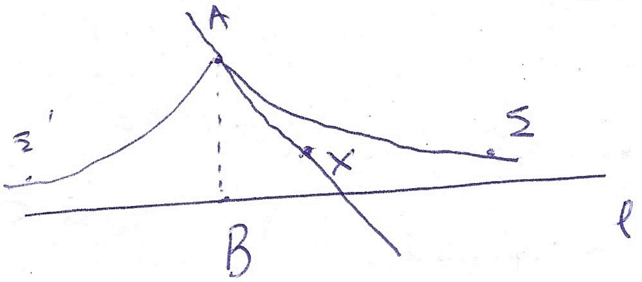
①

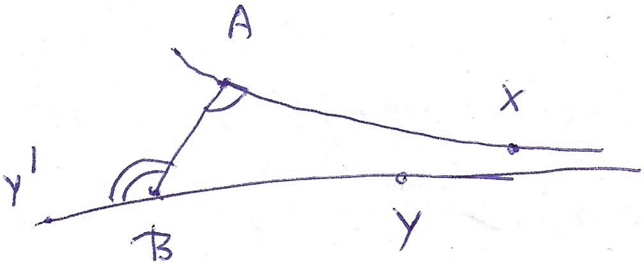
Είχαμε δει Υ.5: ∀ ευθεία ℓ, $A \notin \ell$ υπάρχουν άπειρες παράλληλες στην ℓ διερχόμενες από το A και υπάρχουν δύο ημιευθείες $\overrightarrow{A\Sigma}, \overrightarrow{A\Sigma'}$: ασυμπτωτικές παράλληλες από το A ώστε αν X εσωτερικό της $\sphericalangle \Sigma' A \Sigma \Rightarrow \overrightarrow{AX}$ τέμνει την ℓ.



* οι γωνίες $\sphericalangle BA\Sigma = \sphericalangle BA\Sigma'$ οξείες και ονομάζονται γωνία παραλληλίας $\Pi(AB)$ του AB εξαρτάται μόνο από AB. Αν $CD = AB \Rightarrow \Pi(AB) = \Pi(CD)$

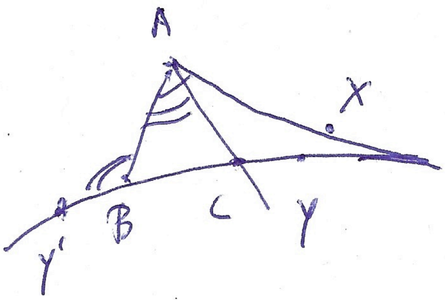
Απλά ασυμπτωτικά τρίγωνα (δίγωνα)

Δύο οριακά παράλληλες ημιευθείες $\overrightarrow{AX}, \overrightarrow{BY}$ ($\overrightarrow{AX}$ οριακά παραλ. της ευθείας που περιέχει την $\overrightarrow{BY}$ και $\overrightarrow{BY}$ ορ. παρ. της ευθ. που περιέχει $\overrightarrow{AX}$) μαζί με το ευθ. τμήμα AB σχηματίζουν ένα απλό ασυμπτωτικό τρίγωνο



Πρόταση: Σε κάθε απλό ασυμπτωτικό τρίγωνο ισχύει το θεώρημα της εξωτερικής γωνίας $\sphericalangle ABY' > \sphericalangle BAX$.

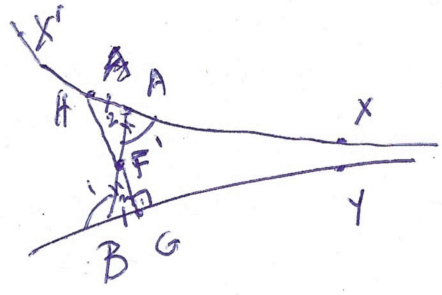
Απόδειξη: Έστω $\sphericalangle ABY' < \sphericalangle BAX$. Μεταφέρουμε την $\sphericalangle ABY'$ στο εσωτερικό της $\sphericalangle BAX$ με κορυφή A και πλευρά $\overrightarrow{AB}$. Η δεύτερη πλευρά, από τον ορισμό της ασυμπτ. παρ. θα τέμνει την $\overrightarrow{BY}$ σε κάποιο σημείο C



Θ. εξ. γωνίας στο τρίγωνο $BAC \Rightarrow$

$\left.\begin{array}{l}\sphericalangle BAC < \sphericalangle Y'BA \\ = \sphericalangle Y'BA\end{array}\right\}$ άτοπο

② Έστω $\measuredangle ABY' \simeq \measuredangle BAX$



F μέσο του AB

$FG \perp BY$.

H στην $\overrightarrow{AX'}$ ώστε $AH = BG$

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα AHF, BGF

- $AF \simeq BF$
- $AH \simeq BG$
- $\hat{A}_1 = \hat{B}_1$, $\hat{A}_2 = \hat{B}_2$ } παραπληρωματικές

} $AHF \simeq BGF$ $\Rightarrow \hat{H} = \hat{G} =$ ορθή και H, F, G συνευθειακά

Συνεπώς HG κοινή κάθετος των $X'X$, BY

$\Rightarrow \Pi(HG) =$ ορθή ($\overrightarrow{HX}$ επίσης ορ. παρ. της BY από το H.)

↓

άτοπο

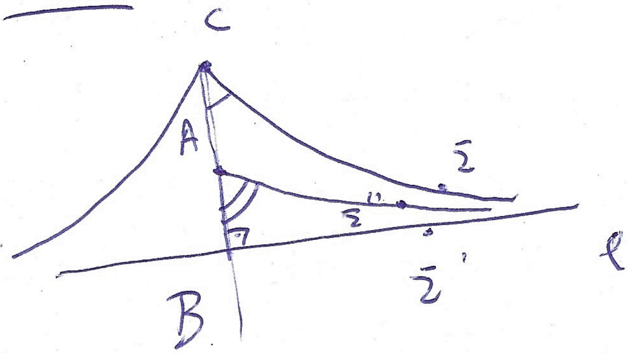
πρέπει να είναι οξεία

<u>Συνέπεια</u>

<u>Πρόταση</u> (Μονοτονία της γωνίας παραλληλίας)

Αν $AB < CD$ τότε $\Pi(AB) > \Pi(CD)$

<u>Απόδειξη</u>



$\Sigma C \cancel{A} \Sigma''$ δίγωνο

Θ. εξ. γωνίας

$\Pi(BC) < \Pi(BA)$.

③ Πρόταση (Κριτήριο ισότητας για απλά ασυμπτωτικά τρίγωνα)

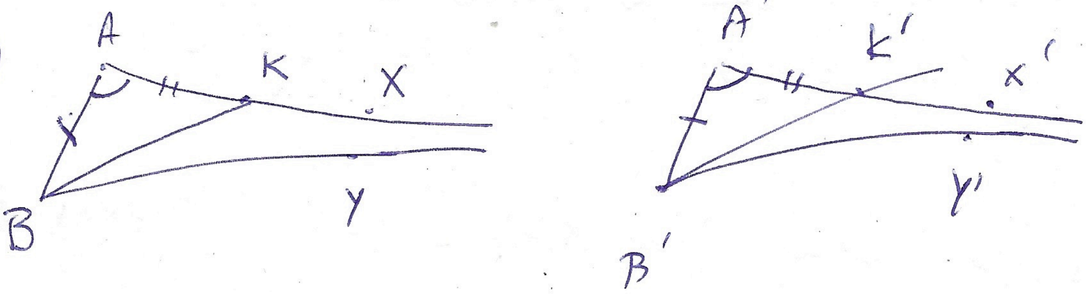
Έστω $XABY$ και $X'A'B'Y'$ δύο απλά ασ. τρίγωνα

(Λέμε ~~...~~ ότι είναι ίσα αν $AB = A'B'$ και $\sphericalangle BAX \cong \sphericalangle B'A'X'$
$\sphericalangle ABY \cong A'B'Y'$)

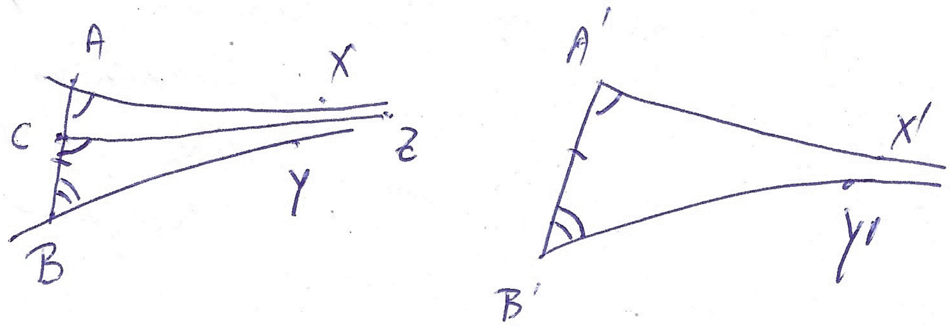
Έστω $\sphericalangle BAX \cong \sphericalangle B'A'X'$. Τότε

$$AB \cong A'B' \iff \sphericalangle ABY \cong \sphericalangle A'B'Y'$$

$(\Rightarrow)$



$(\Leftarrow)$



(, $XACY$
απλ. ασ. τρίγωνο (μεταβατικότητα ασύμπτ. παραλληλίας)

~~...~~ $\left.\begin{array}{l} BC = A'B' \\ \hat{B} = \hat{B'} \end{array}\right\} \Rightarrow \sphericalangle BCZ = \sphericalangle B'A'X'$ άτοπο από Θ.
εξωτερικής γωνίας

—

④ Πρόταση

Αν δύο μη τεμνόμενες ευθείες δεν περιέχουν κανένα ζεύγος οριακά παράλληλων ημιευθειών τότε δέχονται κοινή κάθετο (άρα αποκλίνουσες παράλληλες)

(και αντίστροφα αν δέχονται κοινή κάθετο, δεν περιέχουν ζεύγος ασ. παρ. ημιευθειών)

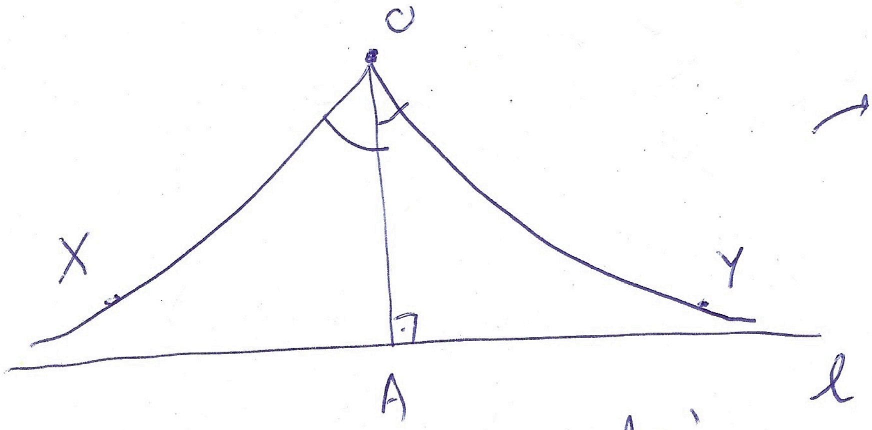
—

Ορισμός (Διπλά ασυμπτωτικά τρίγωνα)

Δύο τεμνόμενες ημιευθείες (γωνία) ~~και~~ μη μοναδική κοινή ασ. παρ. ευθεία αποτελούν = διπλά ασυμπτωτικά τρίγωνα

Πρόταση = Δίνεται γωνία $\measuredangle XOY$. Τότε υπάρχει (μοναδική) μια ευθεία που να είναι ασ. παρ. της OX και OY

κατασκευή
διπλά ασυμπτωτικά τρίγωνα



Άρα

$\measuredangle XOY = 2\Pi(OA)$ → OA καθορίζεται μονοσήμαντα από το $\Pi(AB)$ (άρα από $\measuredangle XOY$ και)

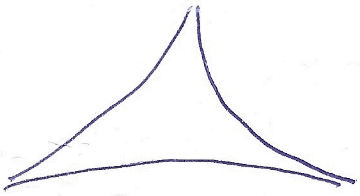
$\vec{OA}$ διχοτόμος της $\measuredangle XOY$

(άρα καθορίζεται μονοσήμαντα από τη γωνία $\measuredangle XOY$

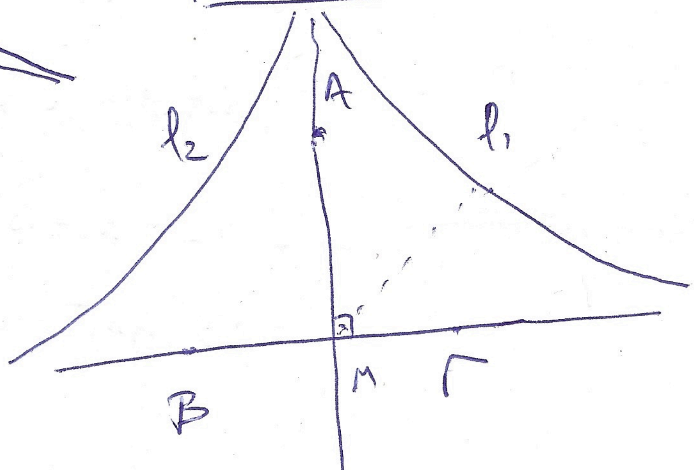
→ A καθορίζεται μονοσήμαντα από τη γωνία $\measuredangle XOY$

→ l μοναδική κάθετη της $\vec{OA}$ στο A → καθορίζεται μονοσήμαντα από τη γωνία $\measuredangle XOY$.

<u>Ορισμός</u> Τριπλά ασυμπτωτικό τρίγωνο: Τρεις μη τεμνόμενες ευθείες που ανά δύο περιέχουν ξεχωριστά οριακά παράλληλες ημιευθείες (ενώ δεν υπάρχουν τέτοιες, ορίζονται || ημιευθ.)



<u>Κατασκευή</u>



~~ΒΓ~~ ΒΓ $\perp \overrightarrow{MA}$

l_1, l_2 οι μοναδικές κοινές ορ. παρ. ευθείες των $\measuredangle AM\Gamma$, $\measuredangle AMB$.

Αντίστροφα (δεν θα το αποδείξουμε)
κάθε τριπλά ασ. τρίγωνο οδηγεί σε ένα ορθογώνιο διπλά ασυμπτωτικό τρίγωνο (μοναδικό αφού η γωνία του είναι ορθή)
→ Με αυτή την έννοια όλα τα τριπλά ασυμπτ. τρίγωνα είναι σύμφωνα μεταξύ τους.

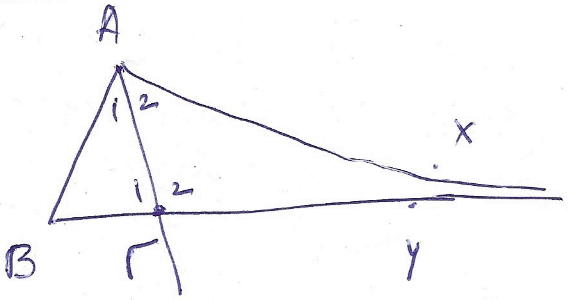
<u>Το εμβαδό στην Υ.Γ</u>

Συνάρτηση εμβαδού στα τρίγωνα (συμπεριλαμβανομένων των απλά, διπλά και τριπλά ασυμπτωτικά τρίγωνα)

1) Σε κάθε τρίγωνο το εμβαδό είναι θετικό
2) Σύμφωνα τρίγωνα έχουν ίδιο εμβαδό
3) Αν ένα τρίγωνο χωρίζεται σε δύο τρίγωνα με μια ευθεία που διέρχεται από μια κορυφή του, τότε το εμβαδό του είναι το άθροισμα των εμβαδών των επί μέρους τριγώνων (Προσθετικότητα)

Παρατήρηση: Τις ίδιες ιδιότητες έχει το έλλειμμα ενός τριγώνου που επεκτείνεται στα ασυμπτωτικά τρίγωνα

Για παράδειγμα: απλά ασυμπτωτικό τρίγωνο



$$D(XABY) = 2\bot - \hat{A} - \hat{B}$$

$$= 2\bot - \hat{A}_1 - \hat{B} - \hat{\Gamma}_1 - \hat{A}_2 - \hat{\Gamma}_2 + 2\bot$$

$$= D(AB\Gamma) + D(XA\Gamma Y).$$

Θεώρημα (Gauss) Στην Υ.Γ. κάθε συνάρτηση εμβαδού E στα τρίγωνα έχει τη μορφή

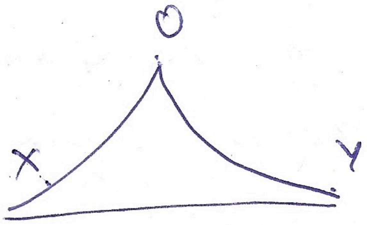
$$E(\hat{AB\Gamma}) = k\left[\pi - (\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma})\right] \quad \text{όπου}$$

k είναι μια σταθερά, ανεξάρτητη του τριγώνου.

(αντίστοιχα για απλά ασυμπτωτικά τρίγωνα $E(XABY) = k(\pi - (\hat{A} + \hat{B}))$

διπλά ασυμπτ. τριγ. $E(XOY) = k(\pi - \sphericalangle XOY)$

Τριπλά $E = k \cdot \pi$.



Συνέπεια:

Αν δύο τρίγωνα έχουν ίδιο άθροισμα γωνιών $\Rightarrow$ έχουν ίδιο εμβαδό

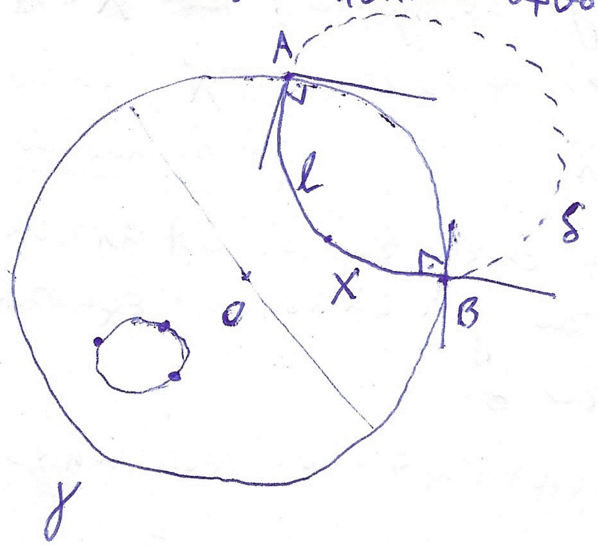
Μοντέλο του Poincaré

γ κύκλος στο επίπεδο, κέντρου O, ακτίνας $r>0$

Σ : Τα εσωτερικά σημεία του γ

E : 1) Διάμετροι του γ, χωρίς τα άκρα τους

2) Τόξα κύκλων ορθογώνιων στον γ.



* Οι εφαπτόμενες των γ και δ στα σημεία τομής τους A, B είναι κάθετες

Σχέση του ανήκειν (πρόσπτωσης): η συνηθισμένη

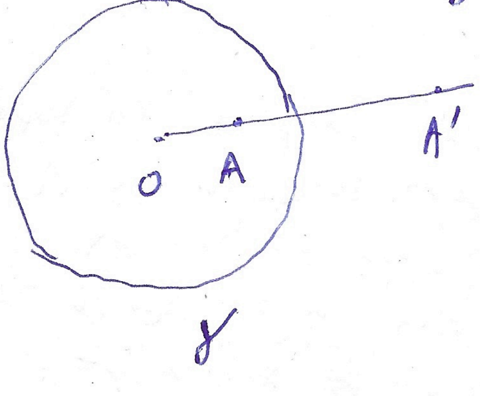
$X \in l$, αν το X είναι σημείο του τόξου l.

(I1) Για κάθε δύο σημεία $X, Y \in \Sigma$ υπάρχει μοναδική $l \in E$ που τα περιέχει

(I2) κάθε $l \in E$ περιέχει τουλάχιστον 2 σημεία. Υπάρχουν 3 σημεία που δεν ανήκουν στην ίδια ευθεία

↳ Το πρώτο ΟΚ. Το δεύτερο: 3 σημεία ορίζουν μοναδικό κύκλο. Αυτός δεν είναι αναγκαστικά ορθογώνιος στον γ.

Για το (I1) πρέπει να δούμε μερικά πράγματα για τον μετασχηματισμό της αντιστροφής ως προς σημείο με δύναμη r^2.



γ κύκλος κέντρου O ακτίνας r

Έστω A σημείο του επιπέδου, $A \neq O$

Η αντιστροφή του A ως προς O με δύναμη r^2 ορίζεται ως το μοναδικό A' της ημιευθείας $\overrightarrow{OA}$ με την ιδιότητα

$$OA \cdot OA' = r^2$$

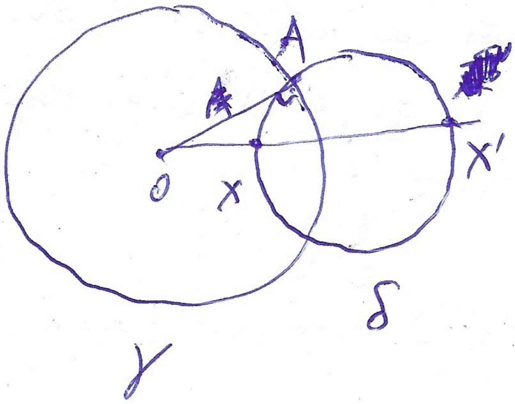
↳ OA, OA' Ευκλείδειο μήκος

* Α είναι επίσης η αντιστροφή του Α'.

Ιδιότητες

1) Η αντιστροφή κέντρου Ο δύναμης r^2 αφήνει τον κύκλο γ (κέντρου Ο ακτίνας r) αναλλοίωτο, απεικονίζει το εσωτερικό του (εκτός του Ο) στο εξωτερικό, και αντίστροφα.

2) Αν ένας κύκλος δ τέμνει τον γ ορθογώνια, $X \in \delta$, X' το σημείο τομής του δ με την ημιευθεία $\vec{OX}$, τότε το X' είναι η αντιστροφή του X.

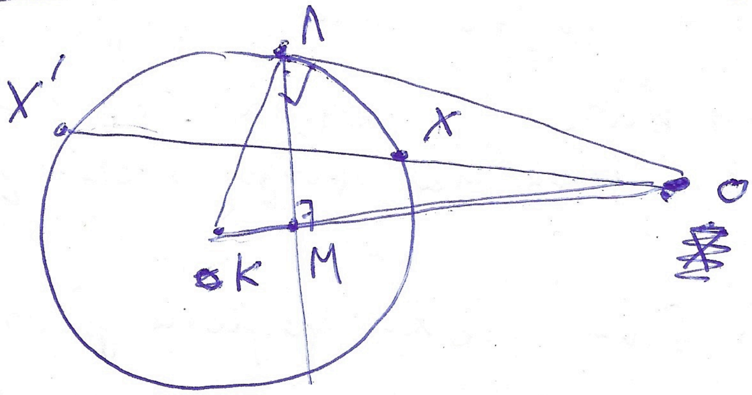


. Α σημείο τομής των δύο κύκλων: ΟΑ ακτίνα του γ, αλλά ίσοι εφαπτομένη του δ.

Δύναμη σημείου ως προς κύκλο:

$$OX \cdot OX' = r^2 = (OA)^2$$

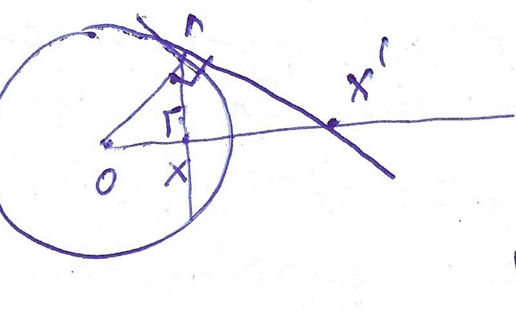
Δύναμη σημείου ως προς κύκλο γ (ακτίνας r)



1) $OX \cdot OX'$ είναι ανεξάρτητο της ημιευθείας ΟΧ που τέμνει έναν κύκλο ακτίνας ρ και $OX \cdot OX' = \rho^2$.

2) ΟΛ εφαπτόμενη του γ $\Leftrightarrow$ $O\Lambda^2 = r^2$

Κατασκευή αντιστροφής



Έστω Χ εσωτερικό, ΧΛ χορδή $\perp$ ΟΧ, ΛΧ' εφαπτ. του κύκλου στο Λ, Χ' σημείο τομής με την ΟΧ. Τότε Χ' είναι η αντιστροφή του Χ ως προς κέντρο Ο δύναμη r^2.

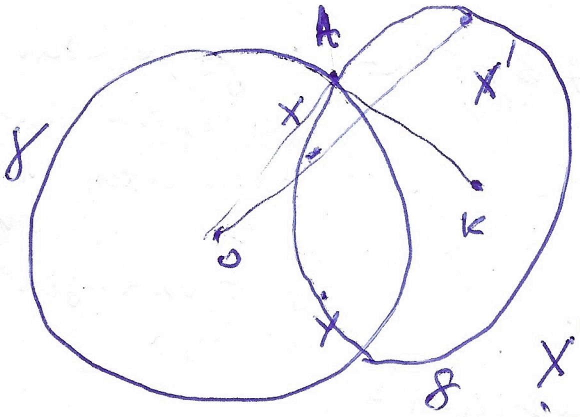
ΟΛΧ , ΟΛΧ' όμοια ⇒ $\measuredangle X O \Lambda = \measuredangle X' O \Lambda$ (κοινή)

$\measuredangle \Lambda X O = \measuredangle O \Lambda X' = 1 \perp$

$\measuredangle O \Lambda X = \measuredangle \Lambda X' O$ (αθροισμα γωνιων $= 2\perp$)

$\Rightarrow \dfrac{OX}{O\Lambda} = \dfrac{O\Lambda}{OX'} \Rightarrow OX \cdot OX' = O\Lambda^2 = r^2 \Rightarrow X'$ αντίστροφο του X.

Κατασκευή ευθείας του επιπέδου του Poincaré που διέρχεται από δύο σημεία X, Y του επιπ. Poincaré



1) X, Y, O συνευθειακά ⇒ η ζητούμενη ευθεία είναι η διάμετρος

2) Έστω X, Y, O όχι συνευθειακά X' η αντιστροφή του X' ως προς κέντρο X, δύναμη r^2 (r η ακτίνα του γ)

Έστω δ ο μοναδικός κύκλος που ορίζουν τα X', X, Y. $OA = r \Rightarrow \underbrace{OA \cdot OA}_{OA \text{ ακτίνα του } \gamma} = r^2 = \underbrace{OX \cdot OX'}_{X' \text{ αντίστροφο του } X}$

⇒ ΟΑ εφαπτόμενη του δ ⇒ $OA \perp AK$ ⇒ γ, δ ορθογώνιοι.

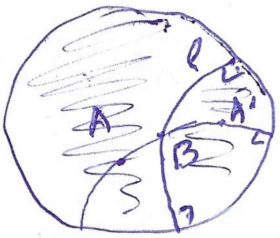
⇒ Το τόξο του δ που βρίσκεται εσωτερικά του γ είναι η ζητούμενη ευθεία του δίσκου του Poincaré

④ Αξιώματα τα μεταξύ ΙΙ1, ΙΙ2, ΙΙ3

Χ-Υ-Ζ ορίζεται με τον αναμενόμενο τρόπο και τα αξιώματα αυτά ισχύουν φανερά.

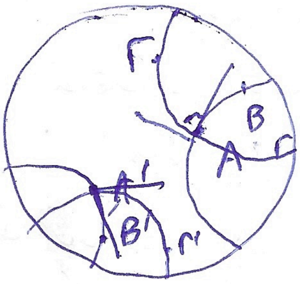
Pasch ΙΙ4 : δεν θα το δείξουμε

<u>Ημιεπίπεδα</u>



$\Sigma(\ell, A)$, $\Sigma(\ell, A')$ δύο ημιεπίπεδα

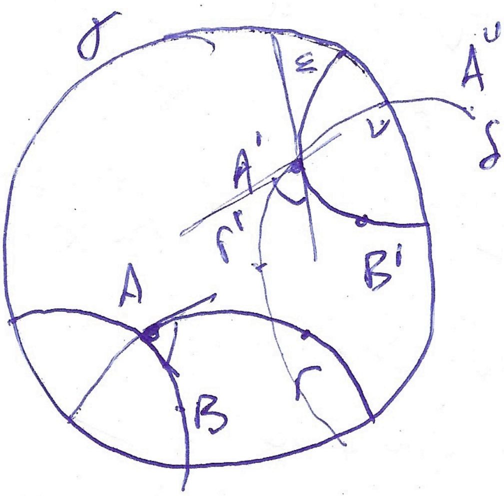
<u>Συμφωνία γωνιών :</u>



$\vec{AB}$, $\vec{A\Gamma}$ ημιευθείες

$\measuredangle BA\Gamma \cong \measuredangle B'A'\Gamma'$ ανν οι γωνίες των εφαπτόμενων στους αντίστοιχους κύκλους είναι ίσες στην Ευκλείδεια Γεωμετρία.

Μεταφορά γωνίας σε δοσμένη ημιευθεία

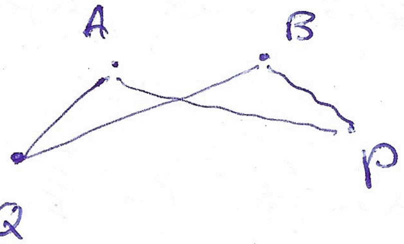


Πρέπει να κατασκευάσουμε ημιευθεία $\vec{A'\Gamma'}$ ώστε $\measuredangle BA\Gamma = \measuredangle B'A'\Gamma'$

A'' αντιστροφή του A' ως προς γ.
δ ο μοναδικός κύκλος που διέρχεται από A', A'' του οποίου η εφαπτομένη σχηματίζει την δοσμένη γωνία με την ε.

(ε) Συμφωνία ευθυγράμμων τμημάτων.

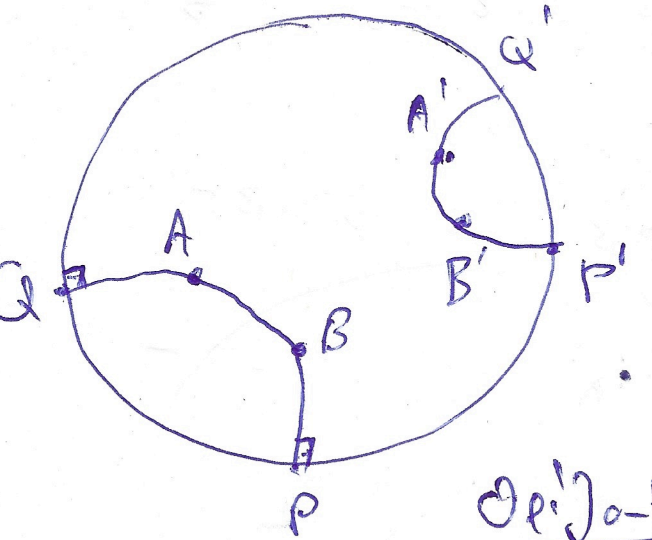
Διπλός λόγος 4 σημείων



$$(AB:PQ) = \frac{AP \cdot BQ}{BP \cdot AQ}$$

<u>Ιδιότητα</u>. Ο διπλός λόγος 4 σημείων δεν μεταβάλλεται κάτω από μια αντιστροφή ως προς κέντρο O δύναμης r^2

Έστω AB, $A'B'$ δύο ευθ. τμήματα στο επίπεδο του Poincaré, l, l' οι Poincaré ευθείες που τα περιέχουν.



P, Q. P', Q' τα σημεία τομής των l, l' με την γ
$(A-B-P,\ Q-A-B,$
$A'-B'-P',\ Q'-A'-B')$ ⊛

<u>Ορίζουμε</u> $AB \simeq A'B'$ αν και μόνο αν $(AB:PQ) = (A'B':P'Q')$. (σε λόγω της ⊛)

Poincaré απόσταση των A, B. (Poincaré μήκος ευθ. τμ. AB)

$$d(AB) = |\log(AB:PQ)|.$$

$AB, A'B'$

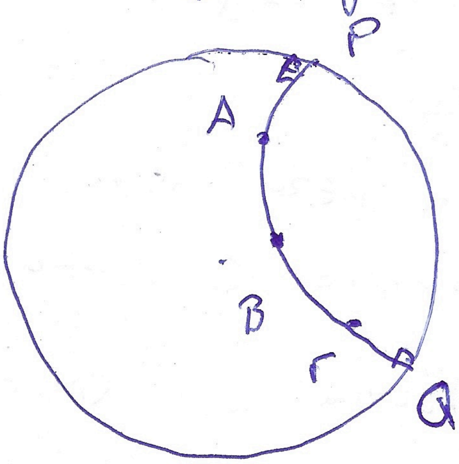
↳ Δύο ευθύγραμμα τμήματα είναι ίσα αν και μόνο αν
$d(AB) = d(A'B')$

⑥ Ενδεικτικά, θα δείξουμε το III 2 (Προσθετικότητα)

Έστω $A-B-\Gamma$ στο επίπεδο (δίσκο) του Poincaré

l η Poincaré ευθεία που τα περιέχει και τέμνει

τον κύκλο γ στα P, Q.



$$d(A,\Gamma) = \left|\log (A\Gamma : PQ)\right|$$

$$= \left|\log \frac{AQ \cdot \Gamma P}{\Gamma Q \cdot AP}\right|$$

$$= \left|\log \frac{AQ\, BP}{BQ \cdot AP} \cdot \frac{BQ \cdot \Gamma P}{BP \cdot \Gamma Q}\right|$$

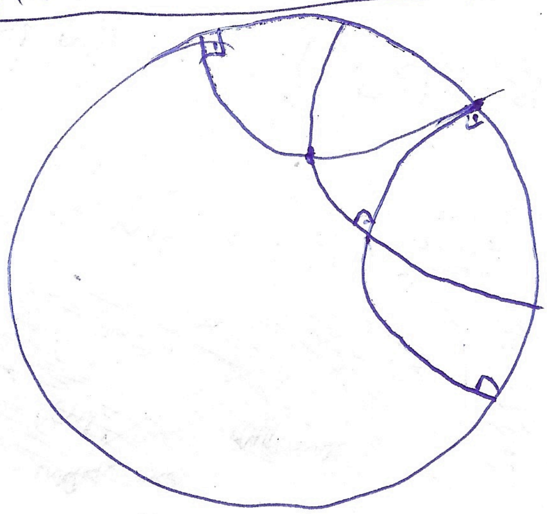
$$= \left|\log \frac{AQ \cdot BP}{BQ \cdot AP} + \log \frac{BQ \cdot \Gamma P}{\Gamma Q \cdot BP}\right|$$

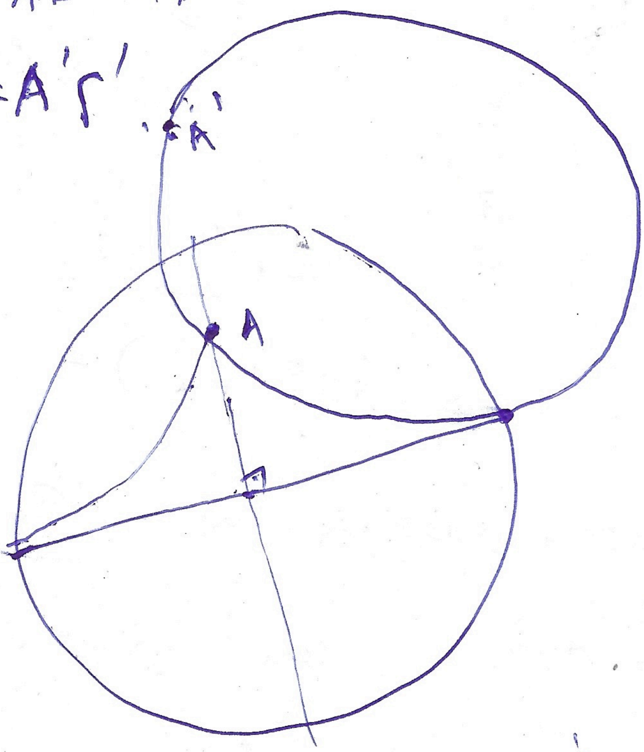
$$= d(A,B) + d(B,\Gamma)$$

$\Rightarrow$ Αν $A'-B'-\Gamma'$ με $AB = A'B'$ και $B\Gamma = B'\Gamma'$

τότε και $A\Gamma = A'\Gamma'$.

Οριακές παράλληλες





Δίπλα - τριπλά ασυμπτωτικά τρίγωνα.