μιλάμε για απόσταση που ορί-
αι από τον τύπο $\|x-y\|=\sqrt{\tau(x-y)}$. Στο γενικό πλαίσιο του κεφαλαίου αυτού,
πρόβλημα είναι να μελετηθούν οι Γ.Κ. $(G, \mathbb{R}^n)$, όπου G είναι η υποομάδα της
$X), \circ)$, κάθε στοιχείο, f, της οποίας "διατηρεί" μια "μη εκφυλισμένη" τετραγωνική
φή, τ, του $\mathbb{R}^n$, δηλαδή έχει την ιδιότητα: $\tau(x-y)=\tau(f(x)-f(y))$.
Είναι φανερό ότι η μελέτη των Γ.Κ. αυτών θα διευκολυνθεί στο βαθμό που ο πί-
κας, (a_{ij}), της θεωρούμενης τετραγωνικής μορφής έχει την απλούστερη δυνατή μορφή.
αυτό ρωτάμε: αν δοθεί μια τετραγωνική μορφή, τ, του $\mathbb{R}^n$, υπάρχει μια βάση ως προς
οποία ο πίνακας της τ να παίρνει διαγώνια μορφή;

12. Προετοιμάζοντας την καταφατική απάντηση στο ερώτημα αυτό (που θα δοθεί στο 13), ελέγξουμε πώς μεταβάλλεται ο πίνακας μιας τετραγωνικής μορφής όταν αλλάζουμε βάση: Έστω ότι οι τιμές μιας τετραγωνικής μορφής $\tau: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ στο $x \in \mathbb{R}^n$ με $(x_1, \ldots, x_n)$ ως προς μια βάση $\{e_1, \ldots, e_n\}$ του $\mathbb{R}^n$ δίνονται από τον
ο $\tau(x)=\sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j$, $a_{ij}=\mathcal{E}(e_i, e_j)$ (πρβλ. 11). Έστω $\{e_1', \ldots, e_n'\}$ άλλη βάση του $\mathbb{R}^n$. Τότε, όπως είναι γνωστό, υπάρχει ένας πίνακας (b_{ij}) με $|B| \neq 0$ (: το $|B|$ συμβολίζει την ορίζουσα του B) έτσι, ώστε:

$$\begin{pmatrix} e_1' \\ \vdots \\ e_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow e_i' = \sum_j b_{ij} e_j .$$

συμβολίσουμε με x_i' τις συντεταγμένες του x ως προς την καινούρια βά-
θα έχουμε:

$$x=\sum_i x_i' e_i' = \sum_i x_i' \left(\sum_j b_{ij} e_j\right) = \sum_i \left(\sum_j b_{ji} x_j'\right) e_i \Rightarrow \boxed{x_i = \sum_j b_{ji} x_j',}$$

όπου συνάγεται ότι

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{1n} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}}_{B^T : \text{ ο "ανάστροφος" πίνακας του B}} \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} \Leftrightarrow (x_1, \ldots, x_n) = \left(B^T \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}\right)^T = \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}^T (B^T)^T = (x_1', \ldots, x_n') B .$$

μένως (πρβλ. 11)

$$\tau(x) = (x_1, \ldots, x_n) A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \left((x_1', \ldots, x_n') B\right) A \left(B^T \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}\right) = (x_1', \ldots, x_n') (BAB^T) \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix},$$

όπου προκύπτει ότι για τον πίνακα A' της τ ως προς τη βάση $\{e_1', \ldots, e_n'\}$
ει: $\boxed{A' = BAB^T}$.

13. Πρόταση: Για κάθε τετραγωνική μορφή $\tau: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (που προέρχεται από ένα εσωτερικό γινόμενο $\mathcal{E}$ στον $\mathbb{R}^n$) υπάρχει μια (τουλάχιστο) βάση, $\{e_1^*, \ldots, e_n^*\}$ του $\mathbb{R}^n$, ως προς την οποία ο πίνακας της τ γίνεται διαγώνιος με διαγώνια στοιχεία τα ε_i, $\boxed{|\varepsilon_i|=1}$, οπότε, αν $x=\sum_i x_i^* e_i^*$, θα ισχύει:

$$\boxed{\tau(x)=\sum_i \varepsilon_i (x_i^*)^2} .$$

Για την απόδειξη θα εφαρμόσουμε τη μέθοδο της επαγωγής ως προς n:

★ Έστω $n=1$. Τότε, ως προς την κανονική βάση, $\{e\}$, του $\mathbb{R}$, θα ισχύει $\tau(x)=a x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όπου $a=a(\tau) \neq 0$. Αν $a>0$, κάνοντας το μετασχηματισμό $x\sqrt{a}=y$, ανάγομαστε σε μια καινούρια βάση, ως προς την οποία ισχύει $\tau(x)=y^2$. Αν $a<0$, με το μετασχηματισμό $x\sqrt{-a}=y$ καταλήγουμε στον τύπο $\tau(x)=-y^2$. Επομένως, η Πρόταση ισχύει για $n=1$.

★ Δεχόμαστε, τώρα, ότι η Πρόταση ισχύει για $\boxed{n=m}$, δηλαδή ότι σε κάθε τετραγωνική μορφή, τ, στον $\mathbb{R}^m$ αντιστοιχεί μια βάση του, ως προς την οποία ισχύει:

$$\tau(y)=\sum_i \varepsilon_i y_i^2 \quad \forall\, y=(y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^m, \text{ όπου } |\varepsilon_i|=1.$$

★ Θ' αποδείξουμε την Πρόταση για $n=m+1$:

Σύμφωνα με το 11, αν $x=(x_1, \ldots, x_{m+1}) \in \mathbb{R}^{m+1}$ ως προς τη βάση $\{e_1, \ldots, e_{m+1}\}$, θα ισχύει

$$\tau(x)=\sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j = a_{11} x_1^2 + \sum_{j \neq 1} a_{1j} x_1 x_j + \sum_{j \neq 1} a_{j1} x_j x_1 + \underbrace{\sum_{i,j \neq 1} a_{ij} x_i x_j}_{\boxed{\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_1(x_2, \ldots, x_{m+1})}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\tau(x)=a_{11} x_1^2 + 2\sum_{j \neq 1} a_{1j} x_1 x_j + \mathcal{D}_1} . \; (*)$$

Στην τελευταία ισότητα φτάσαμε, αξιοποιώντας την υπόθεση ότι ο πίνακας του $\mathcal{E}$, άρα και του τ, είναι συμμετρικός, δηλαδή ότι ισχύει $a_{1j}=a_{j1}$. Η συγκεκριμένη μορφή του δεξιά μέλους της ισότητας αυτής μας διευκολύνει στην αξιοποίηση της "υπόθεσης της επαγωγής", αφού η παράσταση $\mathcal{D}_1$ εξαρτάται μόνο από $x_2, \ldots, x_{m+1}$, δηλαδή αντιστοιχεί σ' ένα εσωτερικό γινόμενο στον m-διάστατο υπόχωρο των m τελευταίων συντεταγμένων του $\mathbb{R}^{m+1}$.

Για τη συνέχεια διακρίνουμε τις εξής δυο περιπτώσεις:

I) Υπάρχει i έτσι, ώστε $a_{ii} \neq 0$, οπότε, αναδιατάσσοντας τα στοιχεία της θεωρ βάσης αν αυτό είναι απαραίτητο, μπορούμε να υποθέσουμε ότι ισχύει $a_{11} \neq 0$.

χύει $a_{ii}=0$ για κάθε i, οπότε θα υπάρχουν i, j με $i \neq j$ με $a_{ij} \neq 0$ και

και πριν) μπορούμε να υποθέσουμε $a_{12} \neq 0$.

την περίπτωση (I) θεωρούμε πρώτα την αλλαγή βάσης $\{e_1,\dots,e_{m+1}\} \to \{e'_1,\dots,e'_{m+1}\}$

νούριες συντεταγμένες τις y_i) που οδηγεί στο μετασχηματισμό:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{m+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\,m+1} \\ \vdots & 1 & 0 \ \vdots \\ \vdots\, 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{m+1} \end{pmatrix}$$

ειται για ισομορφισμό, αφού η ορίζουσα του πίνακα ισούται με $a_{11} \neq 0$).

έχουμε: $\boxed{y_i = x_i}$ για $i=2,\dots,m+1$ και $y_1 = \sum_j a_{1j}x_j \iff$

$${}^2_1 = a_{11}^2 x_1^2 + \boxed{\sum_{j\neq 1} a_{1j}^2 x_j^2} + 2\sum_{j \neq 1} a_{11}a_{1j}x_1x_j + \boxed{2\sum_{i,j\neq 1} a_{1i}a_{1j}x_ix_j}$$

$$= a_{11}^2 x_1^2 + 2\sum_{j\neq 1} a_{11}a_{1j}x_1x_j + \mathcal{D}_2 \,, \quad \text{όπου } \boxed{\mathcal{D}_2 = \mathcal{D}_2(x_2,\dots,x_{m+1})}$$

$$\frac{1}{a_{11}} y_1^2 = a_{11}x_1^2 + 2\sum_{j\neq 1} a_{1j}x_1x_j + \frac{1}{a_{11}}\mathcal{D}_2 .$$

την ισότητα αυτή και την (*) προκύπτει: $\boxed{\tau(x) = \frac{1}{a_{11}} y_1^2 + \left(\mathcal{D}_1 - \frac{1}{a_{11}}\mathcal{D}_2\right)}$.

δή, όπως διαπιστώνεται εύκολα, τόσο η $\mathcal{D}_1$ όσο και η $\mathcal{D}_2$ ορίζουν (συμμετρικά) τρικά γινόμενα στον $\mathbb{R}^m$ (που αντιστοιχεί στις συντεταγμένες $x_i = y_i$, $i=2,\dots,m+1$), κα με την "υπόθεση της επαγωγής", υπάρχει μια βάση $\{e^*_2,\dots,e^*_{m+1}\}$ στο αυτό (με αντίστοιχες συντεταγμένες τις z_i), ως προς την οποία οι τιμές της τε- ωνικής μορφής $\mathcal{D}_1 - \frac{1}{a_{11}}\mathcal{D}_2$ να δίνονται από τον επιθυμητό τύπο

$$\left(\mathcal{D}_1 - \frac{1}{a_{11}}\mathcal{D}_2\right)(y_2,\dots,y_{m+1}) = \sum_{i=2}^{m+1} \varepsilon_i z_i^2$$

ε έχουμε:

$$\tau(x) = \frac{1}{a_{11}} y_1^2 + \sum_{i=2}^{m+1} \varepsilon_i y_i^2 .$$

πληρώνοντας την $\{e^*_2,\dots,e^*_{m+1}\}$ σε μια βάση του $\mathbb{R}^{m+1}$ με το e^*_1 έτσι, ώστε την αλλαγή των συντεταγμένων κατά τη μετάβαση από βάση $\{e'_1,\dots,e'_{m+1}\}$ βάση $\{e^*_1,\dots,e^*_{m+1}\}$ (με καινούριες συντεταγμένες τις x^*_i) να ισχύει $x^*_i = z_i$ $=2,\dots,m+1$ και $x^*_1 = \frac{y_1}{\sqrt{|a_{11}|}}$, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι οι τιμές τ ως προς την τελευταία βάση $\{e^*_1,\dots,e^*_{m+1}\}$ δίνονται από τον τύπο:

$$\tau(x) = \sum_i \varepsilon_i (x^*_i)^2 \text{ με } |\varepsilon_i| = 1 \ \forall\ x = (x^*_1,\dots,x^*_{m+1}) \in \mathbb{R}^{m+1}.$$

Αποδείχτηκε, έτσι, το ζητούμενο για την περίπτωση (I).

- Στην περίπτωση (II) θεωρούμε την αλλαγή βάσης στον $\mathbb{R}^{m+1}$ που απορρέ το μετασχηματισμό

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{m+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -1 & & 0 & \vdots \\ 0 & & 1 & & 0 \\ \vdots & & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{m+1} \end{pmatrix}$$

(με καινούριες συντεταγμένες τις y_i και ορίζουσα του πίνακα ίση με $-1 \neq 0$ οπότε $x_1 = y_1 + y_2$ και $x_2 = y_1 - y_2$, απ' όπου έπεται:

$$\tau(x) = \sum_{i\neq j} a_{ij}x_ix_j = a_{12}x_1x_2 + \dots + a_{m\,m+1}x_m x_{m+1}$$
$$= a_{12}(y_1+y_2)(y_1-y_2) + \dots + a_{m\,m+1}y_m y_{m+1}$$
$$= a_{12}y_1^2 - a_{12}y_2^2 + \dots + a_{m\,m+1}y_m y_{m+1} .$$

Επειδή $a_{12} \neq 0$, ο συντελεστής του y_1^2 είναι διάφορος του μηδενός. Αναχθήκ λοιπόν, στην προηγούμενη περίπτωση και η Πρόταση αποδείχτηκε.

13.1. Πόρισμα – Ορισμός. Για κάθε τετραγωνική μορφή $\tau: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ υπάρχει (τουλάχιστο) βάση του $\mathbb{R}^n$, ως προς την οποία να ισχύει

$$\boxed{\tau(x) = x_1^2 + \dots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \dots - x_n^2} \text{ για κατάλληλο } k \text{ με } 0 \leq k \leq n,$$

όπου $x = (x_1,\dots,x_n)$. Προφανώς, το k είναι το πλήθος των ε_i με $\varepsilon_i = 1$, τα οπο μπορούμε ν' αντιστοιχίσουμε στις k πρώτες συντεταγμένες (αν $k \neq 0$) με κατάλλη αναδιάταξη των στοιχείων της θεωρούμενης βάσης. Από την Πρόταση που ακο θεί συνάγεται ότι πλήθος των θετικών ε_i, δηλαδή το k, δεν αλλάζει οποιαδήπο βάση του $\mathbb{R}^n$ κι αν θεωρήσουμε, ως προς την οποία οι τιμές $\tau(x)$ δίνονται απ τύπο που περιέχει μόνο τα x_i^2. Το k είναι, με άλλα λόγια, "αναλλοίωτο" της τραγωνικής μορφής τ και λέγεται θετικός δείκτης της. Ο προηγούμενος τ του $\tau(x)$ (στο πλαίσιο) λέγεται κανονική παράσταση της τ.

14. Πρόταση. Ο θετικός δείκτης δεν αλλάζει οποιαδήποτε βάση του $\mathbb{R}^n$ κι αν ουμε, ως προς την οποία το $\tau(x)$ να δίνεται από την κανονική του παράσταση.

ξη. Θεωρούμε δυο βάσεις $\mathbb{E}=\{e_1,\dots,e_n\}$ και $\mathbb{G}=\{g_1,\dots,g_n\}$ του $\mathbb{R}^n$, ς τις οποίες ισχύει αντίστοιχα

$$\tau(x)=x_1^2+\dots+x_k^2-x_{k+1}^2-\dots-x_n^2\ ,\quad \tau(x)=y_1^2+\dots+y_m^2-y_{m+1}^2-\dots-y_n^2\ ,$$

$x=(x_1,\dots,x_n)$ ως προς $\mathbb{E}$ και $x=(y_1,\dots,y_n)$ ως προς $\mathbb{G}$. Θα καταλήξουμε πο, υποθέτοντας $k\neq 0$ (: η περίπτωση $k=0$ θα εξετασθεί μετά) και $k>m$ (: η ιση $k<m$ είναι ανάλογη):

ω (γ_{ij}) ο πίνακας αλλαγής συντεταγμένων (από τη βάση $\mathbb{E}$ στη βάση $\mathbb{G}$), ή έστω $\boxed{y_i=\sum_j \gamma_{ij}x_j}$. Επειδή $k>m$, το σύστημα

$$\begin{matrix} \gamma_{11}x_1+\dots+\gamma_{1k}x_k=0 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \quad \vdots \\ \gamma_{m1}x_1+\dots+\gamma_{mk}x_k=0 \end{matrix}$$

ια μη μηδενική λύση, έστω την $\boxed{(x_1,\dots,x_k)=(\lambda_1,\dots,\lambda_k)\neq(0,\dots,0)}$.

ίτω

$$\begin{pmatrix}\mu_1\\ \vdots\\ \vdots\\ \mu_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\gamma_{11}\cdots\gamma_{1n}\\ \vdots \qquad \vdots\\ \vdots \qquad \vdots\\ \gamma_{n1}\cdots\gamma_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_k\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix},$$

δή έστω ότι ισχύει $z=(\mu_1,\dots,\mu_n)$ ως προς $\mathbb{G}$, αν $z=(\lambda_1,\dots,\lambda_k,0,\dots 0)$ ρος $\mathbb{E}$. Τότε, για $i=1,\dots,m$ έχουμε

$$\mu_i=\gamma_{i1}\lambda_1+\dots+\gamma_{ik}\lambda_k+\gamma_{ik+1}0+\dots+\gamma_{in}0=\gamma_{i1}\lambda_1+\dots+\gamma_{ik}\lambda_k=0,$$

το $(\lambda_1,\dots,\lambda_k)$ είναι λύση του πιο πάνω συστήματος. Επομένως, αν $\lambda_1,\dots,\lambda_k,0,\dots,0)$ ως προς $\mathbb{E}$, τότε $z=(0,\dots,0,\mu_{m+1},\dots,\mu_m)$ ως προς $\mathbb{G}$.

$$\tau(z)=\lambda_1^2+\dots+\lambda_k^2+0+\dots+0=0+\dots+0-\mu_{m+1}^2-\dots-\mu_n^2,$$ που είναι ο, αφού $\lambda_1^2+\dots+\lambda_k^2>0$ (επειδή $(\lambda_1,\dots,\lambda_k)\neq(0,\dots,0)$), ενώ $-\mu_{m+1}^2-\dots-\mu_n^2\leq 0$. πιλέγοντας το z ανάλογα, καταλήγουμε σε άτοπο, αν υποθέσουμε $k=0$ και $m>0$. ένως, ισχύει $k=m$.

ρατήρηση. Στο 11 είδαμε ότι ισχύει $\tau(x)=\sum_{i,j}a_{ij}x_ix_j$, όπου $a_{ij}=\mathcal{E}(e_i,e_j)$.

Στην κανονική παράσταση του $\tau(x)$ ισχύει $a_{ij}=0$ για $i\neq j$ και $a_{ii}=\varepsilon_i$, $|\varepsilon_i|=1$, δηλαδή ισχύει $\boxed{\mathcal{E}(e_i,e_j)=0 \text{ για } i\neq j}$ και $\boxed{\mathcal{E}(e_i,e_i)=\varepsilon_i}$. Με δεδ το εσωτερικό γινόμενο $\mathcal{E}$, μια βάση $\{e_1,\dots,e_n\}$ του $\mathbb{R}^n$ που ικανοποιεί δυο αυτές ισότητες λέγεται ορθοκανονική. Είναι φανερό ότι, ως προς μια κανονική βάση, οι τιμές της τ (που αντιστοιχεί στο $\mathcal{E}$) εκφράζονται κανονική παράσταση. Επομένως, υπάρχουν περισσότερες της μιας βάσεις $\mathbb{R}^n$, ως προς τις οποίες οι τιμές μιας δεδομένης τετραγωνικής μορφής πα την κανονική τους παράσταση.

Στις επισημάνσεις αυτές στηρίζεται η λεγόμενη "μέθοδος Jakobi" για τ αναγωγή του $\tau(x)$ στην κανονική του παράσταση, που θα περιγράψουμε σ Η διαδικασία που περιγράψαμε στο 13 αντιστοιχεί στη "μέθοδο Lagrange

16. Θεωρούμε μια τετραγωνική μορφή, τ, στον $\mathbb{R}^n$ με αντίστοιχο πίνακ (a_{ij}) (πρβλ. 11) και υποθέτουμε ότι οι κύριες ορίζουσες του πίνακα αι είναι μη μηδενικές. Οι κύριες ορίζουσες του πίνακα αυτού είναι οι οριζο των $(k\times k)$-πινάκων $(:1\leq k\leq n)$ που αντιστοιχούν στις k πρώτες γραμμές τις k πρώτες στήλες του (a_{ij}). Θα τις συμβολίζουμε με $\boxed{D(k)}$, θέτοντας $\boxed{D(}$

Έστω $\{e_1,\dots,e_n\}$ η βάση του $\mathbb{R}^n$, ως προς την οποία ο (a_{ij}) είναι ο πίνακας τ, οπότε $\boxed{a_{ij}=\mathcal{E}(e_i,e_j)}$. Η μέθοδος συνίσταται "κατ' αρχήν" στον κατάλλη προσδιορισμό των δ_{ij}, ώστε, αν

$$\begin{pmatrix}g_1\\ \vdots\\ \vdots\\ g_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\delta_{11} & & O\\ \delta_{12} & \delta_{22} & \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ \delta_{1n} & \delta_{2n}\cdots & \delta_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e_1\\ \vdots\\ \vdots\\ e_n\end{pmatrix} \Leftrightarrow \boxed{g_i=\delta_{1i}e_1+\dots+\delta_{ii}e_i},\quad (1)$$

να ισχύει $\boxed{\tau(x)=\sum_{i=1}^{n}b_{ii}y_i^2}$, όπου $x=(y_1,\dots,y_n)$ ως προς τη βάση $\{g_1,\dots,$

Σύμφωνα με τις επισημάνσεις στο 15, αναγκαία προϋπόθεση για να το πετύχ αυτό είναι η ισχύς των ισοτήτων $\boxed{\mathcal{E}(g_i,g_j)=0 \text{ για } i=1,\dots,j-1 \text{ και } j=1,\dots}$ αφού $\mathcal{E}(g_j,g_i)=\mathcal{E}(g_i,g_j)$, οπότε θα ισχύει $\mathcal{E}(g_i,g_j)=0$ για $i\neq j$. Για την των ισοτήτων αυτών αρκεί να έχουμε $\mathcal{E}(e_i,g_j)=0$ για $i=1,\dots,j-1$ και $j=1,\dots,$

[illegible] για $i<j$ θα ισχύει:

[illegible] $\mathcal{E}(\delta_{1i}e_1+\dots+\delta_{ii}e_i, g_j)=\delta_{1i}\mathcal{E}(e_1,g_j)+\dots+\delta_{ii}\mathcal{E}(e_i,g_j)=0.$

[illegible] λοιπόν, τα δ_{ij} απαιτώντας να ισχύει

$$\boxed{\begin{array}{l}\mathcal{E}(e_i,g_j)=0 \text{ για } i=1,\dots,j-1 \text{ και } j=1,\dots,n \\ \mathcal{E}(e_j,g_j)=1 \text{ για } j=1,\dots,n\end{array}} \quad (2)$$

ιπλέον

ρεί ότι στις τελευταίες εξισώσεις, αντί για 1 στο δεξιά μέλος, θα μπο- με να είχαμε επιλέξει οποιονδήποτε μη μηδενικό αριθμό. Όπως θα δούμε νέχεια, θα κάνουμε ακόμα ένα μετασχηματισμό για να φτάσουμε στην παράσταση, στον οποίο πρέπει να ληφθεί υπόψη η τιμή των $\mathcal{E}(e_j,g_j)$.]

$j=1$ το σύστημα (2) περιορίζεται στην ισότητα

$$\mathcal{E}(e_1,g_1)=1 \underset{(1)}{\Leftrightarrow} \mathcal{E}(e_1,\delta_{11}e_1)=1 \Leftrightarrow \delta_{11}\mathcal{E}(e_1,e_1)=1 \Leftrightarrow \delta_{11}a_{11}=1.$$

$a_{11}=D(1)\neq 0$, από την τελευταία ισότητα βρίσκουμε $\boxed{\delta_{11}=\frac{1}{a_{11}}=\frac{D(0)}{D(1)}}$

$j=\lambda$ καθεμιά από τις $\lambda-1$ πρώτες εξισώσεις του συστήματος (2) γράφεται

$$\mathcal{E}(e_i,g_\lambda)=0 \underset{(1)}{\Leftrightarrow} \mathcal{E}\Big(e_i,\sum_{k=1}^{\lambda}\delta_{k\lambda}e_k\Big)=0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\lambda}\delta_{k\lambda}\mathcal{E}(e_i,e_k)=0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\lambda}\delta_{k\lambda}a_{ik}=0,$$

τελευταία μετασχηματίζεται ανάλογα στην $\sum_{k=1}^{\lambda}\delta_{k\lambda}a_\lambda k=1$. Επομένως,

$j=\lambda$ το σύστημα (2) με αγνώστους τα δ_{ij} είναι το

$$\begin{array}{ll} =1 \Rightarrow & \\ =2 \Rightarrow & \\ \vdots & (3) \\ =\lambda-1 \Rightarrow & \\ =\lambda \Rightarrow & \end{array}\left\{\begin{array}{l} a_{11}\delta_{1\lambda}+\dots+a_{1\lambda}\delta_{\lambda\lambda}=0 \\ a_{21}\delta_{1\lambda}+\dots+a_{2\lambda}\delta_{\lambda\lambda}=0 \\ \qquad\vdots \\ a_{(\lambda-1)1}\delta_{1\lambda}+\dots+a_{(\lambda-1)\lambda}\delta_{\lambda\lambda}=0 \\ a_{\lambda 1}\delta_{1\lambda}+\dots+a_{\lambda\lambda}\delta_{\lambda\lambda}=1 \end{array}\right. \quad \text{με ορίζουσα: } \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\lambda} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{\lambda 1} & \cdots & a_{\lambda\lambda} \end{vmatrix}=D(\lambda)\neq 0.$$

συνέπεια [illegible] ακριβώς μια λύση του συστήματος αυτού. Έτσι, υπολο- ται (για $j=\lambda$) [illegible] ζητούμενα $\delta_{1\lambda},\dots,\delta_{\lambda\lambda}$. Ανάλογα (για $\lambda=2,\dots,n$) υπολο- ται μονοσήμαντα όλα τα δ_{ij}.

α δ_{ij} έχουν υπολογισθεί έτσι, ώστε να ισχύει $\mathcal{E}(e_i,g_j)=0$ για $i\neq j$, απ' (όπως ήδη εξηγήσαμε) συνάγεται $\mathcal{E}(g_i,g_j)=0$ για $i\neq j$. Αυτό σημαίνει ότι, $g_1,\dots,g_n$ αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^n$ και ως προς τη βάση αυτή ισχύει $y_1,\dots,y_n$), τότε $\boxed{\tau(x)=\sum_{i=1}^{n} b_{ii}y_i^2, \text{ όπου } b_{ii}=\mathcal{E}(g_i,g_i)}$. Αλλά:

$$b_{ii}=\mathcal{E}(g_i,g_i)=\mathcal{E}\Big(\sum_{k=1}^{i}\delta_{ki}e_k,g_i\Big)=\sum_{k=1}^{i}\delta_{ki}\mathcal{E}(e_k,g_i)=\delta_{ii},$$

αφού $\mathcal{E}(e_k,g_i)=0$ για $k<i$ και $\mathcal{E}(e_i,g_i)=1$ (πρβλ. (2)). Όμως, από τ σύστημα (3) βρίσκουμε:

$$\delta_{\lambda\lambda}=\frac{1}{D(\lambda)}\left|\begin{array}{ccc:c} a_{11} & \cdots & a_{1\lambda} & 0 \\ a_{21} & \cdots & a_{2\lambda} & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{(\lambda-1)1} & \cdots & a_{(\lambda-1)\lambda} & 0 \\ \hdashline a_{\lambda 1} & \cdots & a_{\lambda\lambda} & 1 \end{array}\right| = \frac{1}{D(\lambda)}D(\lambda-1)=\frac{D(\lambda-1)}{D(\lambda)}.$$

Επομένως, ισχύει $\tau(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{D(i-1)}{D(i)}y_i^2$, όπως "*κατ' αρχήν*" επιδιώκαμε.

Στην κανονική παράσταση του $\tau(x)$ καταλήγουμε, θεωρώντας, αντί τη της $\{g_1,\dots,g_n\}$, τη βάση $\{h_1,\dots,h_n\}$ με $h_i=\sqrt{\left|\frac{D(i)}{D(i-1)}\right|}\,g_i$ για $i=1,\dots,n$.

Απομένει ν' αποδείξουμε ότι τα $g_1,\dots,g_n$ αποτελούν βάση του χώ $\mathbb{R}^n$, δηλαδή ότι ο ("διαγώνιος") πίνακας της (1) έχει ορίζουσα μη μηδεν

$$\begin{vmatrix} \delta_{11} & & & 0 \\ \delta_{12} & \delta_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \delta_{1n} & \delta_{2n} & \cdots & \delta_{nn} \end{vmatrix} = \delta_{11}\delta_{22}\cdots\delta_{nn}=\frac{D(0)}{D(1)}\cdot\frac{D(1)}{D(2)}\cdots\frac{D(n-1)}{D(n)}=\frac{D(0)}{D(n)}\neq 0.$$

17. Παράδειγμα. Έστω $\tau:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ μια τετραγωνική μορφή, που (προέρχε από ένα εσωτερικό γινόμενο $\mathcal{E}$ και) δίνεται από τον τύπο

$$\boxed{\tau((x_1,x_2,x_3))=x_1^2+x_2^2-x_3^2-2x_1x_3}$$

ως προς την κανονική βάση $\{e_1=(1,0,0),\ e_2=(0,1,0),\ e_3=(0,0,1)\}$ του Έστω ότι θέλουμε να βρούμε τον πίνακα της τ, τη βάση ως προς την οποία εκφράζεται με την κανονική της παράσταση, την κανονική παράσταση της τ κατά συνέπεια, το θετικό δείκτη της τ (πρβλ. 13.1). Ένας τρόπος να τα πετύχο αυτά, εφαρμόζοντας τη "μέθοδο Jakobi", είναι ο εξής:

Προκειμένου να γράψουμε το σύστημα (3) από το 16, πρέπει να υπολογί με τα $a_{ij}=\mathcal{E}(e_i,e_j)$. Επομένως, πρέπει να βρούμε τα $\mathcal{E}(e_i,e_j)$. Αυτό τυχαίνουμε με τον τύπο της σελίδας 5.

$$\boxed{\mathcal{E}(e_i, e_j) = \frac{1}{2}[\tau(e_i+e_j) - \tau(e_i) - \tau(e_j)]},$$

τον οποίο προκύπτει:

$$\left.\begin{aligned} a_{11} &= \mathcal{E}(e_1, e_1) = \tau(e_1) = \tau((1,0,0)) = 1, \\ a_{12} &= \mathcal{E}(e_1, e_2) = \frac{1}{2}[\tau((1,1,0)) - \tau((1,0,0)) - \tau((0,1,0))] \\ &= \frac{1}{2}[(1+1) - 1 - 1] = 0 \end{aligned}\right\}$$

ανάλογα (λαμβάνοντας υπόψη ότι ο <u>πίνακας</u> της τ είναι <u>συμμετρικός</u>): (1)

$$a_{13} = a_{31} = -1 \;,\; a_{21} = a_{12} = 0 \;,\; a_{22} = 1 ,$$

$$a_{23} = a_{32} = 0 \text{ και } a_{33} = -1.$$

μένως, ο <u>πίνακας</u> της τ είναι ο:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

ειδή οι τρεις <u>κύριες υποορίζουσες</u> του πίνακα αυτού είναι <u>μη μηδενικές</u>
)(1)=1, D(2)=1 και D(3)=−2), εφαρμόζεται η "μέθοδος Jakobi". Θέτου-
, λοιπόν

$$\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_{11} & & 0 \\ \delta_{12} & \delta_{22} & \\ \delta_{13} & \delta_{23} & \delta_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} g_1 &= \delta_{11} e_1 \\ g_2 &= \delta_{12} e_1 + \delta_{22} e_2 \\ g_3 &= \delta_{13} e_1 + \delta_{23} e_2 + \delta_{33} e_3 \end{aligned}\right\} (2)$$

αι θα προσδιορίσουμε τα δ_{ij} από τα συστήματα, που αντιστοιχούν στο
στημα (3) από το 16, για $j=1,2,3$. Θα κάνουμε τον υπολογισμό μόνο
α την περίπτωση $j=3$:

$$\begin{aligned} &\mathcal{E}(e_1, g_3) = 0 \underset{(2)}{\Leftrightarrow} \mathcal{E}(e_1, \sum_{k=1}^{3} \delta_{k3} e_k) = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{3} a_{1k}\delta_{k3} = 0 \underset{(1)}{\Rightarrow} \\ &\mathcal{E}(e_2, g_3) = 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Rightarrow \\ &\mathcal{E}(e_3, g_3) = 1 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Rightarrow \end{aligned} \boxed{\begin{aligned} \delta_{13} + 0 - \delta_{33} &= 0 \\ 0 + \delta_{23} + 0 &= 0 \\ -\delta_{13} + 0 - \delta_{33} &= 1 \end{aligned}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\delta_{13} = \delta_{33} = -\frac{1}{2} \;,\; \delta_{23} = 0}.$$

νάλογα βρίσκουμε: $\boxed{\delta_{11} = 1}$ (από την εξίσωση $\mathcal{E}(e_1, g_1) = 1 \Leftrightarrow a_{11}\delta_{11} = 1$)
κι $\boxed{\delta_{12} = 0 \;,\; \delta_{22} = 1}$ (από το σύστημα $\mathcal{E}(e_1, g_2) = 0$, $\mathcal{E}(e_2, g_2) = 1$).

Αντικαθιστώντας τις τιμές που βρήκαμε στις ισότητες (2), υπολογίζουμε:

$$g_1 = e_1 \;,\; g_2 = e_2 \text{ και } g_3 = -\frac{1}{2}(e_1 + e_2).$$

Επομένως, με το συμβολισμό από τη σελίδα 27, τα στοιχεία της <u>βάσης</u> το
$\mathbb{R}^3$, ως προς την οποία η τ παίρνει την κανονική της παράσταση, είναι τα

$$h_1 = \sqrt{\frac{1}{1}}\, g_1 = e_1 \;,\; h_2 = \sqrt{\frac{1}{1}}\, g_2 = e_2 \text{ και } h_3 = \sqrt{\left|\frac{-2}{1}\right|}\, g_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_3).$$

Κατά συνέπεια, αν $x = (z_1, z_2, z_3)$ ως προς τη βάση $\{h_1, h_2, h_3\}$ του $\mathbb{R}$
η <u>κανονική παράσταση</u> της τ (ως προς τη βάση αυτή) είναι η

$$\tau(x) = \sum_{i,j=1}^{3} \mathcal{E}(h_i, h_j) z_i z_j = \sum_{i=1}^{3} \mathcal{E}(h_i, h_i) z_i^2 = z_1^2 + z_2^2 - z_3^2$$

(πρβλ. σελ. 19), αφού, π.χ., $\mathcal{E}(h_3, h_3) = \frac{1}{2}\mathcal{E}(e_1 + e_3, e_1 + e_3) = \frac{1}{2}\tau((1,0,1)) = -1$.

Ο <u>θετικός δείκτης</u> της τ είναι, λοιπόν, ίσος με 2 (πρβλ. 14).

ΙΣΟΜΟΡΦΟΙ ΧΩΡΟΙ ΜΕ ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ

<u>18. Ορισμός.</u> Έστω $(V, \mathcal{E})$, $(V', \mathcal{E}')$ δύο "χώροι με εσωτερικό
νόμενο" (πρβλ. 4.1). Οι "χώροι" αυτοί θα λέγονται <u>ισόμορφοι</u>, αν υπάρ
ένας γραμμικός ισομορφισμός $f: V \to V'$, που "διατηρεί" τα εσωτερικ
γινόμενα, δηλαδή που έχει την ιδιότητα: $\mathcal{E}(x,y) = \mathcal{E}'(f(x), f(y)) \;\forall\, x, y \in$

<u>Πρόταση.</u> Οι "χώροι με εσωτερικό γινόμενο" $(\mathbb{R}^n, \mathcal{E})$ και $(\mathbb{R}^m, \mathcal{E}')$ ε
<u>ακριβώς τότε</u> ισόμορφοι, αν ισχύει $n=m$ και, επιπλέον, οι αντίστοιχες τ
ραγωνικές μορφές τ και τ' έχουν τον <u>ίδιο</u> θετικό δείκτη (πρβλ. 13.1).
<u>Απόδειξη.</u> Έστω ότι οι "χώροι" αυτοί είναι ισόμορφοι και ότι η $f: \mathbb{R}^n \to$
έχει τις ιδιότητες από τον προηγούμενο Ορισμό. Επειδή η f είναι γραμμικό
ισομορφισμός, ισχύει $\boxed{n=m}$ και, αν $\{e_1, \dots, e_n\}$ είναι μια ορθοκανονική β
του $\mathbb{R}^n$, η $\{e_1' = f(e_1), \dots, e_n' = f(e_n)\}$ είναι μια βάση του $\mathbb{R}^m$. Το ότι
πρώτη βάση είναι <u>ορθοκανονική</u> ισοδυναμεί με τα εξής (πρβλ. 15):

* Για $i \neq j$ τα e_i, e_j είναι <u>"κάθετα"</u>, δηλαδή $\boxed{\mathcal{E}(e_i, e_j) = 0}$.

* Κάθε e_i έχει "<u>μοναδιαίο μήκος</u>", δηλαδή $\boxed{|\tau(e_i)| = 1}$. (Η απόλυτη τι

ηκε, γιατί το $\tau(e_i)=\mathcal{E}(e_i,e_i)$ δεν είναι απαραίτητα θετικό, αφού δεν θε-
ούμε μόνο θετικά ορισμένες τετραγωνικές μορφές.)

Μετά τις επεξηγήσεις αυτές, είναι εύκολο να δούμε ότι και η βάση $\{e'_1,\dots,e'_n\}$ ιαι "ορθοκανονική":

$$\mathcal{E}'(e'_i,e'_j)=\mathcal{E}'(f(e_i),f(e_j))\underset{\text{πρβλ. 18}}{=\!=}\mathcal{E}(e_i,e_j)=\begin{cases}\pm1 & \text{για } i=j\\ 0 & \text{για } i\neq j\end{cases}.$$

ιό αυτό, από το 15 και από το 14, συνάγεται το ευθύ.

Αντίστροφα, έστω ότι ισχύει $n=m$ και ότι οι τ και τ' έχουν τον ίδιο δει-
δείκτη k. Θεωρούμε τις ορθοκανονικές βάσεις $\{e_1,\dots,e_n\}$, $\{g_1,\dots,g_n\}$
ν $\mathbb{R}^n$ και $\mathbb{R}^m$ αντίστοιχα. Ως προς αυτές οι τ και τ' παίρνουν τις κανονι-
ς τους παραστάσεις. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας, μπορούμε να υποθέ-
με ότι τα k πρώτα σημεία των παραστάσεων αυτών είναι θετικά. Τότε, θέτον-
ς $\boxed{f\left(\sum_{i=1}^{n}x_ie_i\right)=\sum_{i=1}^{n}x_ig_i}$, ορίζουμε ένα γραμμικό ισομορφισμό $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$,
ως διαπιστώνεται εύκολα. Επιπλέον, αφού οι βάσεις είναι ορθοκανονικές, ισχύουν:

$$\mathcal{E}\left(\sum_i x_ie_i,\sum_i y_ie_i\right)=\sum_{i,j}\mathcal{E}(e_i,e_j)x_iy_j=\sum_i\tau(e_i)x_iy_i,$$

$$\mathcal{E}'\left(f\left(\sum_i x_ie_i\right),f\left(\sum_i y_ie_i\right)\right)=\mathcal{E}'\left(\sum_i x_ig_i,\sum_i y_ig_i\right)=\sum_i\tau'(g_i)x_iy_i.$$

το ίδιο i, σύμφωνα με τις επιλογές που κάναμε πιο πάνω, αντιστοιχεί στα
i, g_i το ίδιο ε_i (πρβλ. 15), δηλαδή $\tau(e_i)=\tau'(g_i)=\varepsilon_i$. Από αυτό και τις
ηγούμενες ισότητες, προκύπτει ότι η f που ορίσαμε "διατηρεί" τα εσωτερικά
όμενα και η Πρόταση αποδείχτηκε.

ΑΤΙ ΜΑΣ ΕΝΔΙΑΦΕΡΟΥΝ ΚΑΙ ΟΧΙ ΘΕΤΙΚΑ ΟΡΙΣΜΕΝΕΣ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΕΣ ΜΟΡΦΕΣ;

19. Θα βοηθήσουμε τον αναγνώστη να δώσει μια απάντηση στο ερώτημα
τό, αναλύοντας μια διαδικασία εύρεσης των τύπων της Ειδικής Θεωρίας
ς Σχετικότητας στη "1-διάστατη περίπτωση" (για το χώρο):

Από το πείραμα των Michelson-Morley (η σχετική δημοσίευση έγινε το 1887)
έκυψε ότι η ταχύτητα του φωτός δεν εξαρτάται από τη σχετική κίνηση του

παρατηρητή, δηλαδή ότι για την ταχύτητα του φωτός δεν ισχύει "ο νόμος τ
πρόσθεσης των ταχυτήτων", που προέβλεπε η θεωρία του Galilei. Στη
ρία αυτή ο χώρος είναι "σχετικός", αλλά ο χρόνος "απόλυτος". Αυτό,
για τη "1-διάστατη περίπτωση", σημαίνει ότι, αν δυο συστήματα αναφ
κινούνται με ομαλή σχετική ταχύτητα υ, τότε οι συντεταγμένες x,x'
του "χώρου" και $t,t'\in\mathbb{R}$ του "χρόνου" συνδέονται με τις ισότητες:

$$\boxed{\begin{aligned}x'&=x+\upsilon t\\ t'&=t\end{aligned}}\qquad(1)$$

από τις οποίες προκύπτει ο "νόμος της πρόσθεσης των ταχυτήτων":

$$w'=\frac{dx'}{dt'}=\frac{d(x+\upsilon t)}{dt}=\frac{dx}{dt}+\upsilon=w+\upsilon.$$

Ο Einstein απέδωσε την ασυμφωνία του νόμου αυτού με το πείραμα στ
οι προηγούμενοι "μετασχηματισμοί" (1) δεν είναι σωστοί. Στη συνέχεια, θ
ζητήσουμε τους "σωστούς μετασχηματισμούς", δηλαδή τη "Γεωμετρία του Kle
που διέπει το "χωρό-χρόνο" $\mathbb{R}^2$ με συντεταγμένες x και t, ξεκινώντα
τη διαπίστωση του πειράματος ότι η ταχύτητα, c, του φωτός είναι στ

Θεωρώντας το $\mathbb{R}$ ως "χώρο" με συντεταγμένη x και παρατηρώντα
ακτίνα φωτός με κατεύθυνση προς τα δεξιά, θα έχουμε $c=\frac{x}{t}$. Για την
τ' αριστερά διάδοση του φωτός θα ισχύει $c=-\frac{x}{t}$, οπότε η σταθερότητα
c συνεπάγεται ότι οι ζητούμενοι "μετασχηματισμοί" πρέπει να "διατηρ
τις ισότητες $x=ct$ και $x=-ct$. Θέτοντας $\boxed{y=ct}$, οι ισότητες αυτές
φονται: $\boxed{x=y\ ,\ x=-y}$. Για "φυσικούς" λόγους, οι ζητούμενοι "μετασχημ
σμοί" πρέπει να είναι γραμμικοί. Αναζητάμε, λοιπόν, τους γραμμικούς μετασχηματ
του $\mathbb{R}^2=\{(x,y):x,y\in\mathbb{R}\}$, που "διατηρούν" τις προηγούμενες δυο ισότητες, δηλ
τους πίνακες $\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\\gamma&\delta\end{pmatrix}$ με $\alpha\delta\neq\beta\gamma$, που επαληθεύουν για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$ τις σχέσε

$$\underbrace{\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\\gamma&\delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(\alpha+\beta)x\\(\gamma+\delta)x\end{pmatrix}\text{ με }(\alpha+\beta)x=(\gamma+\delta)x\Leftrightarrow\boxed{\alpha+\beta=\gamma+\delta}}_{\text{για να "διατηρείται" η } x=y}\ ,\ \underbrace{\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\\gamma&\delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\-x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(\alpha-\beta)x\\(\delta-\gamma)x\end{pmatrix}\text{ με }(\alpha-\beta)x=(\Leftrightarrow\boxed{\alpha-\beta=}}_{\text{για να "διατηρείται" η } x=}$$

ια δεύτερη "φυσική" απαίτηση για τους ζητούμενους "μετασχηματισμούς" "να διατηρούνται οι όγκοι", δηλαδή η ορίζουσα του προηγούμενου πίνακα να αι με 1. Τα a, b, γ, δ θα υπολογιστούν, λοιπόν, από το σύστημα

$$a+b=\gamma+\delta\ ,\ a-b=\delta-\gamma\ ,\ a\delta-b\gamma=1,$$

το οποίο προκύπτει $a=\delta$, $b=\gamma$ και $a^2-b^2=1$. Επομένως, οι ζητούμε-μετασχηματισμοί" δίνονται από τους πίνακες της μορφής

$$\boxed{\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}\ ,\ \text{όπου } a^2-b^2=1}\ . \qquad (2)$$

α δώσουμε "φυσικό νόημα" στα a και b υποθέτουμε ότι $a \geq 1$, , οπότε $\boxed{b=-\sqrt{a^2-1}}$, και συνεχίζουμε ως εξής:

φαρμόζοντας τον τύπο $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ bx+ay \end{pmatrix}$ για

, έχουμε $ax+by=0 \Rightarrow ax+b(ct)=0 \Rightarrow a\frac{dx}{dt}=-bc \Rightarrow au=-bc$

$u=\sqrt{a^2-1}\,c \Rightarrow a^2u^2=(a^2-1)c^2 \Rightarrow \boxed{a=\frac{c}{\sqrt{c^2-u^2}} \text{ και } b=-\frac{u}{\sqrt{c^2-u^2}}}$.

$\boxed{c>u}$: η ταχύτητα του φωτός είναι μέγιστη ταχύτητα.

ένως:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{c}{\sqrt{c^2-u^2}} & -\frac{u}{\sqrt{c^2-u^2}} \\ -\frac{u}{\sqrt{c^2-u^2}} & \frac{c}{\sqrt{c^2-u^2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \underset{\substack{y=ct \\ y'=ct'}}{\Longrightarrow} \boxed{\begin{aligned} x' &= \frac{x-ut}{\sqrt{1-(\frac{u}{c})^2}} \\ t' &= \frac{-\frac{u}{c}x+ct}{\sqrt{1-(\frac{u}{c})^2}} \end{aligned}} \left.\vphantom{\begin{aligned} x' \\ t' \end{aligned}}\right\} \text{οι γνωστοί ως "μετασχηματισμοί του Lorentz}$$

δή η ταχύτητα του φωτός είναι σταθερή)

τασχηματισμοί" (του Lorentz) που βρήκαμε υποκαθιστούν τους "με-ηματισμούς του Galilei" (1) στα πλαίσια της "Ειδικής Θεωρίας της ικότητας". Από τους "μετασχηματισμούς του Lorentz" συνάγεται η "με-ή των μηκών" κατά την κίνηση:

$$\underbrace{|x_1'-x_2'|}_{\text{κό μήκος}} = \left|\frac{x_1-ut}{\sqrt{1-(\frac{u}{c})^2}} - \frac{x_2-ut}{\sqrt{1-(\frac{u}{c})^2}}\right| = \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{u}{c})^2}}\underbrace{|x_1-x_2|}_{\text{αρχικό μήκος}}$$

Από τα προηγούμενα συνάγεται ότι η "Γεωμετρία του Klein" στον που διέπει την "Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας" στη "1-διάστατη πε ση", χαρακτηρίζεται από την ομάδα $\mathbb{G}$ με πράξη τον πολλαπλασιασμό πινά όπου:

$$\mathbb{G}=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \text{ με } a^2-b^2=1\right\}$$

(: Είναι εύκολο να διαπιστωθεί ότι το σύνολο $\mathbb{G}$ περιέχει τον "ταυτοτικό πίνακα, είναι "κλειστό" ως προς τον πολλαπλασιασμό πινάκων και μ κάθε πίνακα $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ περιέχει και τον αντίστροφό του $\begin{pmatrix} a & -b \\ -b & a \end{pmatrix}$. Στ απόδειξη του τελευταίου χρησιμοποιείται η ισότητα $a^2-b^2=1$.)

Η ομάδα $\mathbb{G}$ κατανοείται καλύτερα, αν βρούμε τους γραμμικ ισομορφισμούς που "διατηρούν" την τετραγωνική μορφή $\tau : \mathbb{R}^2 \to$ με $\boxed{\tau((x,y))=x^2-y^2}$. Αν $f=\begin{pmatrix} a & b \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ είναι ένας απ' αυτούς, θα ισχύε

$$\tau((x,y))=\tau(f((x,y))) \Leftrightarrow x^2-y^2=(ax+by)^2-(\gamma x+\delta y)^2 \ \Big[\text{αφού: } [f((x,y))]^T=\begin{pmatrix} a & b \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ax+by \\ \gamma x+\delta y \end{pmatrix}\Big] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2-y^2=(a^2-\gamma^2)x^2+(b^2-\delta^2)y^2+2(ab-\gamma\delta)xy \quad \forall\ x,y \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{a^2-\gamma^2=1\ ,\ \delta^2-b^2=1 \text{ και } ab=\gamma\delta}\ .$$

Το σύστημα των τριών αυτών εξισώσεων λύνεται όπως το σύστημα τ σελίδας 11 και (επειδή $a\neq 0$, λόγω της πρώτης εξίσωσης) για $\lambda=\frac{\delta}{a}$ δί $\boxed{\lambda=\pm 1\ ;\ \delta=\lambda a \text{ και } \gamma=\frac{1}{\lambda}b}$, οπότε για $\lambda=1$ βρίσκουμε;

$$f=\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \quad \text{με } a^2-b^2=1,$$

δηλαδή $f \in \mathbb{G}$.

Επομένως, η θεώρηση και μη θετικά ορισμένων τετραγωνικών μ φών έχει (και όχι μόνο μαθηματικό) ενδιαφέρον. Τέτοιες τετραγωνι μορφές θα μας απασχολήσουν για λίγο αργότερα.

ΚΗΣΕΙΣ

Δείξετε ότι μια απεικόνιση $\tau:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι μια τετραγωνική
φή, που προέρχεται από ένα εσωτερικό γινόμενο $\mathcal{E}$, ακριβώς τότε,
ισχύει $\tau(\lambda x)=\lambda^2\tau(x)$ για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$, $x\in\mathbb{R}^n$ και, επιπλέον, η
κόνιση $\mathcal{E}:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, που ορίζεται από τον τύπο

$$\mathcal{E}(x,y)=\frac{1}{2}\left[\tau(x+y)-\tau(x)-\tau(y)\right]$$

βλ. την αντίστοιχη ισότητα της σελ. 5) είναι διγραμμική.

Έστω $V=C([0,1])$ ο γραμμικός χώρος (μη πεπερασμένης διάστα-
) των συνεχών συναρτήσεων με πεδίο ορισμού το $[0,1]$. Δείξετε ότι η
$V\to\mathbb{R}$ με $\tau(x)=\int_0^1 (x(t))^2dt$ είναι μια τετραγωνική μορφή στον V.

Δίνεται η απεικόνιση $\tau:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ με $\tau((x,y,z))=x^2-y^2-z^2+4xy$, όπου
υντεταγμένες x,y,z νοούνται ως προς την κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$. Δείξετε ότι η
ρίζει μια τετραγωνική μορφή στον $\mathbb{R}^3$ (π.χ., με τη βοήθεια της άσκησης 1)
υπολογίσετε τον πίνακά της, τη βάση ως προς την οποία παίρνει την κα-
ική της παράσταση, τον τύπο της κανονικής της παράστασης και το δε-
της δείκτη.

Θεωρούμε τους "χώρους με εσωτερικό γινόμενο" $(\mathbb{R}^3,\mathcal{E})$ και $(\mathbb{R}^3,\mathcal{E}')$,

$$\mathcal{E}((x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2))=2x_1x_2-y_1y_2+3z_1z_2$$

$$\mathcal{E}'((x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2))=x_1x_2+y_1y_2+y_2z_1+y_1z_2-z_1z_2.$$

γξετε, αν οι "χώροι" αυτοί είναι ισόμορφοι ή όχι.

Θέτοντας $\alpha=\cosh t=\frac{e^t+e^{-t}}{2}$ και $\beta=\sinh t=\frac{e^t-e^{-t}}{2}$ για $t\in\mathbb{R}$,
ου τα α και β είναι τέτοια, ώστε $f=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \beta & \alpha\end{pmatrix}$ όπως στη σελίδα 33,
είτε με μη παράμετρο t τις γραμμικές απεικονίσεις που "διατηρούν"
, $\tau:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ με $\tau((x,y))=x^2-y^2$ και συγκρίνετε το αποτέλεσμα με
ς τύπους του 6.1. [<u>Σημείωση:</u> Τα cosh, sinh λέγονται <u>υπερβολικό</u>
<u>ημίτονο</u> και <u>υπερβολικό ημίτονο</u> αντίστοιχα, επειδή η Γεωμετρία Klein
,τ) με το προηγούμενο τ λέγεται <u>(Υπερβολική) Γεωμετρία του Minkowski στο $\mathbb{R}^2$.</u>]

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΡΙΤΟ: Η Ευκλείδεια Γεωμετρία του $\mathbb{R}^n$

ΘΕΤΙΚΑ ΟΡΙΣΜΕΝΕΣ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΕΣ ΜΟΡΦΕΣ

<u>20.</u> Η <u>Ευκλείδεια Γεωμετρία του</u> $\mathbb{R}^n$ είναι η Γ.Κ. $(\mathbb{R}^n, \tau^+)$, όπου
η τ^+ είναι μια τετραγωνική μορφή με θετικό δείκτη $\boxed{k=n}$ (πρβλ. 13.1),
προέρχεται από ένα εσωτερικό γινόμενο $\mathcal{E}^+:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$. Για την ειδ
περίπτωση $n=2$ πρβλ. 6, 7, 8, 9 και 10. Όπως και στις παραγράφους αυτ
το πρόβλημα είναι να βρεθούν "λειτουργικές" παραστάσεις (ως προς κα
λλες βάσεις του $\mathbb{R}^n$) για τα στοιχεία της <u>ορθογώνιας ομάδας</u> $\mathbb{O}(\mathbb{R}^n)$ (π
5.(γ) και 6). Πριν ασχοληθούμε με το πρόβλημα αυτό, είναι σκόπιμο
κατανοήσουμε καλύτερα την τ^+, διερευνώντας ορισμένες ιδιότητές της:

<u>21. Πρόταση.</u> <u>(α)</u> Μια τετραγωνική μορφή, τ, στον $\mathbb{R}^n$ λέγεται <u>θετικά</u>
<u>ρισμένη</u>, αν ισχύει $\tau(x)=\mathcal{E}(x,x)>0$ για κάθε $x\neq\mathbb{O}$ (πρβλ. 4). Η τ
ναι θετικά ορισμένη <u>ακριβώς τότε</u>, αν έχει θετικό δείκτη ίσο με n, δηλαδή αν
Γ.Κ. $(\mathbb{R}^n,\tau)$ είναι η Ευκλείδεια Γεωμετρία του $\mathbb{R}^n$ (πρβλ. την Πρόταση στο 1
<u>(β) Κριτήριο του Sylvester.</u> Μια τετραγωνική μορφή τ στον $\mathbb{R}^n$ με αντί
χο πίνακα $A=(a_{ij})$ (πρβλ. 11) είναι θετικά ορισμένη <u>ακριβώς τότε</u>, αν
<u>θεμιά</u> από τις <u>κύριες ορίζουσες</u>, $D(m)$, του πίνακα A είναι <u>θετική</u> (πρβλ. 1
<u>Απόδειξη.</u> <u>(α)</u> Θεωρούμε τη βάση $\{h_1,\dots,h_n\}$ του $\mathbb{R}^n$, ως προς την ο
ισχύει $\tau(x)=\Sigma\,\varepsilon_i x_i^2$ με $\varepsilon_i=\pm1$ (πρβλ. 13.1). Αν η τ είναι θετικά ο
σμένη, θα ισχύει $\tau(h_i)=\varepsilon_i x_i^2>0$, απ' όπου έπεται $\varepsilon_i>0$ για κάθε i,
λαδή ότι ο θετικός δείκτης της τ ισούται με n. Το αντίστροφο αποδει
εται ανάλογα.

<u>(β)</u> Έστω $A=(a_{ij})$ με $a_{ij}=\mathcal{E}(e_i,e_j)$ ο πίνακας που αντιστοιχεί στην τ
προς τη βάση $\{e_1,\dots,e_n\}$ του $\mathbb{R}^n$. Συμβολίζουμε με $A(m)$ τον $(m\times m)$-υ
πίνακα του A που αντιστοιχεί στην κύρια υποορίζουσα $D(m)$. Ο πίνακας α
ορίζει τον περιορισμό της τ στον υπόχωρο $\{(x_1,\dots,x_m,0,\dots,0),\ x_i\in\mathbb{R}\}$
του $\mathbb{R}^n$. Αν υποθέσουμε ότι η τ είναι θετικά ορισμένη στον $\mathbb{R}^n$, τότε ο π

μός της στον $\mathbb{R}^m$ θα είναι μια, επίσης, θετικά ορισμένη τετραγωνική μορφή. μένως, σύμφωνα με το (α), θα υπάρχει μια βάση $\{h_1,\dots,h_m\}$ του $\mathbb{R}^m$, ώστε να ισχύει $\tau((x_1,\dots,x_m,0,\dots,0))=\sum x_i^2$. Αυτό σημαίνει ότι ο πί- κας που αντιστοιχεί στον περιορισμό της τ ως προς τη βάση αυτή θα ι ο "ταυτοτικός" I_m. Από αυτό και από το 12 συμπεραίνουμε ότι $=BA(m)B^T$, όπου ο B είναι ο πίνακας "αλλαγής βάσεων", οπότε η ζουσά του, $|B|$, δεν ισούται με μηδέν. Άρα:

$$1=|I_m|=|B||A(m)||B^T|=|B|^2|A(m)|\Rightarrow D(m)=|A(m)|>0.$$

δείξαμε, έτσι, το ευθύ.

Αντίστροφα, έστω ότι ισχύει $\boxed{D(m)>0}$ για κάθε $m\in\{1,\dots,n\}$. Τότε, ό- αποδείξαμε στο 16 (πρβλ. σελ. 27), ισχύει:

$$\boxed{\tau(x)=\sum_{\lambda=1}^{n}\frac{D(\lambda-1)}{D(\lambda)}x_i^2}.$$

την ισότητα αυτή, από την υπόθεση $D(\lambda)>0$ ($\because D(0)=1$) και από το προκύπτει ότι η τ είναι θετικά ορισμένη.

Πρόταση. Έστω $\gamma_1,\dots,\gamma_m\in\mathbb{R}^n$ με $m\leq n$. Έστω ότι η θετικά ορισμένη αγωνική μορφή $\tau:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ προέρχεται από το εσωτερικό γινόμενο $\mathcal{E}:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$. ε, ισχύει

$$D(\gamma_1,\dots,\gamma_m)=\begin{vmatrix}\mathcal{E}(\gamma_1,\gamma_1) & \mathcal{E}(\gamma_1,\gamma_2) & \cdots & \mathcal{E}(\gamma_1,\gamma_m)\\ \mathcal{E}(\gamma_2,\gamma_1) & \mathcal{E}(\gamma_2,\gamma_2) & \cdots & \mathcal{E}(\gamma_2,\gamma_m)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \mathcal{E}(\gamma_m,\gamma_1) & \mathcal{E}(\gamma_m,\gamma_2) & \cdots & \mathcal{E}(\gamma_m,\gamma_m)\end{vmatrix}\geqslant 0$$

μάλιστα, η ισότητα ισχύει ακριβώς τότε, αν τα γ_i είναι γραμμικά εξαρτημένα.

δειξη. Διακρίνουμε τις ακόλουθες δυο περιπτώσεις:

Τα γ_i είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Τότε, αποτελούν βάση ενός υπό- ι $\mathbb{R}^m$ του $\mathbb{R}^n$. Από την υπόθεση ότι η τ είναι θετικά ορισμένη, συνά- ότι ο περιορισμός της τ στον $\mathbb{R}^m$ θα είναι, επίσης, θετικά ορισμένη, σύμφωνα με το 21.(β), η ορίζουσα του πίνακα (a_{ij}), $i,j=1,\dots,m$,

του περιορισμού της τ στον $\mathbb{R}^m$ θα έχει θετική ορίζουσα. Αλλά, ως πρ τη βάση που θεωρούμε ισχύει $a_{ij}=\mathcal{E}(\gamma_i,\gamma_j)$. Επομένως αποδείξαμε ό όταν τα γ_i είναι γραμμικά ανεξάρτητα, έχουμε $D(\gamma_1,\dots,\gamma_m)>0$.

(II) Αν τα γ_i είναι γραμμικά εξαρτημένα, ισχύει $\boxed{\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\gamma_i=\Theta}$ για $\boxed{(\lambda_1,\dots,\lambda_m)\neq(0,\dots,0)}$. Συνεπώς, για $i=1,\dots,m$ έχουμε:

$$0=\mathcal{E}(\gamma_i,\Theta)=\mathcal{E}\Big(\gamma_i,\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\gamma_j\Big)=\sum\lambda_i\mathcal{E}(\gamma_i,\gamma_j).$$

Ορίζεται, έτσι, το επόμενο σύστημα με αγνώστους τα λ_i:

$$\begin{array}{lll}\text{για } i=1 & \Rightarrow & \mathcal{E}(\gamma_1,\gamma_1)\lambda_1+\dots+\mathcal{E}(\gamma_1,\gamma_m)\lambda_m=0\\ \text{για } i=2 & \Rightarrow & \mathcal{E}(\gamma_2,\gamma_1)\lambda_1+\dots+\mathcal{E}(\gamma_2,\gamma_m)\lambda_m=0\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ \text{για } i=m & \Rightarrow & \mathcal{E}(\gamma_m,\gamma_1)\lambda_1+\dots+\mathcal{E}(\gamma_m,\gamma_m)\lambda_m=0.\end{array}$$

Το σύστημα αυτό είναι ομογενές και έχει μια μη μηδενική λύση ($(\lambda_1,\dots,\lambda_m)\neq(0,\dots,0)$). Επομένως, η ορίζουσα των συντελεστών του ισ ται με μηδέν, δηλαδή $D(\gamma_1,\dots,\gamma_m)=0$ και η Πρόταση αποδείχτηκε.

23. Πόρισμα. Αν $\tau:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ είναι μια θετικά ορισμένη τετραγωνική μορ που προέρχεται από το εσωτερικό γινόμενο $\mathcal{E}:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, τότε για κά $x,y\in\mathbb{R}^n$ ισχύει $[\mathcal{E}(x,y)]^2\leq\mathcal{E}(x,x)\,\mathcal{E}(y,y)=\tau(x)\,\tau(y)$. Η ισότητα ισχύ ακριβώς τότε αν $x=\lambda y$ για κατάλληλο $\lambda\in\mathbb{R}$.

Πρόκειται για τη γνωστή ανισότητα "Cauchy-Schwarz". Για την απόδειξη του Πορίσματος αυτού αρκεί να εφαρμόσουμε την προηγούμενη Πρόταση για $\gamma_1=x$, $\gamma_2=y$ και να παρατηρήσουμε ότι $\mathcal{E}(x,y)=\mathcal{E}(y,x)$.

Παρατήρηση. Η προηγούμενη ανισότητα δεν ισχύει πάντα για μη θετικά σμένες τετραγωνικές μορφές. Για παράδειγμα, η ανισότητα "Cauchy-Schw δεν ισχύει για την τετραγωνική μορφή $\tau:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ με $\tau((x_1,x_2))=x_1^2-$ (πρβλ. σελ. 33) και τα $x=(1,0)$; $y=(0,1)$. Ας σημειωθεί ότι για την τε γωνική μορφή αυτή ισχύει $\tau((1,1))=0$, μολονότι $(1,1)\neq(0,0)$!

έννοια της γωνίας στην Ευκλείδεια Γεωμετρία του $\mathbb{R}^n$. Από το προηγού-
Πόρισμα για $\boxed{x,y\in\mathbb{R}^n-\{\mathbf{0}\}}$ συνάγεται:

$$\frac{[\mathcal{E}(x,y)]^2}{x,x)\,\mathcal{E}(y,y)} \leq 1 \Longrightarrow \frac{[\mathcal{E}(x,y)]^2}{\tau(x)\,\tau(y)} \leq 1 \Longrightarrow -1 \leq \frac{\mathcal{E}(x,y)}{\sqrt{\tau(x)}\sqrt{\tau(y)}} \leq 1.$$

νως, υπάρχει ακριβώς μια "γωνία" $\boxed{\vartheta\in[0,\pi)}$ έτσι, ώστε να ισχύει:

$$\boxed{\sigma\upsilon\nu\vartheta = \frac{\mathcal{E}(x,y)}{\tau(x)\,\tau(y)} = \frac{\mathcal{E}(x,y)}{\|x\|\cdot\|y\|}}.$$

νία" αυτή ορίζεται ως η γωνία των x και y στα πλαίσια της Ευ-
κας Γεωμετρίας του $\mathbb{R}^n$ που καθορίζεται από τη θετικά ορισμένη τε-
νική μορφή τ, που προέρχεται από το εσωτερικό γινόμενο $\mathcal{E}$. Ο ορισμός
συμφωνεί με τους τύπους που συνδέουν τις γωνίες των "διανυσμάτων"
πέδου με το συνηθισμένο ("Ευκλείδειο") εσωτερικό γινόμενο. Για συν-
θα γράφουμε $\boxed{\vartheta=\measuredangle(x,y)}$.
μβάνοντας υπόψη το 5.(ε), συμπεραίνουμε:

Κάθε $f\in\mathbb{O}(\mathbb{R}^n)$ "διατηρεί" τη $\measuredangle(x,y)$, δηλαδή ισχύει: $\measuredangle(x,y)=\measuredangle(f(x),f(y))$.

συνήθως, τα $x,y\in\mathbb{R}^n-\{\mathbf{0}\}$ θα λέγονται κάθετα (ως προς τη Γ.Κ. $(\mathbb{R}^n,\tau)$),
χύει $\mathcal{E}(x,y)=0$. Αυτό θα το συμβολίζουμε με $\boxed{x\perp y}$. Μια ορθοκανο-
βάση του $\mathbb{R}^n$ (ως προς την ίδια Γ.Κ.) αποτελείται από στοιχεία e_i,
$,n$, με $\boxed{\|e_i\|=1}$ και $e_i\perp e_j$ για $i\neq j$ (πρβλ. την απόδειξη της Πρό-
στο 18), οπότε $\boxed{\mathcal{E}(e_i,e_j)=0 \text{ για } i\neq j}$. Επειδή $\mathcal{E}(x,y)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_iy_j$, όπου
$\mathcal{E}(e_i,e_j)$ (πρβλ. 11), έχουμε:

Αν $\{e_1,\ldots,e_n\}$ είναι μια ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$ (ως προς την Ευ-
α Γεωμετρία του), τότε ισχύει $\mathcal{E}(x,y)=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}x_iy_i=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$ και, κατα
ια, αν $x,y\in\mathbb{R}^n-\{\mathbf{0}\}$ και $\vartheta=\measuredangle(x,y)$, ισχύει ο γνωστός τύπος:

$$\sigma\upsilon\nu\vartheta=\frac{x_1y_1+\cdots+x_ny_n}{\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}\,\sqrt{y_1^2+\cdots+y_n^2}}.$$

Παρατήρηση. Ο συγκεκριμένος ορισμός της έννοιας της "γωνίας" στην Ευκλείδεια Γεωμ
τρία του $\mathbb{R}^n$ και οι συνακόλουθοι τύποι, που προσιδιάζουν στους ήδη γνωστούς μ
οφείλονται στο ότι ισχύει το Πόρισμα 23! Στις υπόλοιπες "Γεωμετρίες" του $\mathbb{R}^n$, π
αντιστοιχούν σε τετραγωνικές μορφές με θετικό δείκτη μικρότερο του n, το
ρισμα αυτό δεν ισχύει και, έτσι, οι τύποι που συνδέουν στις "Γεωμετρίες" αυτέ
τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των "γωνιών" με "μετρικά μεγέθη" είναι πε
σότερο πολύπλοκοι. Αυτό το έχουμε ήδη διαπιστώσει στην περίπτωση της "Υπ
βολικής Γεωμετρίας" του "Επιπέδου του Poincaré".

"ΑΝΑΛΛΟΙΩΤΟΙ" ΥΠΟΧΩΡΟΙ ΓΙΑ ΤΙΣ ΟΡΘΟΓΩΝΙΕΣ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΙΣ ΤΗΣ ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΤΟΥ $\mathbb{R}^n$

25. Οι ιδιοτιμές των απεικονίσεων αυτών. Έστω $f\in\mathbb{O}(\mathbb{R}^n)$. Σύμφωνα με
5.(ε), αυτό είναι ισοδύναμο με το ότι η f είναι γραμμική και, επιπλέον, ε
την ιδιότητα $\boxed{\tau(x)=\tau(f(x))\ \forall\ x\in\mathbb{R}^n}$. Επειδή είναι γραμμική, η f ορ
ται από ένα $(n\times n)$-πίνακα Π, με την έννοια ότι ισχύει: $[f(x)]^T=\Pi x^T$
όπου $x=(x_1,\ldots,x_n)$. Αν η τ ορίζεται από τον πίνακα A (πρβλ. 11)
έχουμε:

$$\tau(x)=xAx^T \quad\text{και}\quad \tau(f(x))=(\Pi x^T)^TA(\Pi x^T)=x(\Pi^TA\Pi)x^T.$$

Επομένως, η ισότητα $\tau(x)=\tau(f(x))$ γράφεται: $xAx^T=x(\Pi^TA\Pi)$
Επειδή η ισότητα αυτή ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}^n$, πρέπει να ισχύει $A=\Pi^T$
απ' όπου (αν $|B|$ συμβολίζει την ορίζουσα του πίνακα B) έπεται

$$|A|=|\Pi^TA\Pi|=|\Pi^T|\,|A|\,|\Pi|=|\Pi|^2|A| \Longrightarrow \boxed{|\Pi|^2=1},$$

αφού για τις τετραγωνικές μορφές που θεωρούμε ισχύει $|A|\neq0$.

Αν υποθέσουμε ότι εργαζόμαστε ως προς μια ορθοκανονική βάση του
θα ισχύει $A=\mathrm{I}$, όπου I συμβολίζει τον "μοναδιαίο" πίνακα (πρβλ. 15), ο
οι δύο προηγούμενες ισότητες σε πλαίσιο αποδεικνύουν τον επόμενο ισχυρισμό

25.1. Ως προς μια ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$ και στα πλαίσια της Ευκλεί

<u>ετρίας</u> του $\mathbb{R}^n$, ισχύουν τ' ακόλουθα:
Η $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ είναι ορθογώνια απεικόνιση <u>ακριβώς τότε</u>, αν ορίζεται από
$(n \times n)$-πίνακα Π με την ιδιότητα $\mathbb{I} = \Pi^T \Pi$.
πομένως, ισχύει $|\Pi|^2 = 1$.

<u>ατήρηση.</u> Η ισότητα $|\Pi|^2 = 1$ <u>δεν</u> χαρακτηρίζει τα στοιχεία του $\mathbb{O}(\mathbb{R}^n)$.
<u>παράδειγμα</u>, η $h: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, που ορίζεται από τον πίνακα $\Pi = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,
την ιδιότητα $|\Pi|^2 = 1$ και, παρ' όλα αυτά, δεν είναι ορθογώνια απεικό-
, αφού: $h((1,1)) = (2,1)$ και $\tau((1,1)) = 1^2 + 1^2 \neq 2^2 + 1^2 = \tau(h((1,1)))$.
πό την άλλη μεριά, ο πίνακας $\Pi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, που ορίζει μια ορθογώνια
ιόνιση (πρβλ. σελ. 11), έχει την ιδιότητα $|\Pi| = -1$. Επομένως, η ισότητα
$= 1$ <u>δεν μπορεί ν' απλοποιηθεί</u> στην $|\Pi| = 1$.

. Έστω $\boxed{\xi \in \mathbb{R}}$ μια (μη μηδενική) <u>ιδιοτιμή</u> του $\Pi \in \mathbb{O}(\mathbb{R}^n)$, δηλαδή ενός πί-
α που ορίζει μια ορθογώνια απεικόνιση. Τότε, υπάρχει ένα (μη μηδενικό) <u>"ιδια-
νυσμα"</u> $\upsilon = \upsilon(\xi)$ έτσι, ώστε $\boxed{\Pi \upsilon^T = \xi \upsilon^T} \Rightarrow |\Pi| |\upsilon^T| = \xi |\upsilon^T| \Rightarrow |\Pi| = \xi$. Από την
ταία ισότητα και από το 25.1.(β) προκύπτει: $\boxed{\xi = \pm 1}$.
σημειωθεί ότι ο <u>1-διάστατος</u> υπόχωρος $V^1 = \{\lambda \upsilon : \lambda \in \mathbb{R}\}$, <u>που ορίζει το $\upsilon \neq \mathbb{O}$</u>,
μένει <u>"αναλλοίωτος"</u> από τον Π, δηλαδή ισχύει $\Pi(\lambda \upsilon)^T = \mu \upsilon^T$ για κα-
μηλο $\mu \in \mathbb{R}$, όπως διαπιστώνεται εύκολα: $\Pi(\lambda \upsilon)^T = \Pi \lambda (\upsilon)^T = \lambda (\Pi \upsilon^T) = (\lambda \xi) \upsilon^T$.

. Έστω, τώρα, $\xi = a + i\beta$ μια <u>μιγαδική</u> ιδιοτιμή του $\Pi \in \mathbb{O}(\mathbb{R}^n)$. Αν $\upsilon \neq \mathbb{O}$
ένα "ιδιοδιάνυσμα" της ιδιοτιμής αυτής, θα ισχύει $\boxed{(\Pi - (a + i\beta)\mathbb{I}) \upsilon^T = \mathbb{O}^T}$.
ιανυσματική" αυτή ισότητα ισοδυναμεί μ' ένα ομογενές σύστημα, που
στοιχεί στις ισότητες των στοιχείων των πινάκων–στηλών των δυο μελών
έχει ως αγνώστους τις συντεταγμένες του υ, οι οποίες (λόγω της ύπαρ-
του $a + i\beta$) πρέπει να είναι <u>μιγαδικές</u>. Επειδή η ορίζουσα των συντε-
ών του συστήματος αυτού, δηλαδή η $|\Pi - (a + i\beta)\mathbb{I}|$, ισούται με μη-

δέν (αφού το $a + i\beta$ είναι ιδιοτιμή του Π), το ομογενές αυτό σύστημα έχε
<u>μη μηδενική</u> λύση, έστω την:

$$\upsilon = (x_1 + iy_1, \ldots, x_n + iy_n) \in \mathbb{C}^n \Rightarrow \upsilon = \underbrace{(x_1 + \cdots + x_n)}_{x \in \mathbb{R}^n} + i\underbrace{(y_1, \ldots, y_n)}_{y \in \mathbb{R}^n} \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \upsilon = x + iy.$$

Αντικαθιστώντας τη λύση αυτή στο σύστημα, έχουμε:

$$((\Pi - a\mathbb{I}) - i\beta\mathbb{I})(x + iy)^T = \mathbb{O}^T \Leftrightarrow [(\Pi - a\mathbb{I})x^T + \beta\mathbb{I}y^T] + i[(\Pi - a\mathbb{I})y^T - \beta\mathbb{I}x^T$$

$$\Leftrightarrow (\Pi - a\mathbb{I})x^T + \beta\mathbb{I}y^T = \mathbb{O}^T \text{ και } (\Pi - a\mathbb{I})y^T - \beta\mathbb{I}x^T = \mathbb{O}^T$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\Pi x^T = a x^T - \beta y^T \text{ και } \Pi y^T = \beta x^T + a y^T}.$$

$\boxed{25.3.1.}$ Αν υποθέσουμε ότι τα x και y είναι <u>γραμμικά ανεξάρτητα</u>, θα ορίζουν
2-διάστατο υπόχωρο $V^2 = \{\lambda x + \mu y : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$ του $\mathbb{R}^n$, του οποίου (υπ
ρου) θ' αποτελούν βάση. Οι προηγούμενες ισότητες στο πλαίσιο δείχνουν ό
(στην περίπτωση αυτή) ο Π απεικονίζει τον υπόχωρο V^2 του $\mathbb{R}^n$ στον ε
του (αφού οι εικόνες Πx^T, Πy^T των στοιχείων της βάσης του απεικονίζον
σε στοιχεία του V^2).

Από τα προηγούμενα συνάγεται ότι: σε κάθε <u>μιγαδική ιδιοτιμή</u> $a + i$
Π, για την οποία είναι <u>γραμμικά ανεξάρτητα</u> τα x και y (που υπολογί
από το σύστημα $(\Pi - (a + i\beta)\mathbb{I})\upsilon^T = \mathbb{O}^T$ με τον τρόπο που διαγράψαμε πιο π
αντιστοιχεί ο <u>2-διάστατος</u> υπόχωρος $V^2 = \{\lambda x + \mu y : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$ του $\mathbb{R}^n$, που
μένει <u>"αναλλοίωτος"</u> ως προς Π.

Από τους προηγούμενους τύπους στο πλαίσιο, φαίνεται ότι <u>ο πίνακας</u>
<u>ριορισμού του Π</u> στον "αναλλοίωτο" υπόχωρο V^2 ως προς τη βάση του
είναι ο $\begin{pmatrix} a & -\beta \\ \beta & a \end{pmatrix}$, όπου $a + i\beta$ είναι η θεωρούμενη μιγαδική ιδιοτιμή του $\Pi \in$
Η ορίζουσα του πίνακα αυτού ισούται με $a^2 + \beta^2 > 0$. Επειδή ο πίνακας Π
ζει ορθογώνια απεικόνιση, ο περιορισμός του στον "αναλλοίωτο" υπόχωρο
θα ορίζει μια, επίσης, ορθογώνια απεικόνιση. Η ορίζουσα του αντίστοιχο
νακα είναι θετική. Όπως διαπιστώνεται από το 6.1, οι <u>στροφές</u> είναι
νες ορθογώνιες απεικονίσεις με θετική ορίζουσα. Επομένως: <u>ο περιορισμ</u>
<u>Π στον V^2 είναι στροφή</u>. Κατά συνέπεια, ως προς κατάλληλη βάση του V^2

σμός αυτός θα ορίζεται από ένα πίνακα της μορφής $\boxed{\begin{pmatrix} συν\vartheta & -ημ\vartheta \\ ημ\vartheta & συν\vartheta \end{pmatrix} = \Pi(\vartheta)}$.

ΛΟΠΟΙΗΜΕΝΗ ΜΟΡΦΗ ΕΝΟΣ ΠΙΝΑΚΑ ΠΟΥ ΟΡΙΖΕΙ ΜΙΑ ΟΡΘΟΓΩΝΙΑ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗ ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΤΟΥ $\mathbb{R}^n$

Πρόταση. Έστω $f \in \mathbb{O}(\mathbb{R}^n)$. Τότε, υπάρχει μια ορθοκανονική βάση του
, ως προς την οποία η f ορίζεται από ένα πίνακα της μορφής

$$\Pi^* = \begin{pmatrix} \pm 1 & & & & O \\ & 1 & & & \\ & & \Pi(\vartheta_1) & & \\ & O & & \ddots & \\ & & & & \Pi(\vartheta_\mu) \end{pmatrix}$$

το ενδεχόμενο να λείπουν τα ±1 και 1 ή ένα απ' αυτά, όπου $\Pi(\vartheta_i)$
βολίζει μια στροφή κατά γωνία ϑ_i.

δειξη. Έστω ξ_1 μια πραγματική ιδιοτιμή του πίνακα $\Pi = \Pi_1$ της f, π.χ., ως
ς την κανονική βάση του $\mathbb{R}^n$. Τότε, θα ισχύει $\xi_1 = \pm 1$ (πρβλ. 25.2). Έστω
να "ιδιοδιάνυσμα" της ξ_1 και $\upsilon_1^* = \frac{\upsilon_1}{\tau(\upsilon_1)} = \frac{\upsilon_1}{\|\upsilon_1\|}$. Το υ_1^* αποτελεί ορθοκα-
κή βάση για τον "αναλλοίωτο" 1-διάστατο υπόχωρο V_1^1 της f (πρβλ.
2). Έστω $\mathbb{R}^{n-1}$ ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$, που αποτελεί το "ορθοσυμπλήρωμα"
V_1^1. Για κάθε $x \in \mathbb{R}^{n-1} - \{\Theta\}$ ισχύει, λοιπόν, $x \perp \upsilon_1^*$, οπότε θα ισχύει
$f(x) \perp f(\upsilon_1^*)$, αφού $f(\upsilon_1^*) \in V_1^1$ και η f "διατηρεί" την ορθογωνιό-
α (πρβλ. 24.1). Επομένως, $f(x) \in \mathbb{R}^{n-1}$, απ' όπου έπεται ότι και ο $\mathbb{R}^{n-1}$
αμένει "αμετάβλητος" ως προς f. Επειδή $\mathbb{R}^n = V_1^1 \oplus \mathbb{R}^{n-1}$ και οι δύο
χωροι V_1^1 και $\mathbb{R}^{n-1}$ παραμένουν "αναλλοίωτοι" ως προς f, σύμφωνα
γνωστή Πρόταση από τη Γραμμική Άλγεβρα, η f θα ορίζεται από
πίνακα της μορφής

$$\begin{pmatrix} \xi_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \gamma_{22} & \gamma_{23} & \cdots & \gamma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \gamma_{n2} & \gamma_{n3} & \cdots & \gamma_{nn} \end{pmatrix},$$

$\Pi_2 = \begin{pmatrix} \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ \gamma_{n2} & \cdots & \gamma_{nn} \end{pmatrix}$ είναι ο περιορισμός του πίνακα της f στον $\mathbb{R}^{n-1}$
προς τη βάση $\{\upsilon_1^*, e_2^2, \ldots, e_n^2\}$, στην οποία τα e_i^2 αποτελούν ορθοκανονική

βάση του $\mathbb{R}^{n-1}$.

Θεωρούμε, τώρα, την $f|\mathbb{R}^{n-1} = f_1 : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^{n-1}$ με πίνακα τον Π_2. Αν
πίνακας αυτός έχει μια πραγματική ιδιοτιμή $\xi_2 = \pm 1$ (που θα είναι και ιδι
τιμή του Π_1, αφού $\Pi_1 = \begin{pmatrix} \xi_1 & \Theta \\ 0 & \Pi_2 \end{pmatrix}$), επαναλαμβάνουμε την προηγούμενη δι
διαδικασία. Έτσι, αν ο $\Pi = \Pi_1$ έχει τις πραγματικές ιδιοτιμές $\xi_i = \pm 1$ για $i=$
$=1, \ldots, r-1$, θα καταλήξουμε στην ακόλουθη μορφή του πίνακα της f

$$\begin{pmatrix} \xi_1 & & & & \Theta \\ & \ddots & & & \\ & & \xi_{r-1} & & \\ & & & \gamma_{rr} \cdots \gamma_{rn} & \\ & O & & \vdots \quad\quad \vdots & \\ & & & \gamma_{nr} \cdots \gamma_{nn} & \end{pmatrix}$$

ως προς τη βάση $\{\upsilon_1^*, \ldots, \upsilon_{r-1}^*, e_r^r, \ldots, e_n^r\}$, όπου τα $\upsilon_i = \|\upsilon_i\| \upsilon_i^*$ εί
"ιδιοδιανύσματα" του Π, που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές ξ_i και ορίζουν
"αναλλοίωτους" 1-διάστατους υπόχωρους V_i^1 για την f. Ο πίνακας Π_r
$\begin{pmatrix} \gamma_{rr} & \cdots & \gamma_{rn} \\ \vdots & & \vdots \\ \gamma_{nr} & \cdots & \gamma_{nn} \end{pmatrix}$ αντιστοιχεί στον περιορισμό της Π στον υπόχωρο $\mathbb{R}^{n-r+1}$
$\mathbb{R}^n$, ο οποίος παραμένει "αναλλοίωτος" για την f, επειδή αποτελεί "ορθ
συμπλήρωμα" του υπόχωρου που παράγουν τα $\upsilon_1^*, \ldots, \upsilon_{r-1}^*$.

Αν οι $\xi_1, \ldots, \xi_{r-1}$ είναι όλες οι πραγματικές ιδιοτιμές του Π, ο πίνακ
Π_r δεν θα έχει πραγματικές ιδιοτιμές. Σε μια μιγαδική ιδιοτιμή του $\alpha + i$
σύμφωνα με το 25.3 και με τον εκεί συμβολισμό, θ' αντιστοιχούν τα x
y έτσι, ώστε: $\Pi_r x^T = \alpha x^T - \beta y^T$ και $\Pi_r y^T = \beta x^T + \alpha y^T$. Τα x και y είνα
γραμμικά ανεξάρτητα: αν όχι, θα υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ με $x = \lambda y$, οπότε

$$\Pi_r y^T = \beta x^T + \alpha y^T = \beta(\lambda y)^T + \alpha y^T = \lambda\beta y^T + \alpha y^T = (\lambda\beta + \alpha) y^T,$$

που είναι άτοπο, επειδή $\lambda\beta + \alpha \in \mathbb{R}$ και ο Π_r δεν έχει πραγματικές ιδιοτι

Ικανοποιείται, λοιπόν, εδώ η υπόθεση του 25.3.1, από τα συμπεράσματ
οποίου συνάγεται ότι ο 2-διάστατος υπόχωρος V_1^2 του $\mathbb{R}^{n-r+1}$ που ορίζουν τ
και y είναι "αναλλοίωτος" ως προς f και ότι ο περιορισμός του Π_r
V_1^2 ως προς μια ορθοκανονική βάση του είναι ο πίνακας $\Pi(\vartheta_1')$ για κατά

νία ∂_1'. Με ανάλογους συλλογισμούς όπως πριν, ότι ο πίνακας Π_r παίρνει
μορφή

$$\begin{pmatrix} \Pi(\partial_1') & & \Theta & \\ \Theta & \gamma_{(r+1)(r+1)} & \cdots & \gamma_{(r+1)n} \\ & \vdots & & \\ & \gamma_{n(r+1)} & \cdots & \gamma_{nn} \end{pmatrix}$$

προς μια βάση του $\mathbb{R}^{n-r+1}$, που θ' αποτελείται από την ορθοκανονική
ση του V_1^2 που προαναφέραμε και από μια ορθοκανονική βάση του "ορ-
συμπληρώματος" του V_1^2 στον $\mathbb{R}^{n-r+1}$.

Ας σημειωθεί ότι θα καταλήγαμε σε τελείως αντίστοιχα συμπεράσματα,
αντί της ιδιοτιμής $a+ib$, θεωρούσαμε την $a-ib$ (που είναι, επίσης, ιδιο-
του Π_r). Γι' αυτό αγνοούμε την ιδιοτιμή $a-ib$. Το γεγονός ότι οι μιγαδι-
ιδιοτιμές παρουσιάζονται ανά ζευγάρια αντανακλάται στο ότι σε μια μι-
κή ιδιοτιμή αντιστοιχεί ένας 2-διάστατος "αναλλοίωτος" υπόχωρος. Ο-
λοιπόν, θα μιλάμε στη συνέχεια για "διαφορετικές" μιγαδικές ιδιοτιμές, θα
ούμε διαφορετικές και μη "συζυγείς". Παρατηρούμε, τέλος, ότι (λόγω
προηγουμένων) ο αριθμός $n-r+1$ πρέπει να είναι άρτιος.

Επαναλαμβάνοντας την αμέσως προηγούμενη διαδικασία για όλες τις
φορετικές" μιγαδικές ιδιοτιμές, συμπεραίνουμε ότι υπάρχει μια βάση
$\ldots, e_n^*\}$ του $\mathbb{R}^{n-r+1}$, ως προς την οποία ο Π_r παίρνει τη μορφή

$$\begin{pmatrix} \Pi(\partial_1') & & \Theta \\ & \ddots & \\ \Theta & & \Pi(\partial_m') \end{pmatrix},$$

$2m=n-r+1$.

υνδυάζοντας τη μορφή αυτή του Π_r με τη μορφή του Π από την προηγού-
σελίδα, καταλήγουμε στο ότι ο Π παίρνει τη μορφή

$$\begin{pmatrix} \xi_1 & & & & & \\ & \ddots & & & \Theta & \\ & & \xi_{r-1} & & & \\ & & & \Pi(\partial_1') & & \\ & \Theta & & & \ddots & \\ & & & & & \Pi(\partial_m') \end{pmatrix}$$

ως προς τη βάση $\{v_1^*, \ldots, v_{r-1}^*, e_r^*, \ldots, e_n^*\}$ του $\mathbb{R}^n$.

Από τη μορφή αυτή, που είναι πρόσφορη στους υπολογισμούς, φτάνουμε στη
μορφή Π^* (πρβλ. την εκφώνηση της Πρότασης) με την ακόλουθη διαδικασία:
Αναδιατάσσουμε τα στοιχεία της προηγούμενης βάσης έτσι, ώστε τα v_i^* που αντ
στοιχούν στα $\xi_i=-1$ να είναι πρώτα. Σε δυο διαδοχικά τέτοια ξ_i αντιστοιχεί
ένας (2x2)-υποπίνακας της μορφής: $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{συν}\pi & -\text{ημ}\pi \\ \text{ημ}\pi & \text{συν}\pi \end{pmatrix} = \Pi(\pi)$. Επομ
νως, ο υποπίνακας $\Pi(\pi)$ υποκαθιστά δυο διαδοχικά -1 στον πίνακα της f ως
προς την προηγούμενη βάση. Ανάλογα εργαζόμαστε και για τα $\xi_i=1$, λαμβάνον
τας υπόψη ότι $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{συν}0 & -\text{ημ}0 \\ \text{ημ}0 & \text{συν}0 \end{pmatrix} = \Pi(0)$.

27. Παρατηρήσεις – Παραδείγματα.

27.1. Η προηγούμενη Πρόταση δείχνει ότι, όπως και στην ειδική περίπτωση $n=2$
(πρβλ. 6), έτσι και στη γενική περίπτωση υπάρχουν ορθοκανονικές βάσεις, ω
προς τις οποίες οι ορθογώνιες απεικονίσεις παίρνουν μια, πράγματι, απλή μορ
Το βασικό μειονέκτημα είναι ότι σε κάθε $f \in \mathbb{O}(\mathbb{R}^n)$ αντιστοιχεί, εν γένει,
μια, ιδιαίτερη για την f, ορθοκανονική βάση, ως προς την οποία ο πίνακας τ
f παίρνει απλή μορφή. Έτσι, π.χ., οι απλοποιημένες μορφές δεν προσφέρονται
τόσο για τη μελέτη της δομής της ομάδας $\mathbb{O}(\mathbb{R}^n)$.

27.2. Όσον αφορά, τώρα, στις μεθόδους για την επίλυση προβλημάτων της Ευκ
δειας Γεωμετρίας του $\mathbb{R}^n$, υπάρχει μια πολυμορφία εξαιτίας της οποίας, (τουλάχ
στο για μεγάλα n, όπου οι υπολογιστικές διαδικασίες είναι πολύπλοκες) κοντά σ
αποδεδειγμένα αποτελεσματικές γενικές μεθόδους, απαιτείται και ευρηματικότητ
Προκειμένου να εφαρμόσουμε γενικές διαδικασίες, αναγκαζόμαστε συνήθως να
ρικοποιούμε τα προβλήματα. Για παράδειγμα, ενώ μια "επιφάνεια 2ου βαθμ
θα έπρεπε να ορισθεί ως ο "γεωμετρικός τόπος" των σημείων $x=(x_1,\ldots,x_n)$
οι συντεταγμένες των οποίων ικανοποιούν μια εξίσωση της μορφής $\sum a_{ij}x_ix_j+\sum b_ix_i$
$=0$ χωρίς κανένα άλλο περιορισμό, η θεωρία των "επιφανειών 2ου βαθμού" αν

ισεται με βάση τον επόμενο (περιοριστικό) γνωστό μας ορισμό:
σμός. Μια τετραγωνική "υπερεπιφάνεια" στον $\mathbb{R}^n$ είναι ο "γεωμετρικός τό-
των σημείων $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, οι συντεταγμένες των οποίων ικανοποιούν
εξίσωση της μορφής $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j + 2\sum_{i=1}^{n} b_ix_i + \gamma = 0$, όπου η $\tau:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
$\tau(x)=\sum a_{ij}x_ix_j$ είναι μια τετραγωνική μορφή (πρβλ. 4 και 11).
περιορισμός ότι το $\sum a_{ij}x_ix_j$ ορίζεται από μια "τετραγωνική μορφή" μας
ολύνει στην ακόλουθη κατεύθυνση: Η προηγούμενη εξίσωση γράφεται

$$(x_1,\dots,x_n)\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + 2(b_1,\dots,b_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \gamma = 0.$$

ιή αναφερόμαστε στην Ευκλείδεια Γεωμετρία του $\mathbb{R}^n$ θα θεωρούμε μό-
ορθοκανονικές βάσεις. Ως προς τέτοιες βάσεις (όπως είναι γνωστό, πρβλ.
εαδάκη: Γραμμική Άλγεβρα, Πρόταση 7.5.4) ένας συμμετρικός πίνακας
"αυτοδυϊκός" και, κατά συνέπεια ο πίνακας (a_{ij}) έχει πραγματικές
μές και υπάρχει μια ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$, που αποτελείται
"ιδιοδιανύσματα" του (a_{ij}) (πρβλ. Ανδρεαδάκη: Γραμμική Άλγεβρα,
μα 7.5.10). Ως προς τη βάση αυτή ο προηγούμενος πίνακας γίνεται
ώνιος" και τα στοιχεία της διαγωνίου είναι οι (πραγματικές) ιδιοτιμές
$i=1,\dots,n$. Κατά συνέπεια, η προηγούμενη εξίσωση μετασχηματίζεται στην:
$\boxed{\ {}_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} b_iy_i + \gamma = 0}$, όπου y_i είναι οι συντεταγμένες ως προς τη θεωρούμενη βάση.
οφανώς, το "δευτεροβάθμιο μέρος" της εξίσωσης αυτής δεν απλοποιείται
ιτερο. Είναι ενδεχόμενο ν' απλοποιείται το "πρωτοβάθμιο μέρος" με τη
α κατάλληλης "μεταφοράς".

Με μια "μεταφορά" αλλάζουμε την "αρχή των αξόνων", ενώ το "δευτερο-
μέρος" της εξίσωσης δεν μεταβάλλεται: Αν $a=(a_1,\dots,a_n)$ είναι το
μα" της "μεταφοράς", οι συντεταγμένες y_i συνδέονται με τις καινού-
ντεταγμένες z_i σύμφωνα με τους τύπους: $z_i = y_i + a_i$, απ' όπου έπεται
${}^2 + 2a_iz_i + a_i^2$ και η προηγούμενη εξίσωση μετασχηματίζεται στην

$\sum \lambda_i(z_i^2 + 2a_iz_i + a_i^2) + 2\sum b_i(z_i - a_i) + \gamma = 0 \Leftrightarrow \sum \lambda_iz_i^2 + 2\sum(a_i\lambda_i + b_i)z_i + \gamma'$
όπου $\gamma' = \gamma + \sum \lambda_ia_i^2 - 2\sum a_ib_i$.

Ο ρόλος της κατάλληλης "μεταφοράς" είναι σημαντικός στην περίπτωση
τετραγωνικών "υπερεπιφανειών" με "κέντρο-συμμετρίας". Λέμε ότι μια τετραγω
"υπερεπιφάνεια" είναι "κεντρική", αν υπάρχει ακριβώς ένα σημείο $u=(u_1,\dots$
και μια βάση του $\mathbb{R}^n$ με "αρχή αξόνων" (μετά από μια "μεταφορά") το u έτσι, ώστ
ως προς τη βάση αυτή η εξίσωση της υπόψη τετραγωνικής "υπερεπιφάνει
να παίρνει τη μορφή $\boxed{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j + c = 0}$. Το σημείο u λέγεται "κέντρο"
της "υπερεπιφάνειας", επειδή, αν το $(x_1,\dots,x_n)$ επαληθεύει την προηγού
νη εξίσωση, τότε και το $(-x_1,\dots,-x_n)$, δηλαδή το συμμετρικό σημείο
του προηγούμενου ως προς u, την επαληθεύει επίσης.

27.4. Πρόταση. Μια τετραγωνική "υπερεπιφάνεια" μ' εξίσωση $\sum a_{ij}x_ix_j$ -
$+2\sum b_ix_i + \gamma = 0$ είναι ακριβώς τότε "κεντρική", αν η ορίζουσα του πίνα
(a_{ij}) δεν ισούται με μηδέν.

Απόδειξη. Έστω ότι το $u=(u_1,\dots,u_n)$ είναι το "κέντρο" της "υπερεπιφάνεια
Θέτοντας $\boxed{y_i = x_i + u_i}$ "μεταφέρουμε" την "αρχή των αξόνων" στο u, ω
τε η εξίσωση της "υπερεπιφάνειας" θα πάρει τη μορφή $\sum a_{ij}y_iy_j + c = 0$. Α
η προηγούμενη "μεταφορά" μετασχηματίζει την εξίσωση της "υπερεπιφάνειας" στ

$$\sum_{i,j} a_{ij}(y_i - u_i)(y_j - u_j) + 2\sum_i b_i(y_i - u_i) + \gamma = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i,j} a_{ij}y_iy_j - \sum_i\Big(\sum_j a_{ij}u_j\Big)y_i - \sum_i\Big(\sum_j a_{ji}u_j\Big)y_i + 2\sum_i b_iy_i + \overbrace{\Big(\gamma + \sum_{i,j} a_{ij}u_iu_j - 2\sum_i b_iu_i\Big)}^{\gamma^*} =$$

(ο πίνακας (a_{ij}) υποτίθεται συμμετρικός $\Rightarrow a_{ij} = a_{ji}$)

$$\Leftrightarrow \qquad \sum_{i,j} a_{ij}y_iy_j + 2\sum_{i=1}^{n}\Big(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}u_j\Big)y_i + \gamma^* = 0.$$

Για να έχει η εξίσωση αυτή τη μορφή $\sum a_{ij}y_iy_j + c = 0$, πρέπει να ισχύει:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}u_j = b_i \qquad \text{για } i=1,\dots,n.$$

ιάνουμε, έτσι, στο σύστημα

$i=1 \qquad a_{11}u_1+a_{12}u_2+\dots+a_{1n}u_n=b_1$

$i=2 \qquad a_{21}u_1+a_{22}u_2+\dots+a_{2n}u_n=b_2$

$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$

$=n \qquad a_{n1}u_1+a_{n2}u_2+\dots+a_{nn}u_n=b_n$

αγνώστους τα $u_1,\dots,u_n$, που έχει ακριβώς μια λύση. Επομένως, η ορίζουσα $|(a_{ij})|$ των συντελεστών του είναι διάφορη του μηδενός.

Το αντίστροφο αντιμετωπίζεται ανάλογα.

5. Παράδειγμα. Ως προς την "κανονική βάση" του $\mathbb{R}^3$ και τη συνηθισμένη του Ευκλείδεια Γεωμετρία (που ορίζει η $\tau:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ με $\tau((x_1,x_2,x_3))=$ $x_1^2+x_2^2+x_3^2$), ενδιαφερόμαστε για την τετραγωνική "υπερεπιφάνεια", που αντιστοιχεί στην εξίσωση: $\boxed{x_1^2+x_2^2+x_3^2-4x_1x_3+2x_1-2x_2+2x_3+\gamma=0}$. αι φανερό ότι εδώ έχουμε $a_{11}=a_{22}=a_{33}=1$, $a_{13}=a_{31}=\frac{1}{2}(-4)=-2$ και $=a_{21}=a_{23}=a_{32}=0$. Επομένως, ο πίνακας του "δευτεροβάθμιου μέρους" εξίσωσης αυτής είναι ο

$$\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&1&0\\-2&0&1\end{pmatrix} \text{ με } |(a_{ij})|=\begin{vmatrix}1&0&-2\\0&1&0\\-2&0&1\end{vmatrix}=-3\neq 0 \text{ και ιδιοτιμές } -1,1,3.$$

Σύμφωνα με το 27.4, η εξίσωση αυτή αντιστοιχεί σε "κεντρική" τετραγωνική "υπερεπιφάνεια" (αν, βέβαια, υπάρχουν σημεία του $\mathbb{R}^3$ που την επαληθεύουν). Το "κέντρο" της "υπερεπιφάνειας" αυτής είναι η μοναδική λύση

συστήματος

$$\begin{aligned} u_1-2u_3&=1\\ u_2\quad&=-1\\ -2u_1+u_3&=1\end{aligned}$$

, αφού το "πρωτοβάθμιο μέρος" της ωσης είναι το $2(x_1-x_2+x_3)+\gamma$. Επομένως, το "κέντρο" είναι το είο $u=(-1,-1,-1)$.

' αναζητήσουμε τώρα μια ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^3$, ως προς την

οποία η εξίσωση που μας δόθηκε παίρνει πολύ απλή μορφή:

Το "δευτεροβάθμιο μέρος" απλοποιείται, αν θεωρήσουμε μια ορθοκανική βάση του $\mathbb{R}^3$ από "ιδιοδιανύσματα" του προηγούμενου πίνακα. Ένα "διάνυσμα" (x,y,z) που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ υπολογίζεται από

ισότητα $\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&1&0\\-2&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$. Για $\lambda=-1$, $\lambda=1$ και $\lambda=3$ βρίσκουν

τα "ιδιοδιανύσματα" θα είναι της μορφής $(x,0,x)$, $(0,y,0)$ και $(z,0,$ αντίστοιχα. Πρόκειται, προφανώς, για ανά δυο κάθετα "διανύσματα" ν' αποτελούν ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^3$, πρέπει να ισχύουν: $x=z=\frac{\sqrt{2}}{2}$ Επομένως, μια κατάλληλη ορθοκανονική βάση είναι η:

$$\{(\tfrac{\sqrt{2}}{2},0,\tfrac{\sqrt{2}}{2}),(0,1,0),(\tfrac{\sqrt{2}}{2},0,-\tfrac{\sqrt{2}}{2})\}.$$

Ο πίνακας "αλλαγής βάσης" από την "κανονική" στην προηγούμενη είν

$\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&0&\frac{\sqrt{2}}{2}\\0&1&0\\\frac{\sqrt{2}}{2}&0&-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$ και είναι ίσος με τον "αντίστροφό" του. Η "αλλαγή των τεταγμένων" θα γίνεται, λοιπόν, σύμφωνα με τον τύπο: $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&0&\frac{\sqrt{2}}{2}\\0&1&0\\\frac{\sqrt{2}}{2}&0&-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y\\y\\y\end{pmatrix}$

Αντικαθιστώντας τις τιμές των x_1, x_2, x_3 στην αρχική εξίσωση, την με σχηματίζουμε στην $-y_1^2+y_2^2+3y_3^2+2\sqrt{2}y_1-2y_2+\gamma=0$, η οποία απλουστεύεται ακόμα περισσότερο με τη διαδικασία που περιγράψαμε στο 27.3.

Η ΟΡΘΟΓΩΝΙΑ ΟΜΑΔΑ ΓΙΑ ΤΙΣ "ΜΗ ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΕΣ" ΓΕΩΜΕΤΡΙΕΣ ΤΟΥ $\mathbb{R}^n$

28. Ας θεωρήσουμε, τώρα, μια τετραγωνική μορφή $\tau_k:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ με δείκτη δε $k<n$. Η "Μη Ευκλείδεια" Γεωμετρία, που αντιστοιχεί στην τ_k θα χαρακτηρίζεται από τις "ορθογώνιες απεικονίσεις", οι οποίες "διατηρούν" την τ_k. προς μια ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$ ο πίνακας της τ_k θα έχει τη μορφή $I\!I_k$ όπου:

$$I\!I_k=\begin{pmatrix}\overbrace{1\ \ddots\ 1}^{k \text{ φορές}} & & 0\\ & -1 & \\ 0 & & \ddots\ -1\end{pmatrix}$$

ένως, αν A είναι ο πίνακας μιας "ορθογώνιας απεικόνισης" $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ως
τ_k, επειδή ισχύει $\tau_k(x-y)=\tau_k(f(x)-f(y))=\tau_k(f(x-y))$ και αυτό,
της "γραμμικότητας" της f, είναι ισοδύναμο με $\boxed{\tau_k(x)=\tau_k(f(x))}$, ο πί-
ς της A χαρακτηρίζεται από το ότι ικανοποιεί την ισότητα

$$\tau_k(x)=(x_1,\dots,x_n)\,\mathbb{I}_k\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\left(A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\right)^T\mathbb{I}_k\left(A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\right)=\tau_k(f(x))$$

άθε $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$. Άρα ο πίνακας $\boxed{A\in\mathbb{O}_k(\mathbb{R}^n)}$ (: το σύνολο των
ώνιων" απεικονίσεων ως προς τ_k) χαρακτηρίζεται από την ισότητα
$\boxed{A^T\mathbb{I}_k A}$, από την οποία έπεται: $|\mathbb{I}_k|=|A^T\mathbb{I}_k A|=|A|^2|\mathbb{I}_k| \Rightarrow \boxed{|A|=\pm 1}$.
α κλείσουμε, αποδεικνύοντας την ακόλουθη

ση. Το $\mathbb{O}_k(\mathbb{R}^n)$ είναι υποομάδα της "γενικής γραμμικής ομάδας" $Gl(n,\mathbb{R})$.

ξη. Αρκεί ν' αποδείξουμε ότι το $\mathbb{O}_k(\mathbb{R}^n)$ είναι κλειστό ως προς τον πολ-
σιασμό πινάκων και την απεικόνιση, που αντιστοιχεί ένα πίνακα στον
ροφό του:

τω $A,B\in\mathbb{O}_k(\mathbb{R}^n)$. Πρέπει ν' αποδείξουμε ότι $\mathbb{I}_k=(AB)^T\mathbb{I}_k(AB)$:

$$\mathbb{I}_k(AB)=B^T(A^T\mathbb{I}_k A)B \underset{A\in\mathbb{O}_k(\mathbb{R}^n)}{=\!=\!=} B^T\mathbb{I}_k B \underset{B\in\mathbb{O}_k(\mathbb{R}^n)}{=\!=\!=} \mathbb{I}_k.$$

λος, μένει ν' αποδείξουμε ότι, αν $A\in\mathbb{O}_k(\mathbb{R}^n)$, τότε ισχύει $\mathbb{I}_k=(A^{-1})^T\mathbb{I}_k A^{-1}$.
οδείξουμε πρώτα ότι $\boxed{A^T=\mathbb{I}_k A^{-1}\mathbb{I}_k^{-1}}$ (1):

$$A^{-1}\mathbb{I}_k^{-1}=\mathbb{I}_k(\mathbb{I}_k A)^{-1} \underset{A\in\mathbb{O}_k(\mathbb{R}^n)}{=\!=\!=} \mathbb{I}_k\left((A^T)^{-1}\mathbb{I}_k\right)^{-1}=(\mathbb{I}_k\mathbb{I}_k^{-1})A^T=A^T.$$

, έχουμε:

$$1)^T\mathbb{I}_k A^{-1}=(A^T)^{-1}\mathbb{I}_k A^{-1} \underset{(1)}{=} (\mathbb{I}_k A^{-1}\mathbb{I}_k^{-1})^{-1}\mathbb{I}_k A^{-1}$$

$$=(\mathbb{I}_k A)(\mathbb{I}_k^{-1}\mathbb{I}_k)A^{-1}=\mathbb{I}_k(AA^{-1})=\mathbb{I}_k$$

α Πρόταση αποδείχτηκε.

ήρηση. Ο τρόπος δουλειάς στις "Μη Ευκλείδειες" Γεωμετρίες του $\mathbb{R}^n$ είναι
ς, αν και διαδικαστικά πιο περίπλοκος, μ' εκείνον για τις Ευκλείδειες Γεωμετρίες του.

ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΑ

ΙΣΟΜΕΤΡΙΕΣ ΚΑΙ ΣΗΜΕΙΑ ΣΕ "ΓΕΝΙΚΗ ΘΕΣΗ"

Το Λήμμα της σελίδας 16 γενικεύεται για $n>2$ στην Πρόταση που κολουθεί, η απόδειξη της οποίας έχει σχετικά απλή διαδικασία:

Ιρόταση 1. Μια ισομετρία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας του $\mathbb{R}^n$ (πρβλ. 20) κα- ορίζεται μονοσήμαντα από τις εικόνες $n+1$ σημείων $x_0, x_1, \ldots, x_n$, που βρί- κονται σε "γενική θέση" (δηλαδή: τα $u_1 = x_1 - x_0, \ldots, u_n = x_n - x_0$ αποτελούν άση του $\mathbb{R}^n$).

πόδειξη. Με τον προηγούμενο συμβολισμό, θεωρούμε τις ισομετρίες f και g ς προς την "Ευκλείδεια μετρική" του $\mathbb{R}^n$ και υποθέτουμε ότι ισχύουν οι ισό- τες: $\boxed{f(x_i) = g(x_i)}$, $i=0,\ldots,n$. Για να διασυνδέσουμε τα x_i με τα u_i, ωρούμε τη "μεταφορά" $\mu: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ με $\mu(x) = x - x_0$, οπότε: $\boxed{\mu(x_i) = u_i}$. ουμένου ν' αποδείξουμε ότι $f=g$, αρκεί ν' αποδείξουμε ότι η $\boxed{\varphi = g^{-1}f}$ ναι η ταυτοτική απεικόνιση του $\mathbb{R}^n$. Γι' αυτό, αρκεί ν' αποδείξουμε ι η $\boxed{\omega = \mu\varphi\mu^{-1}}$ είναι η ταυτοτική απεικόνιση του $\mathbb{R}^n$. Αυτό θα κάνουμε:

Πρώτα, παρατηρούμε ότι: $\omega(u_i) = \mu\varphi(\mu^{-1}(u_i)) = \mu\varphi(u_i + x_0) = \mu\varphi(x_i) =$

$$= \mu g^{-1}(f(x_i)) = \mu g^{-1}(g(x_i)) = \mu(x_i) = u_i .$$

ο αυτό και επειδή οι μ, f, g είναι ισομετρίες (για την μ αυτό διαπιστώνε- άμεσα), οπότε η ω είναι ισομετρία (πρβλ. το (β) της Πρότασης στη σελ. 2), εται: $d(x, u_i) = d(\omega(x), u_i) \Leftrightarrow \|x - u_i\| = \|\omega(x) - u_i\| \Leftrightarrow \tau(x-u_i) = \tau(\omega(x) - u_i) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \mathcal{E}(x-u_i, x-u_i) = \mathcal{E}(\omega(x)-u_i, \omega(x)-u_i) \Leftrightarrow \text{(μετά τις πράξεις, πρβλ. σελ. 5)}$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{E}(x,x) - 2\mathcal{E}(x,u_i) = \mathcal{E}(\omega(x),\omega(x)) - 2\mathcal{E}(\omega(x),u_i) \cdot (1).$$

Αλλά: $\omega(\mathbb{O}) = \mu\varphi\mu^{-1}(\mathbb{O}) = \mu g^{-1} f(x_0) = \mu g^{-1} g(x_0) = \mu(x_0) = \mathbb{O} \Rightarrow d(x,\mathbb{O}) = d(\omega(x),\mathbb{O}) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \mathcal{E}(x,x) = \mathcal{E}(\omega(x),\omega(x)) \quad (2).$$

Εξαιτίας της (2), η (1) δίνει: $\mathcal{E}(x,u_i) = \mathcal{E}(\omega(x),u_i) \Leftrightarrow \mathcal{E}(x-\omega(x), u_i) = 0$. ειδή η τελευταία ισότητα ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ και $i=1,\ldots,n$, ενώ τα u_i οτελούν βάση του $\mathbb{R}^n$, συνάγεται $\underline{x-\omega(x) = \mathbb{O} \Leftrightarrow \omega(x) = x, \text{ όπως επιδιώκαμε}}$ [: Αν

θέσουμε $x - \omega(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i u_i$, έχουμε: $0 = \mathcal{E}(x-\omega(x), u_j) = \mathcal{E}(\sum_{i=1}^{n} a_i u_i, u_j) =$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i \mathcal{E}(u_i, u_j).$$

Προκύπτει, έτσι, το ομογενές σύστημα

$$\sum_{i=1}^{n} \mathcal{E}(u_i, u_j) a_i = 0 \quad , \quad j=1,\ldots,n$$

με αγνώστους τα a_i και με ορίζουσα συντελεστών την $|(\mathcal{E}(u_i,u_j))|$, π είναι μη μηδενική, αφού τα u_i αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^n$. Επομένως, το σ στημα αυτό έχει μόνο τη μηδενική λύση, δηλαδή $a_i = 0$, $i=1,\ldots,n \Rightarrow x - \omega(x) =$

Πρόταση 2. Έστω d η "Ευκλείδεια μετρική" του $\mathbb{R}^n$. Αν τα σημεία καθεν από τα σύνολα $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, $\{y_0, y_1, \ldots, y_n\}$ βρίσκονται σε "γενική θ ση" και ισχύουν οι ισότητες $d(x_i, x_j) = d(y_i, y_j)$ για κάθε $i,j = 0,1,\ldots,n$. τε υπάρχει μια μονοσήμαντα ορισμένη ισομετρία $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ με $f(x_i) = y_i$, $i=0,1,$

Απόδειξη. Επειδή κάθε "μεταφορά" είναι ισομετρία, η $f_1: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ με $f_1(x) = x-$ είναι ισομετρία. Επειδή τα $\boxed{u_i = x_i - x_0}$ αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^n$ και τ ίδιο ισχύει για τα $\boxed{v_i = y_i - y_0}$, η απεικόνιση με τύπο $f_2(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i u_i) = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i v_i$ είναι γραμμικός ισομορφισμός. Θ' αποδείξουμε ότι είναι και ισομετρία

Από την υπόθεση $d(x_i, x_j) = d(y_i, y_j)$ για $i=j$ συνάγεται ότι $\mathcal{E}(x_i, x_i) = \mathcal{E}(y_i, y_i)$ και στη συνέχεια (όπως και στην προηγούμενη απόδειξη) ό $\boxed{\mathcal{E}(x_i, x_j) = \mathcal{E}(y_i, y_j)}$ (3), οπότε:

$$\left(d\left(f_2(\textstyle\sum_i \lambda_i u_i), f_2(\sum_i \rho_i u_i)\right)\right)^2 = \|f_2(\textstyle\sum_i \lambda_i u_i) - f_2(\sum_i \rho_i u_i)\|^2 \overset{\text{η } f_2 \text{ γραμμική}}{=} \|f_2(\textstyle\sum_i(\lambda_i - \rho_i)u_i\|^2$$

$$\underset{\text{τύπος της } f_2}{=} \|\sum_i \underbrace{(\lambda_i - \rho_i)}_{\kappa_i} v_i\|^2 = \mathcal{E}(\sum_i \kappa_i v_i, \sum_i \kappa_i v_i) = \sum_{i,j} \kappa_i \kappa_j \mathcal{E}(v_i, v_j) =$$

$$= \sum_{i,j} \kappa_i \kappa_j \mathcal{E}(y_i - y_0, y_j - y_0) = \sum_{i,j} \kappa_i \kappa_j \left(\mathcal{E}(y_i,y_j) - \mathcal{E}(y_i,y_0) - \mathcal{E}(y_j,y_0) + \mathcal{E}(y_0,y_0)\right) =$$

$$\underset{(3)}{=} \sum_{i,j} \kappa_i \kappa_j \left(\mathcal{E}(x_i,x_j) - \mathcal{E}(x_i,x_0) - \mathcal{E}(x_j,x_0) + \mathcal{E}(x_0,x_0)\right) = \sum_{i,j} \kappa_i \kappa_j \mathcal{E}(x_i - x_0, x_j - x_0)$$

$$= \sum_{i,j} \kappa_i \kappa_j \mathcal{E}(u_i, u_j) = \mathcal{E}(\sum_i \kappa_i u_i, \sum_i \kappa_i v_i) = \|\sum_i \kappa_i u_i\|^2 = \|\sum_i \lambda_i u_i - \sum_i \rho_i u_i\|^2 =$$

$$= d(\sum_i \lambda_i u_i, \sum_i \rho_i u_i) \Rightarrow \text{η } f_2 \text{ είναι ισομετρία.}$$

Τέλος, θεωρούμε τη "μεταφορά"-ισομετρία με τύπο $\boxed{f_3(x)=x+y_0}$ και θ'
ποδείξουμε ότι η $f=f_3f_2f_1$ είναι η ζητούμενη ισομετρία:

Προφανώς, $f(x_0)=f_3f_2(f_1(x_0))=f_3f_2(\mathbb{O}) \underset{f_2 \text{ γραμ.}}{=} f_3(\mathbb{O})=y_0$, ενώ για $i=1,\dots,n$
χουμε: $f(x_i)=f_3f_2(f_1(x_i))=f_3f_2(x_i-x_0)=f_3f_2(u_i) \underset{\text{τύπος της } f_2}{=} f_3(V_i)=V_i+y_0=y_i$.

Το μονοσήμαντο του ορισμού της f είναι άμεση συνέπεια της Πρότασης 1.

* Το Πόρισμα που ακολουθεί αποτελεί γενίκευση της Πρότασης στο 7
αι δείχνει ότι όσα αναφέρθηκαν στην Παρατήρηση της σελ. 15 ισχύουν
ενικά για τυχόντα "σχήματα" στα πλαίσια της Ευκλείδειας Γεωμετρίας
ου $\mathbb{R}^n$ για οποιοδήποτε n!

όρισμα. Έστω $\emptyset\neq A\subset\mathbb{R}^n$ και $\varphi: A\to\varphi(A)\subset\mathbb{R}^n$ μια ισομετρία ως προς
ους περιορισμούς της "Ευκλείδειας μετρικής" στα A και $\varphi(A)$ αντίστοιχα
πρβλ. τον ορισμό μιας τέτοιας ισομετρίας στη σελ. 2). Τότε, υπάρχει μια
ισομετρία $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ με $f|A=\varphi$ (: η φ επεκτείνεται σ' ολόκληρο το $\mathbb{R}^n$).

πόδειξη. Είναι εύκολο ν' αποδειχθεί (πρβλ. την 1η από τις Ασκήσεις που
ολουθούν) ότι, αν $\mathbb{R}^m$ (: $m\leq n$) είναι ο μικρότερος υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ που
ριέχει το A, τότε υπάρχουν $m+1$ σημεία, έστω τα $x_0,x_1,\dots,x_m$, που
ήκουν στο A και βρίσκονται σε "γενική θέση", οπότε (αφού η φ είναι ισομε-
ία) το ίδιο θα συμβαίνει και με τα $y_i=\varphi(x_i)$, $i=0,1,\dots,m$ και, επιπλέον,
μικρότερος υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ που θα περιέχει το $\varphi(A)$ θα έχει, επίσης, διάστα-
m. Επειδή τα σύνολα $\{x_0,x_1,\dots,x_m\}$, $\{y_0,y_1,\dots,y_m\}$ ικανοποιούν τις
οθέσεις της προηγούμενης Πρότασης, υπάρχει μια ισομετρία $\bar{\varphi}:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$
υ επεκτείνει την φ. Η ισομετρία αυτή επεκτείνεται σε μια ισομετρία, f, του $\mathbb{R}^n$
ς εξής: Έστω $1_{n-m}:\mathbb{R}^{n-m}\to\mathbb{R}^{n-m}$ η ταυτοτική απεικόνιση ανάμεσα στους
υμπληρωματικούς υποχώρους" των $\mathbb{R}^m$ που περιέχουν τα A και $\varphi(A)$ αντί-
οιχα. Τότε, η $f=\varphi\times 1_{n-m}:\mathbb{R}^n=\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^{n-m}\to\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^{n-m}=\mathbb{R}^n$ με τύπο

: $f((a,b))=(\varphi(a),b)$ για $a\in\mathbb{R}^m$ και $b\in\mathbb{R}^{n-m}$ είναι η ζητούμενη ισομετ
(πρβλ. τη 2η από τις ασκήσεις που ακολουθούν).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Δείξετε ότι, αν $m\leq n$ είναι η μικρότερη διάσταση των υποχώ
του $\mathbb{R}^n$ που περιέχουν το $A\subset\mathbb{R}^n$, τότε υπάρχουν $x_0,x_1,\dots,x_m\in$
που βρίσκονται σε "γενική θέση" (πρβλ. σελ. 51). Δείξετε, επίσης,
τότε και τα $\varphi(x_0),\dots,\varphi(x_m)$ βρίσκονται σε "γενική θέση", όπου φ εί
μια ισομετρία όπως στο Πόρισμα της σελ. 53 (: "απαγωγή σε άτοπο"

2. Αν οι $\varphi_1:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$, $\varphi_2:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ είναι ισομετρίες ως προς τις
κλείδειες μετρικές", δείξετε ότι και η $\varphi=\varphi_1\times\varphi_2:\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n$
$\varphi((a;b))=(\varphi_1(a),\varphi_2(b))$ για $a\in\mathbb{R}^m$ και $b\in\mathbb{R}^n$ είναι, επίσης, ισομετρί

3. Έστω $I_d(\mathbb{R}^n)$ η ομάδα των ισομετριών ως προς την "Ευκλείδεια
τρική", d, στον $\mathbb{R}^n$ (πρβλ. 20) και $\{x_0,x_1,\dots,x_n\}$ ένα σύνολο σημε
που βρίσκονται σε "γενική θέση". Για $f,g\in I_d(\mathbb{R}^n)$ ορίζουμε:

$$\delta(f,g)=\max\{d(f(x_i),g(x_i)): i=0,1,\dots,n\}.$$

Δείξετε ότι το δ είναι μια μετρική στο $I_d(\mathbb{R}^n)$. [Πρβλ. την Πρόταση 1 της σε
Δείξετε, επίσης, ότι ισχύει $\delta(\varphi f,\varphi g)=\delta(f,g)$ για κάθε $\varphi,f,g\in I_d($
δηλαδή ότι η μετρική δ είναι "δεξιά αμετάβλητη".

4. Με τον προηγούμενο συμβολισμό, αφού δείξετε ότι οι "μεταθέσεις"
τελούν υποομάδα της $I_d(\mathbb{R}^n)$ ισομορφική με την ομάδα $\mathbb{R}^n$ (ως πε
πράξη της πρόσθεσης), δείξετε ότι η δ περιορισμένη στην υποομάδα
συμπίπτει με την "Ευκλείδεια μετρική" στο $\mathbb{R}^n$ (αν "ταυτίσουμε" τη
ποομάδα αυτή με τον $\mathbb{R}^n$ μέσω του προηγούμενου ισομορφισμού).

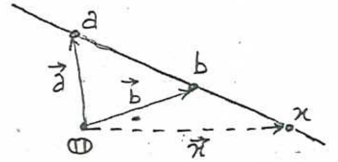
5. Αν συμβολίσουμε με δ_x τη μετρική που ορίσαμε στην άσκηση 3 και
εκείνη που αντιστοιχεί στο σύνολο $\{y_0,y_1,\dots,y_n\}$ σημείων που βρίσκονται
"γενική θέση", δείξετε ότι οι μετρικές δ_x, δ_y είναι "ισοδύναμες", δηλα
$\forall\,\varepsilon>0\ \exists\,\theta>0$ έτσι, ώστε, αν $\delta_y(f,g)<\theta$, να ισχύει $\delta_x(f,g)<\varepsilon$ και αντίστρο

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΠΟ ΤΗ "ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ" ΕΝΟΣ ΜΕΤΡΙΚΟΥ ΧΩΡΟΥ

Μέχρι τώρα η μετρική d ενός μετρικού χώρου X χρησιμοποιήθηκε για να μελετηθεί (έστω και στην ειδική περίπτωση $X=\mathbb{R}^n$) η ομάδα $I_d(X)$ (πρβλ. σελ. 2) και μέσω αυτής η Γ.Κ. $(I_d(X), X)$. Σε όσα ακολουθούν θα θίξουμε ορισμένες βασικές έννοιες και προτάσεις από την "Εσωτερική Γεωμετρία" ενός μετρικού χώρου (X, d). Πιο συγκεκριμένα, θα μας απασχολήσει η έννοια "μετρική ευθεία" και κάποια στοιχεία τη "Γεωμετρία" που ορίζεται στον X με τη βοήθεια της έννοιας αυτής.

<u>Ορισμός.</u> Το $A \subset X$ λέγεται <u>μετρική ευθεία</u> του μετρικού χώρου (X,d), αν ο μετρικός "υπόχωρος" $(A, d_A = d|A\times A)$ είναι "ισομετρικός" προς το μετρικό χώρο $(\mathbb{R}, \alpha)$, όπου $\alpha(t_1,t_2)=|t_1-t_2|$, δηλαδή αν υπάρχει μια "επί"-απεικόνιση $\rho: A \to \mathbb{R}$ με $d_A(x,y)=d(x,y)=|\rho(x)-\rho(y)|\ \forall\ x,y\in A$ (: η ρ είναι, προφανώς, "1-1").

<u>Παραδείγματα.</u> <u>(α)</u> Έστω $a, b \in \mathbb{R}^n$ με $a\neq b$. Με τη βοήθεια του δίπλα σχήματος είναι εύκολο να δούμε ότι τα σημεία της (συνηθισμένης) ευθείας του $\mathbb{R}^n$ που ορίζουν τα σημεία a και b είναι ακριβώς τα στοιχεία του συνόλου: $A=\{\lambda a+(1-\lambda)b : \lambda\in\mathbb{R}\}$.



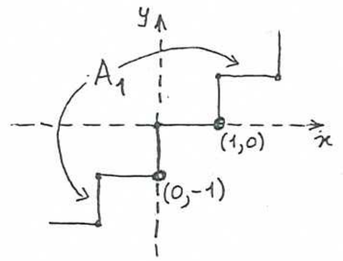
$$x \equiv \vec{x} = \vec{b}+\lambda(\vec{a}-\vec{b}) \equiv b+\lambda(a-b)$$
$$\Rightarrow x=\lambda a+(1-\lambda)b$$

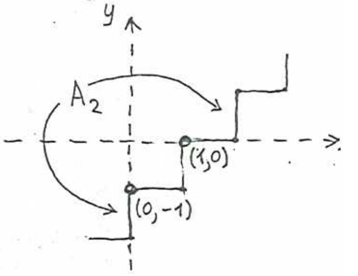
Είναι προφανές ότι για την απεικόνιση $\rho: A\to\mathbb{R}$ με $\rho(\lambda a+(1-\lambda)b)=\lambda\|a-b\|$ ισχύει:
$$|\rho(\lambda_1 a+(1-\lambda_1)b)-\rho(\lambda_2 a+(1-\lambda_2)b)| = |\lambda_1-\lambda_2|\cdot\|a-b\| = \|(\lambda_1 a+(1-\lambda_1)b)-(\lambda_2 a+(1-\lambda_2)b)\|.$$
Επομένως, <u>κάθε (συνηθισμένη) ευθεία του $\mathbb{R}^n$</u> <u>είναι μετρική ευθεία ως προς τη μετρική που ορίζει οποιαδήποτε νόρμα στον $\mathbb{R}^n$</u> (πρβλ. σελ. 5 και 6).

<u>(β)</u> Ας θεωρήσουμε, τώρα, τη νόρμα $\|\cdot\|_*$, που ορίζεται στον $\mathbb{R}^2$ από τον τύπο $\boxed{\|(x,y)\|_* = |x|+|y|}$ (και, όπως είναι γνωστό, είναι "ισοδύναμη" ως προς τη "σύγκλιση" με την "Ευκλείδεια νόρμα": $\|(x,y)\|=\sqrt{x^2+y^2}$).

Για $z\in\mathbb{Z}$ θέτουμε
$$E_1(z)=\overbrace{\{(z+t,z): t\in[0,1)\}}^{S_1}\cup\overbrace{\{(z+1,z+t): t\in[0,1}^{S_2}$$
$$E_2(z)=\{(z+1+t,z): t\in[0,1)\}\cup\{(z+2,z): t\in[0,1)$$

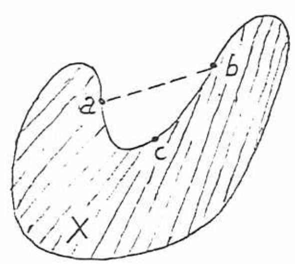
και θεωρούμε τα σύνολα $\boxed{A_1=\bigcup_{z\in\mathbb{Z}} E_1(z)}$, $\boxed{A_2=\bigcup_{z\in\mathbb{Z}} E_2(z)}$, που υποδεικ
ται από τα επόμενα σχήματα:





Προκειμένου ν' αποδείξουμε ότι το καθένα από τα δυο αυτά σύνο
ναι μετρικές ευθείες του $\mathbb{R}^2$ ως προς τη μετρική που ορίζει η πρ
μενη νόρμα, αρκεί να δείξουμε ότι οι απεικονίσεις $\rho_i: A_i\to\mathbb{R}$, $i=$
$\boxed{\rho_i((x,y))=x+y}$ για $(x,y)\in A_i$ έχουν τις ιδιότητες της ρ από τον προηγο
ορισμό. Επειδή είναι εύκολο να δούμε ότι οι ρ_i είναι "1-1" και "επί", αρκεί να δείξου
$$|\rho_i((x_1,y_1))-\rho_i((x_2,y_2))| = \|(x_1,y_1)-(x_2,y_2)\|_* = \|(x_1-x_2, y_1-y_2)\| = |x_1-x_2|+|$$
Θα το δείξουμε αυτό μόνο για την ρ_1 και, ειδικότερα, για ένα ζε
με ανά ένα σημείο από τα σύνολα της μορφής S_1 και S_2, αφήνο
τις υπόλοιπες περιπτώσεις στον αναγνώστη:
$$|\rho_1((z_1+t_1,z_1))-\rho_1(z_2+1,z_2+t_2)| = |(2z_1+t_1)-(2z_2+t_2+1)| = |2(z_1-z_2)+(t_1$$
$$: \|(z_1+t_1,z_1)-(z_2+1,z_2+t_2)\|_* = |z_1-z_2+t_1-1|+|z_1-z_2-t_2|.$$
Επομένως, για το ζητούμενο αρκεί ν' αποδείξουμε ότι:
$$|2(z_1-z_2)+(t_1-t_2)-1| = |z_1-z_2+t_1-1|+|z_1-z_2-t_2|.$$
Για $z_1=z_2$ η ισότητα αυτή ισχύει προφανώς (: $t_i\in[0,1)$). Αν $z_1\neq z_2$
ρίς περιορισμό της γενικότητας, υποθέτουμε $z_1>z_2$, οπότε όλες οι πα
στάσεις στα απόλυτα είναι θετικές (: $z_i\in\mathbb{Z}\Rightarrow z_1-z_2\geq 1$) και η προη
μενη ισότητα ισχύει και πάλι.

Τα προηγούμενα δείχνουν ότι σ' ένα μετρικό χώρο από δυο διαφορετικά σημεία (π.χ., τα $(0,-1)$ και $(1,0)$ στα προηγούμενα σχήματα) περνάνε, εν γένει, περισσότερες από μια μετρικές ευθείες. Χρησιμοποιώντας "κλιμακωτές" συναρτήσεις, μπορούμε ν' αποδείξουμε ότι στην περίπτωση που θεωρούμε περνάνε άπειρες το πλήθος μετρικές ευθείες από οποιαδήποτε δυο διαφορετικά σημεία του $\mathbb{R}^2$.



γ) Το (κλειστό) υποσύνολο X του $\mathbb{R}^2$, που
υποδεικνύεται στο δίπλα σχήμα, το θεωρού-
με ως μετρικό χώρο με τον περιορισμό, d^*,
της "Ευκλείδειας μετρικής" του $\mathbb{R}^2$ στο X.
ια τον (X,d^*) δεν υπάρχει μετρική ευθεία
ου να περιέχει τα a και b: Έστω ότι υπάρχει μια τέτοια μετρική ευθεία ου ορίζεται από την απεικόνιση $\rho: A \to \mathbb{R}$. Αν $\rho(a) < x < \rho(b)$, θα υπάρ-
ει $c \in A$ με $\rho(c) = x$, οπότε (σύμφωνα με τον ορισμό) θα ισχύουν τα εξής:

$$d^*(a,b) = |\rho(a)-\rho(b)| = |\rho(a)-x| + |x-\rho(b)|$$
$$= |\rho(a)-\rho(c)| + |\rho(c)-\rho(b)| = d^*(a,c) + d^*(c,b).$$

μως, δεν υπάρχει $c \in X - \{a,b\}$ με την ιδιότητα $d^*(a,b) = d^*(a,c) + d^*(c,b)$,
ού όλα τα σημεία του ευθυγράμμου τμήμα ab, εκτός των a και b,
ν ανήκουν στον X.

Επομένως, δεν είναι απαραίτητο να υπάρχει μια μετρική ευθεία που περιέχει δυο δεδομένα διαφορετικά σημεία ενός μετρικού χώρου.

ισμός. Το σημείο b του μετρικού χώρου (X,d) βρίσκεται "μεταξύ" των ση-
ων του a, b, αν $\boxed{a \neq c \neq b}$ και ισχύει $\boxed{d(a,b) = d(a,c) + d(c,b)}$ (πρβλ. το (γ) πιο πάνω).
(X,d) θα λέγεται μετρικά κυρτός, αν για κάθε δυο σημεία του υπάρχει
(τουλάχιστο) τρίτο που βρίσκεται "μεταξύ" τους (: ο (X,d^*) από το
πιο πάνω δεν είναι μετρικά κυρτός, ενώ ο $(\mathbb{R}^2, d)$ με d την "Ευκλείδεια με-

τρική" είναι τοπικά κυρτός). Τέλος, ο (X,d) θα λέγεται εξωτερικά μετρικά κυρ-
τός, αν για κάθε δυο (διαφορετικά) σημεία του a,b υπάρχει ένα (τουλάχισ
τρίτο c έτσι, ώστε $d(a,b) + d(b,c) = d(a,c)$ (: ο (X,d^*) από το (γ) της πρ
μενης σελίδας δεν είναι εξωτερικά μετρικά κυρτός).

Ο ρόλος των εννοιών αυτών διαφαίνεται από τις προτάσεις που ακολο

Πρόταση 1. Κάθε δυο (διαφορετικά) σημεία a,b ενός πλήρους και με
κυρτού χώρου (X,d) είναι τα "άκρα" ενός "μετρικού ευθυγράμμου τμ
τος" $(T = T(a,b), s)$, δηλαδή ενός $T \subset X$ με $a, b \in T$, για το οποίο υπάρ
"επί" - απεικόνιση $s: T \to [0, d(a,b)]$ έτσι, ώστε να ισχύουν τα
$s(a) = 0$, $s(b) = d(a,b)$ και $d(x,y) = |s(x) - s(y)|$ $\forall$ $x,y \in T$» (πρβλ. τον Ορισμό στη σ

Η (κάπως εκτεταμένη) απόδειξη θα δοθεί σε 3 βήματα. Η υπόθεση της "πλ
τας" θα χρησιμοποιηθεί στο 2ο βήμα και εκείνη της "μετρικής κυρτότητας" στο

Βήμα 1ο: Θα κατασκευάσουμε επαγωγικά μια ακολουθία $f_n: A_n \to [0, d(a$
$n \in \mathbb{N}$ "ισομετρικών" απεικονίσεων (: $d(x,y) = |f_n(x) - f_n(y)|$ $\forall$ $x,y \in A_n$) με A_n
και $f_n(A_n) \subset f_{n+1}(A_{n+1})$:

Έστω $A_1 = \{a,b\}$ με $f_1(a) = 0$ και $f_1(b) = \beta$. Η f_1 είναι, προφανώς, "ι
μετρική" και έχει την ιδιότητα $f_1(A_1) = \{0, \beta\}$. Έστω F_2 το σύνολο
"ισομετρικών επεκτάσεων" της f_1 (: $\omega \in F_2$ σημαίνει $\omega: A \to [0,\beta]$, η ω
ναι "ισομετρική" και έχει τις ιδιότητες $A \supset A_1$ και $\omega(x) = f_1(x)$ $\forall$ $x \in A_1$). Θε
τας την f_1 ως "ισομετρική επέκταση" του εαυτού της, εξασφαλίζουμε ότι F_2
Χωρίζουμε το $[0,\beta]$ σε 2^2 ίσα υποδιαστήματα μήκους $\beta/2^2$ και ονομάζου
$f_2: A_2 \to [0,\beta]$ μια $f_2 \in F_2$ με την ιδιότητα: δεν υπάρχει $\omega \in F_2$, $\omega: A \to$
έτσι, ώστε το $\omega(A)$ να τέμνει μεγαλύτερο πλήθος υποδιαστημάτων απ'
το $f_2(A_2)$.

Υποθέτουμε, τώρα, ότι έχουμε βρει μια "ισομετρική" $f_n: A_n \to [0,\beta]$
ποία είναι "ισομετρική επέκταση" όλων των f_i, $i = 1, \dots, n-1$. Με ανάλογ
πως πριν, διαδικασία επιλέγουμε μια $f_{n+1}: A_{n+1} \to [0,\beta]$, που είναι "ισομε

πέκταση" της f_n (άρα και όλων των προηγουμένων της) και έχει την ιδιότητα:
ο πλήθος των ίσων υποδιαστημάτων του $[0,\beta]$ με μήκος $\beta/2^{n+1}$, τα οποία τέ-
νει το $f_{n+1}(A_{n+1})$, είναι μέγιστο ανάμεσα σ' όλες τις "ισομετρικές επεκτάσεις" της f_n.

ήμα 2ο: Θα ορίσουμε μια κοινή "ισομετρική επέκταση" $\overline{f}:\Gamma\to[0,\beta]$ όλων αυ-
ών των f_n έτσι, ώστε το $\overline{f}(\Gamma)$ να είναι κλειστό υποσύνολο του $[0,\beta]$. Προς το
κοπό αυτό θέτουμε $\Delta=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n$ και, για $x\in\Delta$, ορίζουμε ως $f(x)$ την τιμή
$_{n_x}(x)$, όπου n_x είναι ο ελάχιστος φυσικός αριθμός με $x\in A_{n_x}$. Η f είναι "κα-
ά ορισμένη", αφού κάθε f_n είναι επέκταση όλων των προηγουμένων της. Εί-
αι εύκολο να δούμε ότι η f είναι "ισομετρική επέκταση" όλων των f_n και, κατά
υνέπεια, "1-1". Στη συνέχεια, θα συμβολίζουμε με f^{-1} την αντίστροφη της $f:\Delta\to f(\Delta)$.
Το $f(\Delta)=H$ ενδέχεται να μην είναι κλειστό υποσύνολο του $[0,\beta]$. Έστω H'
ο "σύνολο των σημείων συσσώρευσής" του, δηλαδή το σύνολο των σημείων
$\in[0,\beta]$, για τα οποία υπάρχει ακολουθία $\theta_n\in f(\Delta)$, $n\in\mathbb{N}$ με $\theta_n\neq\theta_m$ για $n\neq m$
αι $\theta_n\to\theta$, οπότε η θ_n, $n\in\mathbb{N}$ είναι "βασική ακολουθία". Από αυτό και επειδή η
είναι "ισομετρική", η ακολουθία $f^{-1}(\theta_n)=y_n$, $n\in\mathbb{N}$ είναι, επίσης, βασική. Επο-
ένως, αφού ο X έχει υποτεθεί πλήρης, θα υπάρχει $y\in X$ με $y_n\to y$. Και, αντί-
τροφα, επειδή για κάθε $z\in\Delta'$ υπάρχει μια ακολουθία $z_n\in\Delta$, $n\in\mathbb{N}$ με $z_n\to z$,
πότε η "βασική" ακολουθία $f(z_n)=\theta_n$ θα συγκλίνει σε κάποιο σημείο $\theta\in[0,\beta]$,
άθε σημείο του Δ' προκύπτει όπως το προηγούμενο y:
Με αυτά δεδομένα, ορίζουμε την $\overline{f}:\overline{\Delta}=\Delta\cup\Delta'=\Gamma\to[0,\beta]$ με τον τύπο

$$\boxed{\overline{f}(x)=\begin{cases} f(x), & \text{αν } x\in\Delta \\ \theta\ , & \text{αν } x\in\Delta'-\Delta,\ x_n\in\Delta \\ & x_n\to x \text{ και } f(x_n)\to\theta \end{cases}}\ .$$

$\overline{f}$ είναι "καλά ορισμένη", αφού το θ (λόγω της συνέχειας της f) εξαρτά-
ι μόνο από το x (και όχι από την ακολουθία που τείνει σ' αυτό). Επιπλέον,
$\overline{f}$ είναι "ισομετρική", αφού (λόγω της συνέχειας των απεικονίσεων (με-
ικών) $X\times X\ni(x,y)\to d(x,y)$ και $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\ni(t,r)\mapsto|t-r|$) έχουμε

$\ast$ για $x\in\Delta$ και $y\in\Delta'-\Delta$ με $x_n\in\Delta$, $x_n\to y$:

$$d(x,y)=d(x,\lim_n x_n)=\lim_n d(x,x_n)\underset{f\,\text{"ισομ."}}{=\!=\!=}\lim_n|f(x)-f(x_n)|=$$
$$=|f(x)-\lim_n f(x_n)|\underset{\text{ορισ. }\overline{f}}{=\!=\!=}|f(x)-\overline{f}(y)|=|\overline{f}(x)-\overline{f}(y)|\ ,$$

$\ast$ για y , $z\in\Delta'-\Delta$ με $x_n, y_n\in\Delta$ και $x_n\to y$, $y_n\to z$:

$$d(y,z)=d(\lim_n x_n,\lim_n y_n)=\lim_n d(x_n,y_n)=\lim_n|f(x_n)-f(y_n)|=$$
$$=|\lim_n f(x_n)-\lim_n f(y_n)|=|\overline{f}(y)-\overline{f}(z)|.$$

Τα προηγούμενα δείχνουν ότι η $\overline{f}:\overline{\Delta}\to[0,\beta]$ είναι "ισομετρική επέ
της $f:\Delta\to[0,\beta]$ και απομένει να βεβαιωθούμε για το ότι το $\overline{f}($
ναι κλειστό υποσύνολο του $[0,\beta]$. Αυτό, όμως, είναι άμεση συνέπεια τ
κάθε $\theta\in H'=(f(\Delta))'$ ανήκει στην εικόνα της $\overline{f}$, όπως εξηγήσαμε στην
γούμενη σελίδα.

Βήμα 3ο: Τέλος, θα δείξουμε ότι $\overline{f}(\overline{\Delta})=[0,\beta]$, οπότε για $\boxed{T=\overline{\Delta}}$ κα
ισχύει το συμπέρασμα της Πρότασης. Θα υποθέσουμε $\overline{f}(\overline{\Delta})\neq[0,\beta]$
καταλήξουμε σε άτοπο:
Επειδή το $\overline{f}(\overline{\Delta})$ είναι κλειστό, το $[0,\beta]-\overline{f}(\overline{\Delta})$ θα είναι ανοικτό, δ
ένωση ανοικτών διαστημάτων. Έστω (κ,μ) ένα απ' αυτά με $\kappa=\overline{f}(u)$ κα
για $u,w\in\overline{\Delta}$. Αφού ο X έχει υποτεθεί μετρικά κυρτός (πρβλ. τον Ορισ
σελ. 57), υπάρχει $v\in X$ που βρίσκεται "μεταξύ" των u και w, δηλαδ
(1) $\boxed{d(u,v)+d(v,w)=d(u,w)}=|\overline{f}(u)-\overline{f}(w)|$. Έστω $\boxed{\lambda\in(\kappa,\mu)}$ με $\boxed{|\kappa-\lambda|=d(u,v)}$
πότε θα ισχύει $\boxed{|\lambda-\mu|=d(v,w)}$. Οι ισότητες (2) και (3) δείχνουν ότι, α
θα ίσχυε $\lambda\in\overline{f}(\overline{\Delta})$, που είναι άτοπο. Επομένως, $v\notin\overline{\Delta}$.
Θα δείξουμε ότι η απεικόνιση $g:\overline{\Delta}\cup\{v\}\to[0,\beta]$ με $g(x)=\overline{f}(x)$ για
και $g(v)=\lambda$ είναι "ισομετρική". Γι' αυτό, αρκεί να δείξουμε ότι για $x\in\overline{\Delta}-\{$
ισχύει $d(x,v)=|g(x)-g(v)|=|\overline{f}(x)-\lambda|$:

Κάποια από τα διαφορετικά σημεία $\bar{f}(x), \kappa, \mu$ του διαστήματος $[0,\beta]$ θα βρίσκεται μεταξύ των δυο άλλων. Η περίπτωση $\kappa<\bar{f}(x)<\mu$ αποκλείεται, αφού $(\kappa,\mu)\subset[0,\beta]-\bar{f}(\bar{\Delta})$. Θα εξετάσουμε μόνο την περίπτωση $\bar{f}(x)<\kappa<\mu$, δεδομένου ότι η άλλη εξετάζεται ανάλογα.

Έστω, λοιπόν, $\boxed{\bar{f}(x)<\kappa<\lambda<\mu}$. Τότε:

$$d(x,u)+d(u,w)=|\bar{f}(x)-\kappa|+|\kappa-\mu|=(\kappa-\bar{f}(x))+(\mu-\kappa)=\mu-\bar{f}(x)=d(w,x).$$

Από την ισότητα αυτή, από την (1) της προηγούμενης σελίδας και από το Λήμμα που ακολουθεί προκύπτει $d(x,v)=d(x,u)+d(u,v)$, οπότε

$$d(x,v)=d(x,u)+d(u,v)\underset{(2)}{=}|\bar{f}(x)-\kappa|+|\kappa-\lambda|=(\kappa-\bar{f}(x))+(\lambda-\kappa)=\lambda-\bar{f}(x),$$

όπως επιδιώκαμε.

Επομένως, η g είναι μια "ισομετρική επέκταση" καθεμιάς f_n. Αν επιλέξουμε ένα n με $\beta/2^n<\min\{\lambda-\kappa,\mu-\kappa\}$, υπάρχει ένα διάστημα μήκους $\beta/2^n$ που περιέχεται στο (κ,λ) και περιέχει το λ. Τότε, όμως, το $g(\bar{\Delta}\cup\{v\})$ τέμνει, εκτός από τα ίσα διαστήματα μήκους $\beta/2^{n+2}$ που τέμνει το $f_{n+2}(A_{n+2})$ (πρβλ. την αρχή της σελ. 59), και ένα διάστημα μήκους $\beta/2^{n+2}$ που περιέχει το λ και δεν το τέμνει το $f_{n+2}(A_{n+2})$, λόγω της επιλογής του n. Αυτό, όμως, είναι άτοπο (πρβλ. την επαγωγή στο 2ο Βήμα).

Λήμμα. Όπως και στην αξιωματική θεμελίωση του Hilbert, θα γράφουμε με $a-b-c$ ή $c-b-a$ για να δηλώσουμε ότι το b βρίσκεται "μεταξύ" των a και c. Με το συμβολισμό αυτό (όπως και στην αξιωματική θεμελίωση του Hilbert) ισχύει: αν $a-b-c$ και $a-c-e$, τότε $b-c-e$ και $a-b-e$.

Απόδειξη. Θ' αποδείξουμε μόνο την πρώτη σχέση, αφήνοντας στον αναγνώστη την ανάλογη διαδικασία για τη δεύτερη. Η υπόθεση σημαίνει

$$d(a,b)+d(b,c)=d(a,c) \text{ και } d(a,c)+d(c,e)=d(a,e) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow d(a,b)+d(b,c)+d(c,e)=d(a,e)\underset{\substack{\uparrow\\ \text{τριγων. ιδιότ.}}}{\leq} d(a,b)+d(b,e) \Longrightarrow$$

$d(b,c)+d(c,e)\leq d(b,e)$, ενώ $d(b,e)\overset{\downarrow}{\leq} d(b,c)+d(c,e)$, απ' όπου προκύπτει το ζητούμενο $d(b,c)+d(c,e)=d(b,e)$.

Παρατηρήσεις. (α) Η διαδικασία της απόδειξης της προηγούμενη
τασης έχει πολλές ομοιότητες με τη γνωστή μας διαδικασία της "κατασ
των πραγματικών αριθμών, όταν είναι γνωστοί οι ρητοί, και ακόμα
τερες με τη διαδικασία της "πλήρωσης" ενός μετρικού χώρου.

(β) Από την προηγούμενη Πρόταση (και, κυρίως, από την απόδειξή τη
νεται ο ρόλος της "μετρικής κυρτότητας" σε σχέση με την ύπαρξη "
ευθύγραμμων τμημάτων". Από την επόμενη Πρόταση κατανοείται ο
στοιχος ρόλος της "εξωτερικά μετρικής κυρτότητας" (πρβλ. σελ. 58)
αφορά στην ύπαρξη "μετρικών ευθειών" (πρβλ. τον Ορισμό στη σελ.

Πρόταση 2. Από δυο (διαφορετικά) σημεία a και b ενός πλήρους,
κυρτού και εξωτερικά μετρικά κυρτού μετρικού χώρου (X,d) περ
μετρική ευθεία (που δεν είναι απαραίτητο να είναι μονοσήμαν
σμένη, πρβλ. το Παράδειγμα (β) στη σελ. 55).

Η απόδειξη (πρβλ. σελ. 64) θα στηριχθεί στη δυνατότητα "επέκτασ
"μετρικού ευθύγραμμου τμήματος" (που ορίζεται από τα a και b,
να με την Πρόταση 1 της σελ. 58) σε μια "μετρική ημιευθεία":
Έστω $(T(a,b),s)$ ένα "μετρικό ευθύγραμμο τμήμα", όπως στη σελίδ
και $c\in X$ έτσι, ώστε $a-b-c$ (πρβλ. την συμφώνηση του Λήμματος
σελ. 61). Με αυτά δεδομένα, ορίζεται η "ημιευθεία"

$$H=H(a-b-c)=T(a,b)\cup\{x\in X: a-b-x\},$$

που περιέχει τα a, b και επεκτείνει το $T(a,b)$ "στην κατεύθυνση το
Ανάλογα, αν $e-a-b$, ορίζεται η "ημιευθεία" $H(e-a-b)=H(b-$
η οποία έχει κοινά σημεία με την προηγούμενη μόνο τα σημεία του
όπως αποδεικνύεται με τη μέθοδο της "απαγωγής σε άτοπο" και με τ
θεια του Λήμματος της σελίδος 61.

Από τα προηγούμενα συνάγεται ότι θα έχουμε αποδείξει την Πρότα- ι 2, αν αποδείξουμε ότι το "μετρικό ευθύγραμμο τμήμα" $(T(a,b),s)$ ιευτείνεται σε μια "μετρική ημιευθεία" $(H(a-b-c),\bar{s})$, δηλαδή σε μια ιμιευθεία" $H(a-b-c)$, για την οποία υπάρχει μια "ισομετρική" και "επί" πεικόνιση $\bar{s}: H(a-b-c)\to\mathbb{R}^+$, που επεκτείνει την $s: T(a,b)\to[0,d(a,b)]$.

Για να το πετύχουμε αυτό, χρειαζόμαστε το επόμενο Λήμμα, που ου- σιαστικά μας λέει ότι κάθε "ημιευθεία" $H(a-b-c)$ είναι "μετρικά α- πέραντη", με την έννοια ότι το σύνολο $\mathcal{D}=\{d(a,x) : x\in H(a-b-c)\}$ ναι μη φραγμένο στο $\mathbb{R}^+$.

ήμμα. Έστω X ένας πλήρης και εξωτερικά μετρικά κυρτός με- ρικός χώρος και $H(a-b-c)$ μια "ημιευθεία" του, που επεκτείνει το (a,b) (πρβλ. τη σελ. 62). Τότε, το σύνολο

$$\mathcal{D}^*=\{d(a,x) : x=b \text{ ή } x\in H(a-b-c)-T(a,b)\}$$

ναι μη φραγμένο στο $\mathbb{R}^+$.

πόδειξη. Θα υποθέσουμε ότι το $\mathcal{D}^*$ είναι φραγμένο και θα καταλή- ουμε σε άτοπο. Έστω, λοιπόν, $\sup\mathcal{D}^*=\lambda_0\in\mathbb{R}^+$. Επειδή ο X υποτέθη ξωτερικά μετρικά κυρτός, υπάρχει $x\in X$ με $d(a,x)=d(a,b)+d(b,x)$ πρβλ. τη σελ. 58), οπότε $\boxed{\lambda_0>d(a,b)}$. Από τον ορισμό τού supremum, ια κάθε $\mu>0$, υπάρχει $b_1\in H(a-b-c)-T(a,b)$ με την ιδιότητα: $d(a,b_1)> \lambda_0-\mu$. Υποθέτουμε ότι το μ έχει επιλεγεί έτσι, ώστε $b_1\neq b$, οπότε θα ουμε $\boxed{a-b-b_1}$. Με τη βοήθεια του Λήμματος της σελ. 61, διαπιστώ- ται εύκολα ότι:

$$\Sigma_1=\{x\in X: x=b_1 \text{ ή } a-b_1-x\}\subset H(a-b-c)-T(a,b).$$

ομένως, αν $\mathcal{D}^*_1=\{d(a,x): x\in\Sigma_1\}$ και $\lambda_1=\sup\mathcal{D}^*_1$, τότε $\lambda_0>\lambda_1>d(a,b)$. Με ανάλογο τρόπο βρίσκουμε σύνολα Σ_n, $\mathcal{D}^*_n$ με $\lambda_n=\sup\mathcal{D}^*_n$ έτσι, ,τε να ισχύουν τα εξής:

$$\underline{(1)}\ \boxed{a-b_{n-1}-b_n}\ \text{κ}\ \underline{(2)}\ \boxed{\lambda_n>d(a,b_n)>\lambda_{n-1}-\frac{\mu}{f(n)}}\ \text{για } n\in\mathbb{N}, \text{όπου} \begin{cases} b_0=b \\ f(n)\in\mathbb{N} \\ f(n)\geq n \end{cases}$$

$$\text{και } \underline{(3)}\quad \boxed{d(a,b)<\cdots<\lambda_n<\cdots<\lambda_1<\lambda_0}.$$

Από το (3) έπεται $\boxed{\lim_n\lambda_n=\omega}$ $(=\inf_n\lambda_n)$. Από το (1) και με τη θεια του Λήμματος της σελ. 61 συνάγεται $a-b_n-b_{n+m}$ για m δηλαδή ότι $\boxed{d(a,b_n)+d(b_n,b_{n+m})=d(a,b_{n+m})}$ (πρβλ. τον (σμό στη σελ. 57). Εξάλλου, η (2) δίνει $\boxed{\lim_n\lambda_n=\lim_n d(a,b_n)}$, οπό

$$\lim_{n,m}d(b_n,b_{n+m})=\lim_{n,m}d(a,b_{n+m})-\lim_n d(a,b_n)=0.$$

Κατά συνέπεια, η ακολουθία b_n, $n\in\mathbb{N}$ είναι μια βασική ακολο του πλήρους μετρικού χώρου X. Υπάρχει, λοιπόν, $e\in X$ με $\boxed{\lim_n b_{}}$ Από αυτό και τη συνέχεια της μετρικής $d: X\times X\to\mathbb{R}^+$ συμπεραίνο

$$\boxed{d(a,e)=\lim_n(a,b_n)=\lim_n\lambda_n=\omega}\ (*).$$

Από την άλλη μεριά, έχουμε

$$d(a,e)=\lim_m d(a,b_{n+m})=\lim_m d(a,b_n)+\lim_m d(b_n,b_{n+m})$$
$$=d(a,b_n)+d(b_n,e),$$

απ' όπου προκύπτει $\boxed{a-b_n-e}$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Αν, επομένως, θεω σουμε κάποιο $p\in X$ με $a-e-p$ (που υπάρχει, αφού ο X υποτίθετ εξωτερικά μετρικά κυρτός), θα έχουμε $\boxed{a-b_n-p}$ και $\boxed{a-e-p}$ (και πάλι, το Λήμμα της σελ. 61), από τα οποία έπεται:

$$d(a,p)\leq\sup\mathcal{D}^*_n=\lambda_n \text{ και } d(a,e)+d(e,p)=d(a,b)\implies$$
$$\underset{(*)}{\implies}\ \omega+d(e,p)\leq\lambda_n.$$

Η τελευταία ανισότητα αντιφάσκει στην ισότητα $\omega=\inf_n\lambda_n$ σε σ δυασμό με το ότι $e\neq p$, δηλαδή $d(e,p)>0$.

Απόδειξη της Πρότασης 2 (πρβλ. σελ. 62). Όπως προαναφέραμε, πόδειξη θα δοθεί με την "επέκταση" ενός "μετρικού ευθυγράμμου ματος" $(T(a,b),s)$ (πρβλ. σελ. 58) σε μια "μετρική ημιευθεία $(H(a-b-c),\bar{s})$ (πρβλ. σελ. 63), δεδομένου ότι η "επέκταση" σ άλλη "μετρική ημιευθεία" $(H(e-a-b),\bar{s}')$ (πρβλ. σελ. 62) γίνετα ανάλογα:

Σύμφωνα με το προηγούμενο Λήμμα, υπάρχει $x_1 \in H(a-b-c)-T(a,b)$ $(: a-b-x_1)$ με την ιδιότητα $d(a,x_1) > 2d(a,b)$. Έστω $(T(b,x_1),\ s_1^*)$ ένα "μετρικό ευθύγραμμο τμήμα", που υπάρχει εξαιτίας της Πρότασης 1 της σελ. 58. Από το Λήμμα που ακολουθεί, έπεται ότι ορίζεται ένα "μετρικό ευθύγραμμο τμήμα" $(T(a,b) \cup T(b,x_1) = T_1\ ,\ s_1)$, που "επεκτείνει" το $(T(a,b),\ s)$, δηλαδή με $s_1 | T(a,b) = s$.

Αν θέσουμε $b = x_0$, $T(a,b) = T_0$ και $s = s_0$, η προηγούμενη διαδικασία μας επιτρέπει να ορίσουμε μια ακολουθία (T_n, s_n), $n = 0,1,\dots$ "μετρικών ευθυγράμμων τμημάτων", καθένα από τα οποία "επεκτείνει" το προηγούμενό του. Αυτό καθιστά εύκολη την απόδειξη του ισχυρισμού ότι: το $(\bigcup_{n=0}^{\infty} T_n\ ,\ \bar{s})$, με $\bar{s}(x) = s_n(x)$ αν $x \in T_n$, είναι μια "μετρική ημιευθεία" (πρβλ. και το επόμενο Λήμμα). Η απόδειξη αυτή αφήνεται στον αναγνώστη.

Λήμμα. Έστω $a-b-c$ και $(T(a,b),\ s)^{(1)}$, $(T(b,c),\ t)^{(1)}$ δυο "μετρικά ευθύγραμμα τμήματα". Τότε, το $(T = T(a,b) \cup T(b,c),\ \omega)$ με $\boxed{\omega | T(a,b) = s}$ και $\boxed{\omega(x) = d(a,b) + t(x)}$ για $x \in T(b,c)$ είναι ένα "μετρικό ευθύγραμμο τμήμα" (που "επεκτείνει το πρώτο κατά το δεύτερο").

Απόδειξη. Είναι προφανές ότι ισχύει $d(x,y) = |\omega(x) - \omega(y)|$ για $x,y \in T(a,b)$ ή $x,y \in T(b,c)$. Επίσης, ισχύει:

$$\begin{aligned} d(a,c) &= d(a,b) + d(b,c) = d(a,b) + |t(c) - \overset{0}{\overbrace{t(b)}}| = \\ &= d(a,b) + |(\omega(c) - d(a,b)) - 0| = \omega(c) = \\ &= \omega(c) - 0 = \omega(c) - \omega(a) = |\omega(c) - \omega(a)|. \end{aligned}$$

Απομένει, λοιπόν, ν' αποδείξουμε ότι ισχύει $d(x,y) = |\omega(x) - \omega(y)|$ για κάθε $x,y \in T$ με $x \in T(a,b) - \{a,b\}$ και $y \in T(b,c) - \{b,c\}$:

---

(1) $s : T(a,b) \to [0, d(a,b)]$, $t : T(b,c) \to [0, d(b,c)]$

Από το Λήμμα της σελ. 61 έχουμε:

$$a-x-b \text{ και } a-b-c \Rightarrow x-b-c \Leftrightarrow c-b-x,$$

$$(b-y-c \Leftrightarrow)\ c-y-b \text{ και } c-b-x \Rightarrow y-b-x \Leftrightarrow x-b-$$

οπότε:

$$\begin{aligned} d(x,y) &= d(x,b) + d(b,y) = |s(b) - s(x)| + |t(y) - \overset{0}{\overbrace{t(b)}}| \\ &= (d(a,b) - \omega(x)) + t(y) = (d(a,b) + t(y)) - \omega(x) = \omega(y) - \end{aligned}$$

Παρατήρηση. Μετά τη διερεύνηση του ερωτήματος << πότε υ
μια "μετρική ευθεία" που περνάει από δυο (διαφορετικά) σημεία
σειρά εξίσου ενδιαφέροντα ερωτήματα, όπως είναι, π.χ., το εξής
υπάρχει ακριβώς μια "μετρική ευθεία" που περνάει από δυο σημεία
το Παράδειγμα (β) της σελ. 55). Δεν θα μας απασχολήσουν τέτοια ε
τα, γιατί αλλιώς το κείμενο θα επεκτεινόταν πολύ. Θα σημειώσουμε, κ
η σχετική θεωρία είναι, πράγματι, ενδιαφέρουσα και "τοπολ
ποιεί" τη Διαφορική Γεωμετρία". Βασική επιδίωξη των όσων
γράφτηκαν ήταν να δοθούν τ' αρχικά στοιχεία της θεωρίας αυ
να επισημανθούν ορισμένες ομοιότητες ανάμεσα στην "Αξιωματ
μελίωση της Γεωμετρίας κατά Hilbert" και στη "Μετρική Γεωμετ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Αν συμβολίσουμε με d την Ευκλείδεια μετρική στον $\mathbb{R}^n$, δεί
το "συνηθισμένο" ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει δυο σημεία του
είναι το μοναδικό "μετρικό ευθύγραμμο τμήμα" που τα περιέχε
συνέχεια, δείξετε ότι υπάρχει ακριβώς μια "μετρική ευθεία" πο
νάει από δυο σημεία.

2. Έστω (X,d) ένας "μετρικά κυρτός" μετρικός χώρος και $a,b \in X$ με a
$x \in X$ με $d(a,x) = d(x,b) = \frac{1}{2}d(a,b)$ θα λέγεται "μέσαιο σημείο" των a κα
ξετε ότι, εν γένει, υπάρχουν περισσότερα του ενός "μέσαια σημεία" για τα