ΜΕΡΟΣ Β

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΕΠΙΠΕΔΗ ΥΠΕΡΒΟΛΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ.

(Γράφτηκε και Διδάχθηκε από τον)
Δ. Λάππα

Προλογος

1. Η Υπερβολικη Γεωμετρια (Υ.Γ.) προεκυψε σαν ωριμο αποτελεσμα στην κριτικη του 5ου Αιτηματος και σαν τετοιο επιτευχθηκε ταυτοχρονα απο πολλους ερευνητες. Αναμφιβολα την πατροτητα για τη δυνατοτητα υπαρξης γεωμετριων οπου το 5ο Αιτημα δεν ισχυει διεκδικει ο Gauss, που γυρω στο 1815 ειχε αναπτυξει θεωρηματα αυτων των γεωμετριων, χωρις ομως <u>ποτε</u> να δημοσιοποιησει τις ερευνες του.

2. Η τιμη της ανακαλυψης της Υ.Γ. ανηκει στους Bolyai και Lobachevsky που δημοσιευσαν σχεδον ταυτοχρονα, γυρω στο 1830, αποτελεσματα απο τον κλαδο που με σημερινη ορολογια λεμε Υπερβολικη Γεωμετρια. Βεβαια μια γεωμετρια εκεινη την εποχη οφειλε να εχει "προφανη" υπαρξη ετσι η Υ.Γ. συνηθως αναφεροταν σαν φανταστικη. Ακομα αρχισαν να δημιουργουνται ερωτηματα της μορφης: Αρκει η απουσια αντιφασεων στα πρωτα αποτελεσματα για να εξασφαλισει οτι τελικα δεν θα παρουσιασθουν αντιφασεις κατα την αναπτυξη της θεωριας;

3. Προς το τελος ομως του 19ου αιωνα αναθεωρηθηκαν πολλες αποψεις που αφορουσαν τη φυση των μαθηματικων σαν επιστημη. Ερωτηματα οπως αυτο του 2. αντιμετωπισθηκαν, με επιτυχια, μεσα απο αυστηρες θεμελιωσεις που βασιζονταν σ' ενα συστημα αξιωματων, αρχικα επιλεγμενων χωρις αναγκαιες αντιστοιχιες με φυσικα προτυπα. Ενα πληρες συστημα αξιωματων για τις υποψη γεωμετριες δοθηκε απο τον Hilbert γυρω στα 1900. Η δυνατοτητα "υπαρξης" της Υ.Γ. ειχε αναγνωρισθει λιγο πριν, απο τους Beltrami και Klein πρωτα και απο τον Poincare αργοτερα, με την κατασκευη <u>μοντελων</u> της γεωμετριας αυτης.

4. Οσον αφορα τη σειρα που θα ακολουθηθει στην παρουσιαση σημειωνουμε τα εξης:.

(α) Τιθενται τα αξιωματα, που ειναι αυτα του Hilbert, με μικρες ομως παραλλαγες, για να ειναι πιο αμεσα χρησιμοποιησιμα.

(β) Αναπτυσσονται αποτελεσματα της Ουδετερης Γεωμετριας (Ο.Γ.), δηλαδη της Γεωμετριας χωρις κανενα αξιωμα παραλληλων και κατα συνεπεια τα θεωρηματα της ειναι καλα τοσο στην Ευκλειδεια οσο και στην Υπερβολικη Γεωμετρια.

(γ) Με βαση το Υπερβολικο Αξιωμα αποδεικνυονται τα κυρια αποτελεσματα της Επιπεδης Υπερβολικης Γεωμετριας, σε αντιπαραθεση με την Ευκλειδεια Γεωμετρια. Γινεται προσπαθεια ωστε τα αποτελεσματα που αποδεικνυονται να ειναι χαρακτηριστικα για την ιδιαιτεροτητα τους.

(δ) Περιγραφονται με αρκετες λεπτομερειες τα μοντελα του Poincare για την Υ.Γ. και αποδεικνυεται πληρως οτι ειναι πραγματι μοντελα.

§0. Συνοπτικη παρουσιαση αποτελεσματων της Ουδετερης Γεωμετριας.

Για διευκολυνση του αναγνωστη και καθορισμο της φρασεολογιας γινεται μια συνοπτικη παρουσιαση της Ουδετερης Γεωμετριας (Ο.Γ.), δηλαδη της Γεωμετριας που αναπτυσσεται χωρις τη χρηση κανενος αξιωματος Παραλληλιας, στα πλαισια της αξιωματικης του Hilbert. Για μια ολοκληρωμενη αναπτυξη του θεματος ο αναγνωστης παραπεμπεται στο βιβλιο "Χ. Στραντζαλος: Η εξελιξη των Ευκλειδειων και μη Ευκλειδειων Γεωμετριων, Αθηνα 1989".

Ο Hilbert θεμελιωσε αξιωματικα τη Γεωμετρια αρχιζοντας απο "σημεια" και "ευθειες" θεωρωντας οτι βρισκονται μεταξυ τους στις "σχεσεις" (κατ' αρχην αοριστες) της "προσπτωσεως" του "μεταξυ" και της "συμφωνιας" και απαιτησε οι "σχεσεις" να υποταξου" και της "συμφωνιας" ...

Βεβαια μια τετοια θεμελιωση πρεπει να ικανοποιει τις στοιχειωδης απαιτησεις μιας αξιωματικης θεωριας δηλαδη, τα αξιωματα που τελικα θα επιλεγουν να ειναι ανεξαρτητα μεταξυ τους, η θεωρια να ειναι πληρης, και να μην οδηγουμαστε σε αντιφασεις, απαιτησεις που γενικα δεν μπορουν ευκολα να ελεγχθουν.

Οι αποδειξεις για το οτι η θεωρια πληρει τις ελαχιστες προυποθεσεις αναγονται στη κατασκευη μοντελων για τη θεωρια δηλαδη: Απεικονιζονται τα αντικειμενα (και οι σχεσεις) σε γνωστες θεωριες, που πληρουν τις προυποθεσεις. Τοτε, ~~καθε αξιωμα της θεωριας~~ "μεταφραζεται" σε μια προταση της γνωστης θεωριας, προταση που η αληθεια της πρεπει να αποδειχθει. Σα συστημα χωρις αντιφασεις ο Hilbert θεωρησε το συστημα των (φυσικων) αριθμων, οποτε μπορεσε να αποδειξει οτι το συνηθισμενο καρτεσιανο επιπεδο ειναι ενα "μοντελο" για την Ευκλειδεια Γεωμετρια του Επιπεδου στα πλαισια της Αξιωματικης του Παρουσιασης., που, ετσι γινεται αποδεκτη σαν Αξιωματικη Θεωρια.

0.1 Αξιωματα για την Ουδετερη Γεωμετρια (Ο.Γ.)

Α) Αξιωματα του "ανηκειν" (αξιωματα Προσπτωσης) - Χωρις Σχολια.

- **Α.** Αξιωματα του "ανηκειν" (αξιωματα Προσπτωσης).

1. Για καθε δυο (διαφορετικα) σημεια υπαρχει ακριβως μια ευθεια που τα περιεχει.
2. Καθε ευθεια περιεχει τουλαχιστο δυο σημεια.
3. Υπαρχουν τρια τουλαχιστο μη συνευθειακα σημεια.

- **Β.** Αξιωματα του "μεταξυ" (:αξιωματα διαταξης) και συντομα σχολια.

1. Οταν Α-Β-Γ (:διαβαζεται Β μεταξυ Α και Γ) τοτε Α,Β,Γ συνευθεια και και Γ-Β-Α.

Αριστερα του Β,Δ   Ε αριστερα

2. Για δεδομενα Β και Δ υπαρχουν Α,Γ,Ε ωστε : Α-Β-Δ, Β-Γ-Δ , Β-Δ-Ε
3. Για τρια συνευθειακα σημεια ακριβως το ενα βρισκεται μεταξυ των αλλων δυο.

ορισμοί

Σημειωση Τα μεχρις εδω αξιωματα μας επιτρεπουν να ορισουμε:

Ευθυγραμμο τμημα ΑΒ : Τα σημεια Γ με Α-Γ-Β μαζι με τα ακρα Α,Β.

Ημιευθειες $\overrightarrow{AB}$: Τα σημεια του ευθυγραμμου τμηματος ΑΒ μαζι με τα Γ: Α-Β-Γ.

Βεβαια ισχυει $\overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA} = AB$ και $\overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{BA} = \overleftrightarrow{AB}$ (:η ευθεια ΑΒ).

Ποτε 2 σημεια Α,Β βρισκονται προς την ιδια μερια και ποτε προς διαφορ. μερες της

Ορισμος: Αν Α,Β ειναι σημεια και l ευθεια ωστε τα Α,Β να μην ανηκουν στην l, τοτε θα λεμε οτι τα Α και Β "βρισκονται προς το ιδιο μερος της l" οταν Α≡Β ή το ευθυγραμμο τμημα ΑΒ δεν περιεχει σημεια της l. Τα Α,Β "βρισκονται σε αντιθετα μερη της l" (: εκατερωθεν της l) οταν το ευθυγραμμο τμημα ΑΒ εχει κοινο σημειο με την l.

4. Για καθε ευθεια l και καθε τρια σημεια Α,Β και Γ που δεν βρισκονται στην l:

συνεπειες αποκλειω την μεταβατικη ιδιοτητα

(i) Αν τα Α και Β βρισκονται προς το ιδιο μερος της l, ενω τα Β και Γ βρισκονται προς το ιδιο μερος της l τοτε Α και Γ βρισκονται προς το ιδιο μερος της l.

(ii) Αν τα Α και Β βρισκονται εκατερωθεν της l ενω τα Β και Γ βρισκονται εκατερωθεν της l τοτε τα Α και Γ βρισκονται στο ιδιο μερος της l.

Παρατηρησεις: (1) Οπως μπορει να αποδειχθει το 4. μας εξασφαλιζει οτι καθε ευθεια "περιβαλλει" δυο ημιεπιπεδα (:χωριζει το επιπεδο) που δεν εχουν κοινα σημεια.

(2) Τα αξιώματα ως εδώ μας επιτρέπουν να ορίσουμε μια γωνία, το εσωτερικό της, ένα τρίγωνο κλπ.

• **Γ. Αξιώματα συμπτώσεως ("συμφωνίας", ισότητας) για ευθύγραμμα τμήματα και γωνίες**

① Για A,B, διαφορετικά μεταξύ τους και για κάθε A' και ημιευθεία $\vec{A'X}$ υπάρχει B' με A'-B'-X και AB≅A'B' (διαβάζεται AB σύμφωνο με A'B').

② Αν AB≅ΓΔ και AB≅EZ τότε, ΓΔ≅EZ. Κάθε ευθύγραμμο τμήμα είναι σύμφωνο με τον εαυτό του.

③ Όταν A-B-Γ και A'-B'-Γ' με (AB≅A'B', BΓ≅B'Γ') τότε AΓ≅A'Γ'.

σύμφωνα ευθυγρ. τμήματα

4. Το αντίστοιχο του 1. για τη "μεταφορά" των γωνιών: " με δεδομένο σημείο για κορυφή, με δεδομένη ημιευθεία για τη μια πλευρά και με δεδομένο ημιεπίπεδο για την άλλη πλευρά"!

5. Το αντίστοιχο του 2. για τη σχέση συμφωνίας των γωνιών

συμπτωση γωνιών

6. Το Αξίωμα για τη συμφωνία των τριγώνων: "Δυο τρίγωνα που έχουν σύμφωνα δυο "πλευρές" και την "περιεχόμενη γωνία" είναι σύμφωνα (:δηλαδή έχουν και τα υπόλοιπα στοιχεία της σύμφωνα).

σύμφωνα τρίγωνα.

Δ. Αξιώματα συνεχείας

① Το Αξίωμα Αρχιμήδους-Ευδόξου για τα ευθύγραμμα τμήματα:

Αν AB, ΓΔ τυχαία ευθύγραμμα τμήματα τότε υπάρχει ένας αριθμός n (: φυσικός) τέτοιος, ώστε: " αν το ΓΔ επαναληφθεί n φορές στην ημιευθεία $\vec{AB}$, αρχίζοντας από το A, τότε υπάρχει σημείο E ώστε nΓΔ≅AE και A-B-E."

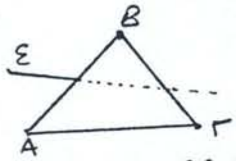
② Το Αξίωμα των τομών του Dedekind.

Ας υποθέσουμε ότι το σύνολο των σημείων μιας ευθείας ℓ μπορεί να γραφεί σαν ένωση δύο μη κενών υποσυνόλων Σ_1 και Σ_2 που έχουν τις ιδιότητες: "κανένα σημείο του ενός συνόλου να μην βρίσκεται μεταξύ δυο σημείων του άλλου". Τότε υπάρχει ένα μοναδικό σημείο O που βρίσκεται στην ℓ τέτοιο ώστε:

$$P_1 - O - P_2 \iff P_1 \in \Sigma_1, P_2 \in \Sigma_2 \ (\text{και } O \neq P_1, P_2).$$

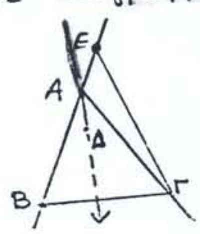
0.2. Απαραίτητες γνώσεις από την Ουδέτερη Γεωμετρία (Ο.Γ.)

1. Η θέση του Αξιώματος του Pasch: Αν στο τρίγωνο ΑΒΓ η ℓ συνα-
ντά την ΑΒ μεταξύ των Α και Β τότε συναντά είτε την ΒΓ είτε την
ΑΓ, και αν δεν διέρχεται από το Γ ακριβώς μία από τις δύο:



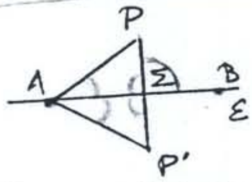
Αν το Γ βρίσκεται στην ε δεν υπάρχει τίποτα να απο-
δειχθεί. Τα Α και Β βρίσκονται εκατέρωθεν την ε, το δε
Γ βρίσκεται σ' ένα από τα δύο ημιεπίπεδα που η ε χω-
ρίζει το επίπεδο. Αν βρίσκεται στο ίδιο ημιεπίπεδο με το Α τότε
τα Β και Γ βρίσκονται εκατέρωθεν της ε και έτσι η ΒΓ συναντά την ε.
Αντίστοιχοι συλλογισμοί γίνονται και όταν τα Α και Γ είναι εκατέρωθεν της ε.

2. Η παραλλαγή του Αξιώματος του Pasch (: Θεώρημα Cross-Bar)
Αν η $\overrightarrow{A\Delta}$ είναι εσωτερική στη γωνία $B\hat{A}\Gamma$ τότε η $\overrightarrow{A\Delta}$ συναντά κα-
θε ευθύγραμμο τμήμα που τα άκρα του βρίσκονται στις πλευρές της γωνίας:



Έστω Ε τέτοιο, ώστε Β-Α-Ε. Εφαρμόζουμε Pasch στο
τρίγωνο $(\hat{B\text{Ε}\Gamma})$, για την $\overleftrightarrow{A\Delta}$. Η $\overleftrightarrow{A\Delta}$ δεν μπορεί να συνα-
ντά την πλευρά ΕΓ γιατί το Δ είναι εσωτερικό στη
γωνία $B\hat{A}\Gamma$. Άρα η $\overrightarrow{A\Delta}$ συναντά την ΒΓ.

3. Ύπαρξη καθέτης: Για κάθε ευθεία ℓ και κάθε σημείο Ρ υπάρχει
ευθεία από το Ρ κάθετη στην ℓ (: δηλαδή που σχηματίζει με την ℓ "ορθή"
γωνία, όπου η ορθή γωνία ορίζεται σαν το "μισό" μιας ευθείας γωνίας):

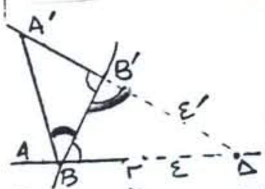


Για Α, Β πάνω στην ε και Ρ εκτός της ε μεταφέ-
ρεται η γωνία $P\hat{A}B$ στο Α της $\overrightarrow{AB}$ και στο ημιε-
πίπεδο που δεν περιέχει το Ρ. Τότε από τη συγκρι-
ση των τριγώνων $(A\hat{\Sigma}P)$ και $(A\hat{\Sigma}P')$ έχουμε $A\hat{\Sigma}P \cong A\hat{\Sigma}P'$ και από τις
"κατά κορυφήν" γωνίες $A\hat{\Sigma}P' \cong P\hat{\Sigma}B$. Από τη μεταβατικότητα της σχέσης
συμπτώσεως για τις γωνίες, προκύπτει: $A\hat{\Sigma}P \cong P\hat{\Sigma}B$ και έτσι $\overleftrightarrow{PP'} \perp \varepsilon$.

4. Το θεώρημα για τις "εντός εναλλάξ" γωνίες: "Αν οι ℓ και ℓ' τε-
μνόμενες από μια τρίτη ευθεία έχουν τις εντός εναλλάξ γωνίες ίσες

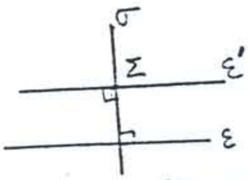
ειναι παραλληλες

τοτε δεν εχουν κανενα κοινο σημειο: Εστω οτι οι ε και ε' τεμνονται στο Δ. Πανω στη $\vec{BE}$ παιρνουμε $B'A' \cong B\Delta$ (: B' στο ημιεπιπεδο που δεν βρισκεται το Δ). Απο τη συμφωνια των τριγωνων $(B'\overset{\triangle}{B}\Delta)$ και $(A'\overset{\triangle}{B'}B)$ εχουμε $A'\hat{B}B' \cong \hat{B}B'\Delta$).

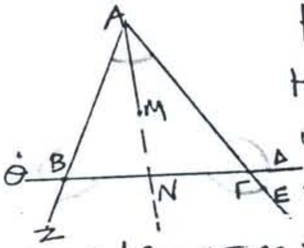


Ομως $B\hat{B'}\Delta \cong A\hat{B}B'$ (και απο τη μοναδικοτητα μεταφορας των γωνιων) το A' βρισκεται στην ε, ατοπο.

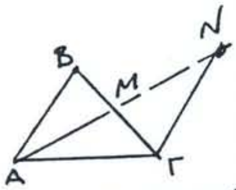
5. Υπαρξη Παραλληλης - Συμβιβασμενη παραλληλη. Για καθε ευθεια ℓ και καθε σημειο P εξω απο αυτη υπαρχει, μια τουλαχιστο, ευθεια m που διερχεται απο το P και δεν συναντα την ℓ: Απο το Σ (εκτος της ε) φερουμε τη σ καθετη στην ε. Η ε' θα ειναι η ε' καθετη στην σ, απο το Σ. Οι ε και ε' δεν μπορουν να συναντωνται αφου τεμνομενες απο τη σ σχηματιζουν τις εντος εναλλαξ γωνιες συμφωνες. Η ετσι κατασκευασμενη ε' θα αναφερεται σαν "η συμβιβασμενη παραλληλη, απο το Σ προς την ε".



6. Θεωρημα της εξωτερικης γωνιας. (Καθε) εξωτερικη γωνια ενος τριγωνου ειναι μεγαλυτερη απο (καθε) εντος και απεναντι εσωτερικη γωνια του τριγωνου: (πχ η $B\hat{A}\Gamma$ ειναι μικροτερη απο καθε μια απο τις $A\hat{\Gamma}\Delta \cong B\hat{\Gamma}E$ και $\Theta\hat{B}A \cong Z\hat{B}\Gamma$). Δειχνουμε οτι $B\hat{A}E < A\hat{\Gamma}\Delta$. 1) αν $B\hat{A}E \cong A\hat{\Gamma}\Delta$ τοτε οι ΑΒ και ΒΔ τεμνονται απο την ΑΕ και εχουν τις εντος εναλλαξ γωνιες ισες οποτε δεν μπορουν να εχουν κοινο σημειο ατοπο. 2) αν $B\hat{A}E > A\hat{\Gamma}\Delta$ (: μεταφεροντας την ΑΓΔ στο Α) υπαρχει ημιευθεια $\vec{AM}$ εσωτερικη της $B\hat{A}\Gamma$ ωστε $M\hat{A}\Gamma \cong A\hat{\Gamma}\Delta$. Τοτε ομως απο την παραλλαγη του αξιωματος του Pasch (: 2.) η $\vec{AM}$ συναντα την ΒΓ, ατοπο απο το θεωρημα για τις εντος εναλλαξ γωνιες. Τελικα $\boxed{B\hat{A}E < A\hat{\Gamma}\Delta}$.



7. Το θεωρημα των Saccheri-Legendre. (θεμελιωδες θεωρημα της Ο.Γ.)
Το αθροισμα των γωνιων τυχαιου τριγωνου δεν μπορει να υπερβαινει τις δυο ορθες.



(α) (Dehn) Το τριγωνο $(\overset{\triangle}{AB\Gamma})$ μπορει να αντικατασταθει απο ενα αλλο που εχει το ιδιο αθροισμα γωνιων, που ομως εχει μια γωνια μικροτερη η ιση απο το μισο της (π.χ.) $\hat{A}$: Πραγματι αν AM η διαμεσος και $AM \cong MN$ τοτε το τριγωνο $(\overset{\triangle}{A\Gamma N})$ εχει αθροισμα γωνιων ιδιο με το αθροισμα γωνιων του $(\overset{\triangle}{AB\Gamma})$. Αν $N\hat{A}\Gamma \le \frac{1}{2} B\hat{A}\Gamma$, τοτε το ζητουμενο τριγωνο ειναι το $(\overset{\triangle}{AN\Gamma})$. Αλλοιως η αντιστοιχη κατασκευη γινεται για τη κορυφη B.

(β) Προκυπτουμε "επαγωγικα" δηλαδη σχηματιζουμε $(\overset{\triangle}{A_1B_1\Gamma_1})$: $\hat{A}_1+\hat{B}_1+\hat{\Gamma}_1 \cong \hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}$ και $\hat{A}_1 \le \frac{1}{2}\hat{A} := \frac{1}{2^1}\hat{A}$, $(\overset{\triangle}{A_2B_2\Gamma_2})$: $\hat{A}_2+\hat{B}_2+\hat{\Gamma}_2 = \hat{A}_1+\hat{B}_1+\hat{\Gamma}_1 = \hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}$ και $\hat{A}_2 \le \frac{1}{2}\hat{A}_1 \le \frac{1}{2^2}\hat{A}$, ..., $(\overset{\triangle}{A_nB_n\Gamma_n})$: $\hat{A}_n+\hat{B}_n+\hat{\Gamma}_n = \hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}$ και $\hat{A}_n \le \frac{1}{2^n}\hat{A}$.

(γ) Εστω $\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma} = 2^L+\delta$, ωστε $0<\hat{\delta} = (\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma})-2^L$. Εφαρμοζουμε το θεωρημα Αρχιμηδους-Ευδοξου για τις γωνιες $\hat{A}$ και $\hat{\delta}$ οποτε υπαρχει n_0 τετοιο ωστε $2^{n_0}\delta > \hat{A}$, οποτε στο βημα $m = n_0+1$ απο το (β) και στο τριγωνο $(\overset{\triangle}{A_mB_m\Gamma_m})$ εχουμε οτι $\hat{A}_m \le \frac{1}{2^m}\hat{A} < \delta$.

(δ) Απο το (γ) ισχυει $\hat{B}_m+\hat{\Gamma}_m = 2^L+(\delta-\hat{A}_m) > 2^L$ αποτελεσμα που αντιβαινει στο Θεωρημα της εξωτερικης γωνιας στο $(\overset{\triangle}{A_mB_m\Gamma_m})$.

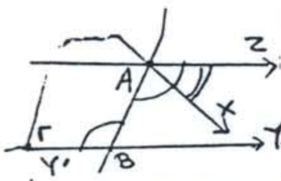
8. Τα αξιωματα παραλληλιας στις διαφορες διατυπωσεις τους.

(Α) Το αξιωμα των Παραλληλων για την Ευκλειδεια Γεωμετρια (κατα Hilbert): "Για καθε ευθεια ε και καθε σημειο Α εκτος αυτης υπαρχει το πολυ μια ευθεια ε', απο το Α, που να μην συναντα την ε" (= η "παραλληλος").

(Β) Το 5ο Αιτημα του Ευκλειδη: "Αν δυο ευθειες τεμνονται απο μια τριτη ετσι, ωστε οι εντος και επι τα αυτα μερη γωνιες να εχουν αθροισμα μικροτερη των δυο ορθων τοτε οι ευθειες τεμνονται και το σημειο τομης βρισκεται στο ημιεπιπεδο που ορίζουν οι γωνιες".

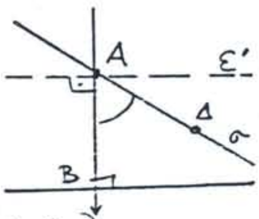
Ισχυρισμος: Οι διατυπωσεις (Α) και (Β) ειναι ισοδυναμες (στο πλαισιο της Ουδετερης Γεωμετριας).

(Α)⇒(Β) (Αν $A\hat{B}Y + B\hat{A}X < 2^L$, οι $\vec{AX}$ και $\vec{BY}$ συναντωνται...)



Μεταφερουμε τη γωνια $y'\hat{B}A$ στην $\overrightarrow{AB}$, στο A, προς το "ημιεπιπεδο των γωνιων". Αφου $y'\hat{B}A + A\hat{B}y = 2^L$ η $\overrightarrow{AZ}$, ωστε $B\hat{A}Z \cong y'\hat{B}A$, ειναι εξωτερικη της $B\hat{A}x$. Επιπλεον οι $\overleftrightarrow{AZ}$ και $\overleftrightarrow{By}$ δεν τεμνονται και το (A) μας εξασφαλιζει οτι η $\overrightarrow{Ax}$ συναντα την $\overrightarrow{By}$. ~~Αν~~ το κοινο τους σημειο Γ ειναι στο αλλο ημιεπιπεδο τοτε στο τριγωνο $(\overset{\triangle}{AB\Gamma})$ η εξωτερικη γωνια $B\hat{A}x$ ειναι μικροτερη απο την εσωτερικη γωνια $\Gamma\hat{B}A$, ατοπο!

(B)⇒(A). Εστω ε' η συνηθης παραλληλη απο το A προς την ε (:καθετη A, στη καθετη απο το A προς την ε). Αν σ ειναι



μια αλλη ευθεια απο το A, τοτε σχηματιζει μια οξεια γωνια με την $\overrightarrow{AB}$ (οπως π.χ. στο σχημα). Τοτε $A\hat{B}\Gamma + B\hat{A}\Delta < 2^L$ και απο το 5ο Αιτημα (:(B)) η σ πρεπει να συναντα την ε. Αρα η ε' ειναι η μοναδικη παραλληλος απο το A προς την ε!

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΠΟ ΤΗΝ ΥΠΕΡΒΟΛΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ.

Υπερβολικη Γεωμετρια (Υ.Γ.) ειναι η Γεωμετρια που προκυπτει απο την Ευκλειδεια Γεωμετρια αφου επισυναγουμε μια αρνηση του (γνωστου) αιτηματος των παραλληλων, στην κατα Hilbert διατυπωση, που θα ονομαζουμε Υπερβολικο Αξιωμα (Υ.Α.) Αναλυτικα:

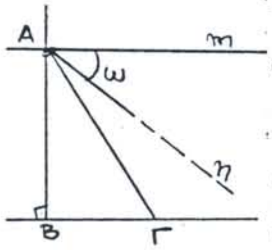
ΥΠΕΡΒΟΛΙΚΟ ΑΞΙΩΜΑ: Υπαρχει ευθεια l και υπαρχει σημειο A, εκτος της l, ετσι ωστε απο το A να διερχονται τουλαχιστον δυο ευθειες m και η οι οποιες δεν τεμνουν την l.

Στα επομενα θα παρουσιασουμε στοιχεια της Υ.Γ. χαρακτηριστικα για την ιδιαιτεροτητα τους

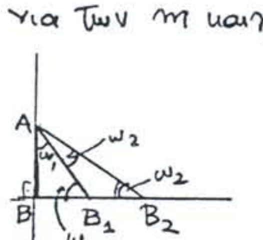
§1. Αμεσες επιπτωσεις του Υπερβολικου Αξιωματος

1.1 Προταση Στην Υ.Γ. υπαρχει ενα, τουλαχιστο, τριγωνο με αθροισμα γωνιων μικροτερο των 2-ορθων.

Αποδειξη. Ας ειναι l και A η ευθεια και το σημειο για τα οποια ισχυει το Υ.Α.

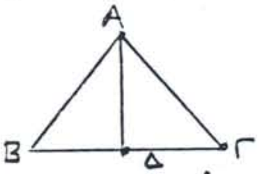


Απο το A φερουμε την καθετη t στην l και φερουμε την m καθετη στην t στο σημειο A. Τοτε οι m και l δεν τεμνονται (βλ. 0.2.5). Το Υ.Α. εξασφαλιζει μια ακομα ευθεια η απο το A, διαφορετικη της m, που δεν συναντα την l. Αν ω ειναι η γωνια των m και η, τοτε, πανω στην l υπαρχει ενα σημειο Γ τετοιο, ωστε



$A\hat{\Gamma}B < \omega$. [Πραγματι, αν το B_1 ειναι τετοιο ωστε $BA \cong BB_1$ τοτε $1^{L} + 2\hat{\omega}_1 \leq 2^{L} \Rightarrow \hat{\omega}_1 \leq 1^{L}/2$. Παιρνοντας $B_1B_2 \cong AB_1$, εχουμε $\hat{\omega}_2 \leq 1^{L}/2^2$ και, επαγωγικα, για $B_{n-1}B_n \cong AB_{n-1}$ εχουμε $\hat{\omega}_n < 1^{L}/2^n$. Αν, τωρα, $\hat{\omega}_1 > \omega$ τοτε υπαρχει n_0 τετοιο, ωστε $2^{n_0} > \omega_1$, Αρα $\hat{\omega}_1/2^{n_0} < \hat{\omega}$ δηλαδη, $\hat{\omega}_{n_0} < \hat{\omega}$]. Εχοντας εξασφαλισει το σημειο Γ με την ιδιοτητα $A\hat{\Gamma}B < \omega$ και λαμβανοντας υποψη οτι $B\hat{A}\Gamma < B\hat{A}E$, στο τριγωνο $(AB\Gamma)$ ισχυει: $A\hat{B}\Gamma + B\hat{\Gamma}A + \Gamma\hat{A}B < 1^{L} + \hat{\omega} + B\hat{A}E = 2^{L}$, οπως επιδιωκαμε.

Για να απαντήσουμε στο ερώτημα αν το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι μικρότερο των 2 ορθών μας χρειάζεται, από την Ο.Γ., η έννοια του ελλείμματος, για τα τρίγωνα. Υπενθυμίζουμε σύντομα: Από το Θεώρημα Saccheri-Legendre (: 0.2.7.) στην Ο.Γ. το άθροισμα των γωνιών ενός τυχαίου τριγώνου είναι το πολύ δύο ορθές. Αν λοιπόν στο τρίγωνο $(A\hat{B}\Gamma)$ θεωρήσουμε την διαφορά $(\pi-(\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}))$ έχουμε έναν μη αρνητικό πραγματικό αριθμό που θα λέμε <u>έλλειμμα</u> του $(A\hat{B}\Gamma)$ και θα συμβολίζουμε $D(A\hat{B}\Gamma)$.



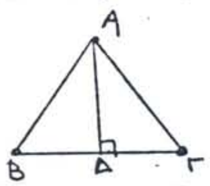
Το έλλειμμα είναι προσθετικό με την ακόλουθη έννοια: Αν στο $(A\hat{B}\Gamma)$ για το σημείο Δ έχουμε. Β-Δ-Γ τότε ισχύει $D(A\hat{B}\Gamma) = D(A\hat{B}\Delta) + D(A\hat{\Delta}\Gamma)$. Όταν $D(A\hat{B}\Gamma)>0$ τότε, το $(A\hat{B}\Gamma)$ θα λέγεται <u>ελλειμματικό.</u> Είναι εύκολο να δούμε ότι στην Ευκλείδεια Γεωμετρία δεν υπάρχουν ελλειμματικά τρίγωνα. Αντίθετα στην Υ.Γ.:

<u>1.2. Πρόταση</u>: Στην Υ.Γ. κάθε τρίγωνο είναι ελλειμματικό.

Η απόδειξη της (1.2.) θα γίνει με μια σειρά από λήμματα.

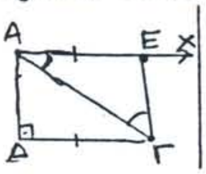
<u>1.2.1 Λήμμα</u>: Αν υπάρχει τρίγωνο με έλλειμμα μηδέν τότε υπάρχει ένα ορθογώνιο τετράπλευρο.

<u>Απόδειξη</u>: Πρώτα παρατηρούμε ότι μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο με έλλειμμα μηδέν: Αφού το $(A\hat{B}\Gamma)$ έχει έλλειμμα μηδέν έχει δύο οξείες γωνίες άρα το ύψος από την τρίτη κορυφή είναι στο εσωτερικό του τριγώνου.



Χρησιμοποιώντας την προσθετικότητα του ελλείμματος βλέπουμε ότι κάθε ένα από τα ορθογώνια τρίγωνα $(A\hat{B}\Delta)$, $(A\hat{\Delta}\Gamma)$ έχουν έλλειμμα μηδέν.

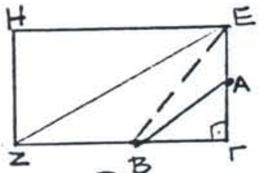
Αρχίζοντας από το $(A\hat{\Delta}\Gamma)$ φέρουμε $\overrightarrow{AX}$ τέτοια ώστε: $X\hat{A}\Gamma \cong \Delta\hat{\Gamma}A$ και



στην $\overrightarrow{AX}$ παίρνουμε $AE \cong \Gamma\Delta$. Τότε $(A\hat{\Gamma}\Delta) \cong (\Gamma\hat{A}\Gamma)$ και βέβαια το τετράπλευρο (ΑΔΓΕ) είναι ορθογώνιο, (όπως διαπιστώνεται εύκολα).

<u>1.2.2. Λήμμα</u>: Αν υπάρχει ένα ορθογώνιο τετράπλευρο τότε κάθε τρίγωνο έχει έλλειμμα μηδέν.

<u>Αποδειξη</u>. Χρησιμοποιωντας το Αξιωμα Αρχιμηδους-Ευδοξου μπορουμε, αρχιζοντας απο ενα ορθογωνιο τετραπλευρο, να κατασκευασουμε ορθογωνια τετραπλευρα με "αυθαιρετα" μεγαλες διαστασεις. Για την αποδειξη του Λημματος θα αποδειξουμε οτι καθε ορθογωνιο τριγωνο εχει ελλειμμα (πρβλ. 1.2.1).

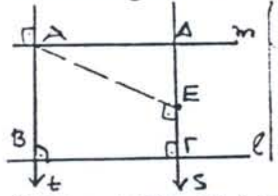


Εστω $(A\hat{\Gamma}B)$ ορθογωνιο. "Εμφυτευουμε" το $(A\hat{B}\Gamma)$ σε ενα ορθογωνιο (ΗΖΓΕ), οπως στο διπλα σχημα, και υπολογιζουμε: $D(E\hat{\Gamma}Z) = 0 = D(E\hat{B}\Gamma)$. Αρα και $D(A\hat{B}\Gamma)=0$.

<u>Αποδειξη του 1.2</u>: $D(T)\geq 0$, για καθε τριγωνο T. Εστω οτι υπαρχει T_0 με $D(T_0)=0$. Τοτε καθε ορθογωνιο τριγωνο εχει ελλειμμα μηδεν (πρβλ. 1.2.2). Ομως, απο το 1.1, υπαρχει ενα τουλαχιστον ορθογωνιο τριγωνο με θετικο ελλειμμα. Επομενως $D(T)>0$ για καθε τριγωνο T.

<u>1.3. Πορισμα</u>. Το Υ.Α. ισχυει για καθε ζευγαρι (A,ℓ), οπου το σημειο Α δεν ανηκει στην ευθεια ℓ.

<u>Αποδειξη</u>. Απο το Α φερουμε τη συνηθη παραλληλη m προς την ℓ (: πρβλ. 0.25)



Αν Γ σημειο της ℓ, φερουμε (s) καθετη στην ℓ στο Γ και (ΑΕ) καθετη στην (s), απο το Α. Η $\overleftrightarrow{AE}$ και η m δεν ταυτιζονται γιατι αλλιως, θα σχηματιζοταν το ορθογωνιο τετραπλευρο (ΑΒΓΔ). Επειδη $\overleftrightarrow{AE}$ και $\overleftrightarrow{B\Gamma}$ καθετες στην (s) αρα δεν μπορουν να τεμνονται, δηλαδη το Υ.Α. ισχυει για το (A,ℓ).

<u>1.4. Πορισμα</u>. Στην Υ.Γ. καθε κυρτο τετραπλευρο εχει αθροισμα γωνιων μικροτερο των τεσσαρων ορθων.

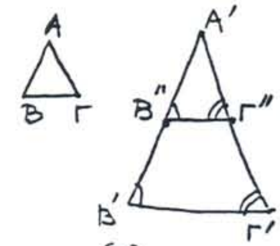
<u>Αποδειξη</u>: Προκυπτει αμεσως απο την "προσθετικοτητα" του ελλειμματος για τα τριγωνα.

<u>1.5. Θεωρημα</u>: Στην Υ.Γ. καθε δυο τριγωνα που εχουν τις γωνιες τους "συμφωνες", μια προς μια, ειναι "συμφωνα", δηλαδη εχουν και τις αντιστοιχες πλευρες "συμφωνες", μια προς μια.

<u>Παραφραζοντας</u>: "Στην Υ.Γ. δεν υπαρχουν "ομοια" τριγωνα".

<u>Αποδειξη</u>. Η γενικη περιπτωση ειναι τα δυο τριγωνα να μην εχουν

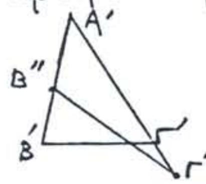
κανενα ζευγαρι "αντιστοιχων" πλευρων "συμφωνες".



(α)

Τοτε βλεπουμε οτι υπαρχει μια γωνια, στο $(A'\hat{B'}Γ')$ π.χ., που και οι δυο πλευρες της ειναι μεγαλυτερες απο της συμφωνης προς αυτην γωνιας στο $(A\hat{B}Γ)$. Ετσι, κατασκευαζεται το κυρτο τετραπλευρο $(B'Γ'Γ''B'')$ που εχει αθροισμα γωνιων τεσσαρες ορθες, ατοπο! Δηλαδη, σε καποια γωνια, υπαρχει και ζευγαρι "ομφωνων" πλευρων οποτε απο τα αξιωματα συμφωνιας $(A\hat{B}Γ)$ και $(A'\hat{B'}Γ')$ ειναι συμφωνα.

Σημειωση: Το πως φτασαμε στο κυρτο τετραπλευρο $(B'Γ'Γ''B'')$ ειναι το "κρισιμο" σημειο της αποδειξης. Δηλαδη γιατι απορριπτεται η



(β)

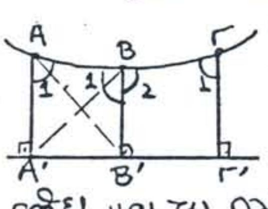
καταστασηη (β). Μπορουμε να δουμε οτι αυτο αντιφασκει με το "Θεωρημα της εξωτερικης γωνιας" (πρβλ. 0.2.6).

§2. Οι μη τεμνομενες ευθειες στην Υπερβολικη Γεωμετρια.

Σ' αυτη τη παραγραφο θα γινει μελετη της "παραλληλιας" στην Υ.Γ. με στοχο την "καταταξη" των μη τεμνομενων ευθειων

2.1. Προταση. Αν οι ευθειες l και l', της Υ.Γ., δεν τεμνονται τοτε, το πολυ δυο σημεια της l ισαπεχουν απο την l'.

Αποδειξη. Εστω οτι υπαρχουν σημεια $A, B, Γ$ στην l ωστε αν φερουμε τις καθετες AA', BB', $ΓΓ'$ στην l' τοτε $AA' \cong BB' \cong ΓΓ'$.

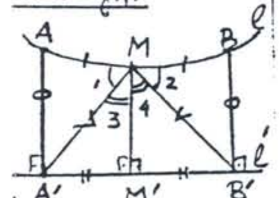


Τοτε, σχηματιζονται τα τετραπλευρα: $(AA'Γ'Γ)$, $(AA'B'B)$ και $(BB'Γ'Γ)$, που εχουν τις γωνιες στην βαση ορθες και τις πλευρες τις καθετες προς τη βαση ισες. Τετραπλευρα με αυτες τις ιδιοτητες λεγονται "τετραπλευρα Saccheri" και οπως θα βλεπουμε (: Χωριζοντας π.χ. σε τριγωνα οπως υποδεικνυεται στο σχημα) $\hat{A}_1 \cong \hat{B}_1$ και $\hat{Γ}_1 \cong \hat{B}_2$ δηλαδη $\hat{B}_1 \cong \hat{B}_2$ και, αφου $\overline{BΓ}$ ειναι ευθεια, εχουμε. $\hat{B}_1 = \hat{B}_2 = 1^L$. Τελικα το $(BB'Γ'Γ)$ ειναι ενα ορθογωνιο τετραπλευρο.

Ομως, η Γεωμετρια ειναι Υπερβολικη και ορθογωνια τετραπλευρα δεν υπαρχουν. Επομενως, δυο το πολυ σημεια της l ισαπεχουν απο την l'!

2.2. Προταση. Εστω οτι οι ευθειες l και l' δεν τεμνονται και εστω, ακομα, οτι στην l υπαρχουν σημεια A και B σε ισες αποστασεις απο την l'. Τοτε οι ευθειες l και l' δεχονται κοινο καθετο τμημα που το μηκος του ειναι ελαχιστο.

Αποδειξη.



Ας ειναι M και M' τα μεσα των AB και $A'B'$. Ισχυριζομαστε οτι το (MM') ειναι το κοινο καθετο τμημα των l, l'. Οπως πριν $(AA'B'B)$ ειναι τετραπλευρο Saccheri. Αρχικα $(\overset{\triangle}{MAA'}) \cong (\overset{\triangle}{MBB'})$ αρα $\hat{M}_1 \cong \hat{M}_2$ και $(MA') \cong (MB')$. Κατοπιν, ευκολα βλεπουμε οτι $(\overset{\triangle}{MM'A'}) \cong (\overset{\triangle}{MM'B'})$ αρα $\hat{M}_1' \cong \hat{M}_2'$ $(\cong 1^L)$ και $\hat{M}_3 \cong \hat{M}_4$, οποτε και $\hat{M}_2 + \hat{M}_4 \cong \hat{M}_1 + \hat{M}_3$ $(\cong 1^L)$. Τωρα, στο τετραπλευρο $(MM'B'B)$ η γωνια $(M'\hat{M}B)$ ειναι ορθη ενω η $(M\hat{B}B')$ ειναι οξεια, αρα $(MM') < (BB')$ (γιατι;).

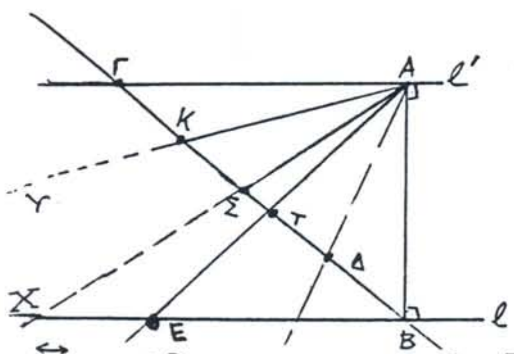
Με παρομοιο τροπο αποδεικνυεται και η ακολουθη προταση που περιγραφει τις παραλληλες ευθειες με κοινη καθετο:

2.3. Προταση Αν δυο ευθειες δεχονται κοινο καθετο τμημα τοτε δεν τεμνονται, αυτο το ευθυγραμμο τμημα ειναι μοναδικο. Επιπλεον σημεια της μιας, συμμετρικα ως προς τον ποδα της κοινης καθετης, ισαπεχουν απο την αλλη. ■

2.4. Ορισμος. Δυο μη τεμνομενες ευθειες που δεχονται κοινο καθετο τμημα ονομαζονται "αποκλινουσες παραλληλες".

2.5. Προταση. Εστω οτι το σημειο A δεν ανηκει στην ευθεια l. Εστω AB η καθετη απο το A στην l (: το B βρισκεται στην l). Τοτε: Υπαρχουν δυο (μοναδικες) ημιευθειες $\vec{AX}$ και $\vec{AX'}$ "εκατερωθεν" της AB και σε ισες γωνιες μ' αυτην τετοιες ωστε: μια ημιευθεια απο το A συναντα την l τοτε και μονον τοτε αν βρισκεται στο εσωτερικο της γωνιας $X\hat{A}X'$.

<u>Αποδειξη</u>: Για A και l οπως στην υποθεση ας ειναι l' η συνηθης παραλληλη, απο το A προς την l. Αν Γ ειναι ενα σημειο της l, διαφορετικο απο το A, θα κατασκευασουμε μια "τομη" στην $\overleftrightarrow{B\Gamma}$.

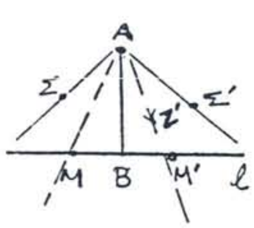


($\overleftrightarrow{B\Gamma}$: η ευθεια που οριζουν τα Β και Γ
$\overrightarrow{B\Gamma}$: η ημιευθεια της $\overleftrightarrow{B\Gamma}$ απο το Β προς Γ)

$O_1 :=$ Τα σημεια T του ΒΓ τετοια ωστε η $\overrightarrow{AT}$ να συναντα την l, μαζι με τα σημεια της ημιευθειας της "αντιθετης" προς την $\overrightarrow{B\Gamma}$

$O_2 :=$ Τα σημεια της $\overleftrightarrow{B\Gamma}$ που δεν βρισκονται στο συνολο O_1.

Βλεπουμε, αμεσως, οτι $B \in O_1$ και $\Gamma \in O_2$ οποτε $O_1, O_2 \neq \emptyset$. Επισης $O_1 \cup O_2 = \overleftrightarrow{B\Gamma}$. Εστω οτι $T \in O_1$, ενω για το σημειο Δ ισχυει T-Δ-B. Τοτε, εφαρμοζοντας Pasch στο $\overset{\Delta}{(ETB)}$ για την $\overrightarrow{A\Delta}$, η $\overrightarrow{A\Delta}$ πρεπει να συναντα την l. Τελικα τα O_1, O_2 οριζουν μια τομη στην $\overleftrightarrow{B\Gamma}$. Εστω Σ το σημειο που εξασφαλιζεται απο το Αξιωμα των Τομων. Ισχυριζομαστε οτι $\Sigma \in O_2$. Πραγματι αν η $\overrightarrow{A\Sigma}$ συναντουσε την l στο σημειο X τοτε, παιρνοντας Y τετοιο ωστε Y-X-B και φερνοντας την $\overrightarrow{AY}$, παρατηρουμε οτι: Τα Y και X βρισκονται προς το ιδιο μερος της $\overleftrightarrow{B\Gamma}$ ενω τα A και X (αρα και τα A, Y) βρισκονται εκατερωθεν της $\overleftrightarrow{B\Gamma}$. Αρα, η $\overrightarrow{AY}$ θα συναντα την $\overleftrightarrow{B\Gamma}$, εστω στο σημειο K. Τοτε, αφου το Σ ειναι εσωτερικο της $Y\hat{A}B$, ισχυει οτι K-Σ-B. Ομως για το Σ η σχεση K-Σ-B και το γεγονος οτι $B \in O_1$ συνεπαγεται οτι $K \in O_2$, δηλαδη η $\overrightarrow{AK}$ δεν πρεπει να συναντα την l, προφανως αντιφαση λογω της επιλογης του σημειου Y της $\overrightarrow{AK}$ πανω στην l.



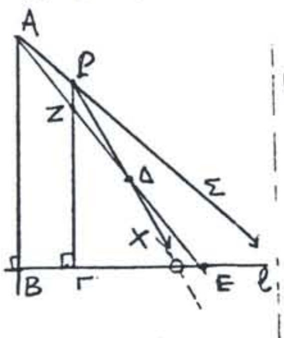
Με την ιδια διαδικασια κατασκευαζεται η $\overrightarrow{A\Sigma'}$ προς το μερος της AB που δεν ειναι το Σ. Οσον αφορα την ισοτητα των $(\Sigma\hat{A}B)$ και $(\Sigma'\hat{A}B)$ παρατηρουμε τα εξης:

Αν, π.χ., $(\Sigma\hat{A}B) < (\Sigma'\hat{A}B)$ τοτε μπορουμε να την $\overrightarrow{AZ'}$ τετοια ωστε $B\hat{A}Z' \cong \Sigma\hat{A}B$. Τοτε η $\overrightarrow{AZ'}$ θα ειναι εσωτερικη της $B\hat{A}\Sigma'$ επομενως, απο την κατασκευη της $\overrightarrow{A\Sigma'}$, θα συναντα την l, π.χ. στο M'. Παιρνουμε, τωρα, $M-B-M'$ με την ιδιοτητα $BM \cong BM'$. Τοτε, η $\overrightarrow{AM}$ ειναι εσωτερικη της $\Sigma\hat{A}B$ ενω $M\hat{A}B \cong B\hat{A}M' \cong B\hat{A}\Sigma$, αντιφαση.

<u>2.6. Παρατηρηση</u> Στην Υ.Γ. οι ημιευθειες $\overrightarrow{A\Sigma}, \overrightarrow{A\Sigma'}$ που κατασκευαστηκαν στο 2.5. δεν περιεχονται στην συνηθη παραλληλο l', αλλοιως η Γεωμετρια θα ηταν Ευκλειδεια. Οι $\overrightarrow{A\Sigma}$ και $\overrightarrow{A\Sigma'}$ ονομαζονται <u>οριακα</u> η <u>ασυμπτωτικα</u> <u>παραλληλες</u> <u>ημιευθειες</u> απο το A προς την l. Η, οξεια, γωνια $(\Sigma\hat{A}B)$ λεγεται <u>γωνια παραλληλιας</u> στο A για την l και συμβολιζεται με $\Pi(AB)$, που υποδεικνυει οτι εξαρταται μονο απο το ευθυγραμμο τμημα AB.

Η επομενη προταση εξεταζει το ρολο του A στην κατασκευη της $\overrightarrow{A\Sigma}$.

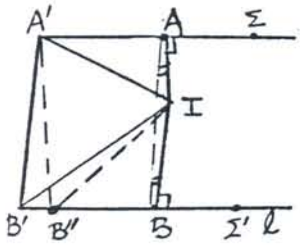
<u>2.7. Προταση</u>. Αν τα A, l και $\overrightarrow{A\Sigma}$ ειναι οπως στο 2.5 και για το σημειο P ισχυει $A-P-\Sigma$, τοτε η $\overrightarrow{P\Sigma}$ ειναι η απο το P οριακα παραλληλη ημιευθεια, προς την l.



<u>Αποδειξη</u> Εστω PΓ η καθετη που φερεται απο το P στην l. και $\overrightarrow{PX}$ εσωτερικη της $(\Gamma\hat{P}\Sigma)$. Θα δειξουμε οτι η $\overrightarrow{PX}$ συναντα την l. Εστω Δ σημειο της $\overrightarrow{AX}$. Τοτε η $\overrightarrow{A\Delta}$ ειναι εσωτερικη στην $B\hat{A}\Sigma$ οποτε συναντα την l, π.χ. στο E (:πρβλ. 2.5). Επιπλεον, αφου τα A και Δ βρισκονται εκατερωθεν της $\overleftrightarrow{P\Gamma}$, η $\overrightarrow{A\Delta}$ συναντα την $\overleftrightarrow{P\Gamma}$ στο Z, (με $P-Z-\Gamma$). Στο τριγωνο $(Z\Gamma E)$ εφαρμοζεται "Pasch" για την $\overrightarrow{P\Delta} (\equiv \overrightarrow{PX})$. Αφου $\overrightarrow{PX}$ εσωτερικη της $\Gamma\hat{P}\Sigma$, η $\overrightarrow{PX}$ πρεπει να συναντα την (ΓE), δηλαδη η $\overrightarrow{PX}$ συναντα την l. Ομοια αντιμετωπιζεται και η αλλη πιθανη θεση του P στην $\overleftrightarrow{A\Sigma}$, δηλαδη η περιπτωση $P-A-\Sigma$. Μ' αυτην την εννοια θα λεμε οτι <u>η $\overrightarrow{A\Sigma}$</u> <u>ειναι</u> <u>οριακα παραλληλη</u> <u>προς την l.</u>

2.8. Παρατηρησεις. (α) Παντοτε μπορουμε να αντικαταστησουμε το καθετο τμημα (AB) στη κατασκευη της οριακης παραλληλης ημιευθειας για το ζευγος (A, l) (: παρ. 2.5.) με οποιοδηποτε "πλαγιο" τμημα απο το A, που συναντα την l (γιατι;) Επιπλεον,

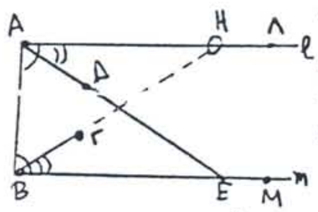
(β) Μπορουμε να υποθετουμε οτι το (AB) σχηματιζει ισες γωνιες με την l και την οριακα παραλληλη ημιευθεια $\overrightarrow{A\Sigma}$. Πραγματι: Αρχιζοντας



απο το $A'B'$ ωστε $\overrightarrow{A'\Sigma}$ οριακα παραλληλη προς l και φεροντας τις εσωτερικες διχοτομους των γωνιων $\hat{A'}$ και $\hat{B'}$ δημιουργειται το σημειο τομης τους I που "ισαπεχει" την l και $\overrightarrow{A\Sigma}$, δηλαδη $(IA)\cong(IB)$. Ομως, στο $(\overset{\triangle}{AIB})$, εχουμε $(I\hat{A}B)\cong(I\hat{B}A)$ επομενως $(B\hat{A}\Sigma)\cong(A\hat{B}\Sigma')$. Λαμβανοντας $(BB'')\cong(AA')$ και συγκρινοντας τα τριγωνα $(\overset{\triangle}{AA'I})$ και $(\overset{\triangle}{BB''I})$ εχουμε $(A\hat{A'}I)\cong(B''\overset{\triangle}{B}I)$ και $(IA')\cong(IB'')$. Επομενως $(A\widehat{A'B''})\cong(A'\widehat{B''}B)$ και το τμημα $(A'B'')$ ειναι το ζητουμενο.

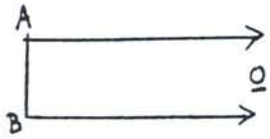
2.9. Προταση. Αν η ευθεια l περιεχει μια ημιευθεια $\overrightarrow{A\Lambda}$ οριακα παραλληλη προς την m τοτε και η m περιεχει μια ημιευθεια οριακα παραλληλη προς την l. Παραφραζοντας: "η σχεση της οριακης παραλληλιας ειναι σχεση συμμετρικη"

Αποδειξη. Λαμβανοντας υποψη το 2.8(β) μπορουμε να υποθεσουμε οτι το



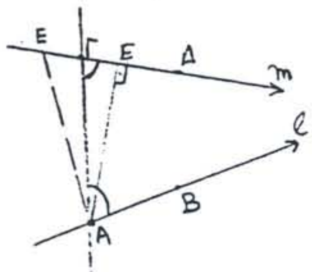
ευθυγραμμο τμημα AB, $B\in m$, σχηματιζει ισες γωνιες με τις l και m. Εστω $\overrightarrow{B\Gamma}$ στο εσωτερικο της $(A\hat{B}M)$. Θα αποδειξουμε οτι η $\overrightarrow{B\Gamma}$ συναντα την l. Φερουμε $\overrightarrow{A\Delta}$, στο ημιεπιπεδο της l που περιεχει το B, ετσι ωστε, $(\Delta\hat{A}\Lambda)\cong(\Gamma\hat{B}M)$. Τοτε η $\overrightarrow{A\Delta}$ ειναι εσωτερικη της $B\hat{A}\Lambda$ και αφου $\overrightarrow{A\Lambda}$ οριακα παραλληλη προς l η $\overrightarrow{A\Delta}$ συναντα την l, π.χ. στο E. Το σημειο H της $\overrightarrow{B\Gamma}$ με την ιδιοτητα $(BH)\cong(AE)$ πρεπει να βρισκεται πανω στην l (σχετικη δικαιολογηση: λογοι συμμετριας). Απο αυτο και το 2.5 προκυπτει οτι $\overrightarrow{BM}$ οριακα παραλληλη προς l.

2.10 Ορισμός. Δύο οριακά παράλληλες ημιευθείες (· ορολογία που κατοχυρώνεται από το 2.9) και ένα ευθύγραμμο τμήμα με τα άκρα του στις ημιευθείες ορίζουν ένα "απλά ασυμπτωτικό τρίγωνο"



2.11 Πρόταση. Σε κάθε απλά ασυμπτωτικό τρίγωνο ισχύει το θεώρημα της εξωτερικής γωνίας

Απόδειξη $\boxed{\text{ΒΗΜΑ } 1^{ο}}$ Κάθε ισοσκελές ασυμπτωτικό τρίγωνο έχει οξείες γωνίες. Πράγματι: Από το A φέρουμε τη κάθετο στην m και έστω E το ίχνος της. Τότε μπορούν να συμβούν τα εξής

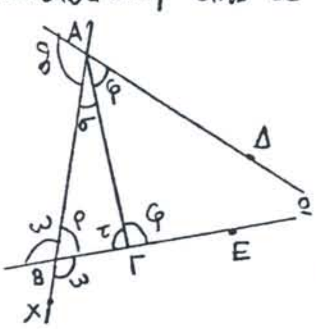


(i) E ≡ Γ οπότε, , προκύπτει ότι η γωνία στο A πρέπει να είναι ορθή, άτοπο! (2.5)

(ii) E−Γ−Δ. Έστω ότι η $\Gamma\hat{A}B$ δεν είναι οξεία. Τότε και η "μεγαλύτερη" της, $E\hat{A}B$ δεν είναι οξεία, άτοπο (πρβλ. (i)). Επομένως το (ii) δεν μπορεί να συμβεί, και

(iii) Γ−E−Δ. Τότε εφαρμόζεται το θεώρημα της εξωτερικής γωνίας για συνήθη τρίγωνα (πρβλ. 0.2.6) και από το $(E\overset{\Delta}{\Gamma}A)$ προκύπτει ότι $(E\hat{\Gamma}A)$ οξεία.

$\boxed{\text{ΒΗΜΑ } 2^{ο}}$ Ας είναι $(A\overset{\Delta}{B}\Omega)$ τυχαίο απλά ασυμπτωτικό τρίγωνο. Με την κατασκευή από το 2.8(β) οδηγούμαστε σε ένα ισοσκελές απλά ασυμπτωτικό τρίγωνο $(A\overset{\Delta}{\Gamma}\Omega)$. Με τα σύμβολα από το διπλανό σχήμα για τις γωνίες που δημιουργούνται έχουμε:



(i) $\tau > \varphi$ (πρβλ. ΒΗΜΑ 1ο).

(ii) $\rho+\sigma+\tau < 180° = 2\llcorner$ (αφού είμαστε στην Υ.Γ.)

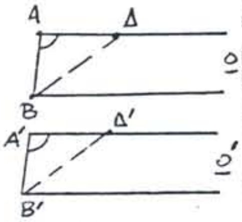
(iii) $\omega+\rho = 2\llcorner$.

Συνδυάζοντας τα (i)-(iii) επάγουμε ότι: $\omega \underset{(iii)}{=} 2\llcorner-\rho \underset{(ii)}{>} \sigma+\tau \underset{(i)}{>} \sigma+\varphi$. Επομένως το θεώρημα της εξωτερικής γωνίας ισχύει για το ζεύγος $((B\hat{A}\Delta), (X\hat{B}E))$. Πρέπει ακόμα να αποδείξουμε ότι ισχύει και η σχέση $\vartheta > \rho \Longleftrightarrow 2\llcorner-\vartheta < 2\llcorner-\rho$. Πράγματι, $2\llcorner-\vartheta = \sigma+\varphi < \omega = 2\llcorner-\rho$. Και έτσι, η Πρόταση αποδείχθηκε.

2.12 Πρόταση. (:"Κριτήρια ισότητας" για τα απλά ασύμπτωτα τρίγωνα).

Έστω ότι τα απλά ασύμπτωτα τρίγωνα $(AB\Omega)$ και $(A'B'\Omega')$ (: (AB), $(A'B')$ οι "πεπερασμένες" πλευρές) έχουν $(B\hat{A}\Omega) \cong (B'\hat{A'}\Omega')$. Τότε, έχουν $(A\hat{B}\Omega) \cong (A'\hat{B'}\Omega')$ αν και μόνον αν έχουν $(AB) \cong (A'B')$.

Απόδειξη. Έστω ότι ισχύει $(AB) \cong (A'B')$ και $\hat{A} \cong \hat{A'}$. Τότε ισχύει και $\hat{B} \cong \hat{B'}$.



Πράγματι, αν $\hat{B} > \hat{B'}$, τότε η $\overrightarrow{B\Delta}$ που σχηματίζει $(A\hat{B}\Delta) \cong \hat{B'}$ είναι εσωτερική της $\hat{B}$ (και συναντά την $\overrightarrow{A\Omega}$ στο Δ). Παίρνοντας τώρα Δ', τέτοιο ώστε $(A'\Delta') \cong (A\Delta)$, έχουμε $(\overset{\Delta}{AB\Delta}) \cong (\overset{\Delta}{A'B'\Delta'})$ απ' όπου προκύπτει ότι $(A'\hat{B'}\Delta') \cong (A\hat{B}\Delta)$. Με ανάλογη διαδικασία αποδεικνύεται και ότι αν ισχύει $\hat{B'} \cong \hat{B}$ τότε $(AB) \cong (A'B')$.

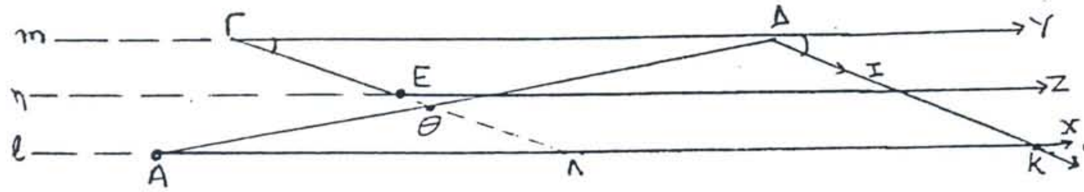
2.13 Λήμμα. Αν οι ευθείες l, m, n περιέχουν ημιευθείες $\overrightarrow{AX}$, $\overrightarrow{\Gamma Y}$, $\overrightarrow{EZ}$, αντίστοιχα, τέτοιες ώστε η $\overrightarrow{AX}$ να είναι οριακά παράλληλος προς την $\overrightarrow{\Gamma Y}$ και η $\overrightarrow{\Gamma Y}$ οριακά παράλληλος προς την $\overrightarrow{EZ}$, τότε, οι l, m, n δέχονται κοινή τέμνουσα.

Απόδειξη. Αν τα B, Δ είναι τέτοια, ώστε A-B-X και Γ-Δ-Y τότε:

- Αν A και E βρίσκονται εκατέρωθεν της m, η ευθεία $\overleftrightarrow{AE}$ συναντά την m οπότε, οι l, m, n δέχονται κοινή τέμνουσα.
- Αν A και E βρίσκονται στο ίδιο μέρος της m υπάρχουν δύο περιπτώσεις:

(i) Τα A και Δ να βρίσκονται στο ίδιο μέρος της $\overleftrightarrow{E\Gamma}$. Τότε η ημιευθεία $\overrightarrow{\Gamma A}$ είναι εσωτερική στη γωνία $E\hat{\Gamma}\Delta$ άρα συναντά την (οριακά παράλληλη της $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ από το E:) $\overrightarrow{EZ}$ οπότε, πάλι, οι l, m, n δέχονται τέμνουσα.

(ii) Τα A και Δ να βρίσκονται εκατέρωθεν της $\overleftrightarrow{E\Gamma}$.

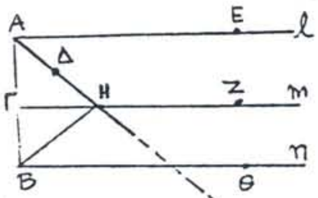


Τότε, η $\overleftrightarrow{A\Delta}$ συναντά την $\overleftrightarrow{E\Gamma}$ σ' ένα σημείο Θ. Στο τρίγωνο $(\overset{\Delta}{\Gamma\Theta\Delta})$ το θεώρημα της εξωτερικής γωνίας δίνει $(\Theta\hat{\Delta}Y) > \Theta\hat{\Gamma}\Delta$, άρα υπάρχει ημιευθεία $\overrightarrow{ΔΙ}$, εσωτερική της $Θ\hat{Δ}Υ$, τέτοια, ώστε $(Θ\hat{Δ}Ι) \cong (Ι\hat{Δ}Υ)$. Όμως, τότε, οι $\overleftrightarrow{ΓΕ}$ και $\overleftrightarrow{ΔΙ}$ δεν τέμνονται (: "εκτός εναλλάξ γωνίες ίσες"), ενώ η ημιευθεία $\overrightarrow{ΔΙ}$ συναντά την (: οριακά παράλληλη της m από το A) ℓ στο σημείο Κ. Έτσι, σχηματίζεται το τρίγωνο $(Α\hat{Δ}Κ)$. Η $\overrightarrow{ΓΕ}$ συναντά την πλευρά (ΑΔ) του $(Α\hat{Δ}Κ)$ και δεν συναντά την πλευρά (ΑΚ) άρα, συναντά την ΑΚ π.χ. στο σημείο Λ. Τώρα, η $\overleftrightarrow{ΓΛ}$ είναι κοινή τέμνουσα των ℓ, m, n.

2.14 Πρόταση: "Η σχέση της οριακής παραλληλίας είναι σχέση μεταβατική".

Απόδειξη. Αν οι ℓ, m, n είναι όπως στο λήμμα που προηγήθηκε διακρίνονται οι περιπτώσεις:

(1) Οι ℓ και n να είναι "εκατέρωθεν της m" οπότε προφανώς δέχονται κοινή τέμνουσα. Μια ημιευθεία, όπως η $\overrightarrow{ΑΔ}$, από το Α συναντά την m, π.χ. στο Η και βρίσκεται στο εσωτερικό της $Β\hat{Η}Ζ$ άρα, αφού $\overrightarrow{ΓΖ}$ οριακά παράλληλη προς $\overrightarrow{ΒΘ}$, η $\overrightarrow{ΑΔ}$ συναντά την n.



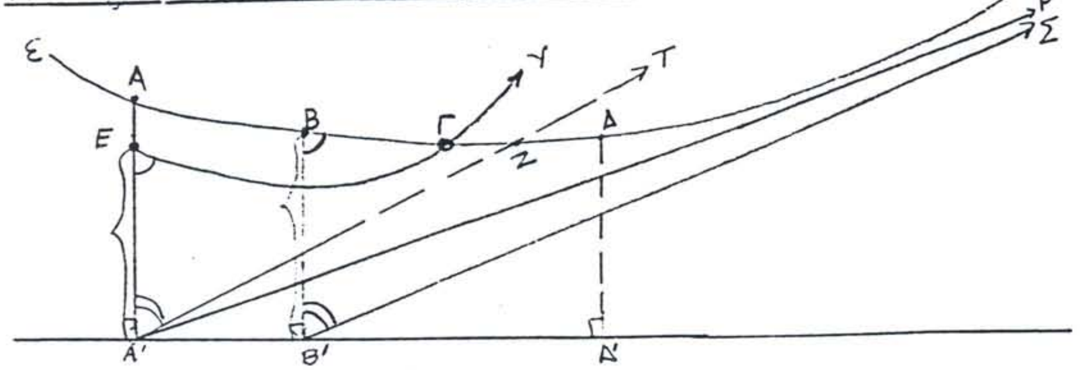
(2) Όταν οι n και ℓ βρίσκονται "προς το ίδιο μέρος" της m τότε και πάλι οι ℓ, m, n δέχονται κοινή τέμνουσα (πρβλ. λήμμα) οπότε, με ανάλογη διαδικασία, όπως στο (1), εύκολα αποδεικνύεται η πρόταση.

Σημείωση Όπως διαπιστώνεται εύκολα, ανατρέχοντας π.χ. στα μοντέλα, στην Υ.Γ. μπορεί να υπάρξουν τριάδες μη τεμνόμενων ευθειών που, όμως, δεν δέχονται κοινή τέμνουσα.

Η αναφορά μας στην "παραλληλία" της Υ.Γ. ολοκληρώνεται αποδεικνύοντας ένα αποτέλεσμα "κατάταξης" των μη τεμνόμενων ευθειών.

* 2.15 Θεώρημα: Αν δυο μη τεμνόμενες ευθείες δεν περιέχουν κανένα ζεύγος οριακά παράλληλων ημιευθειών τότε, δέχονται κοινό κάθετο τμήμα, οπότε είναι αποκλίνουσες παράλληλες.

Απόδειξη (: "κατασκευαστική", κατά Hilbert).



Για A, B σημεία της ε φέρουμε τα κάθετα τμήματα AA', BB' (A', B' στην ε'). Αν $AA' \cong BB'$ τότε το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα K, K' των AB και $A'B'$ είναι το κοινό (μοναδικό!) κάθετο τμήμα των ε', ε (βλ. 2.2.) απ' όπου προκύπτει ότι οι ε και ε' είναι ασυμπτωτικές παράλληλες. Αν τα AA', BB' δεν είναι σύμφωνα τότε π.χ. υπάρχει σημείο E του AA' τέτοιο, ώστε $A'E \cong B'B$. Μεταφέρουμε την $X\hat{B}B'$ στο E δηλαδή, φέρουμε ημιευθεία $\overrightarrow{EY}$ έτσι, ώστε $Y\hat{E}A' \cong X\hat{B}B'$. Αποδεικνύεται, πιο κάτω, ότι η $\overrightarrow{EY}$ συναντά την $\overrightarrow{AX}$ σ' ένα σημείο Γ. Αν το σημείο Δ ληφθεί έτσι ώστε $B\Delta \cong E\Gamma$ τότε εύκολα βρίσκουμε ότι και $\Gamma\Gamma' \cong \Delta\Delta'$! Παίρνοντας, τώρα, τα μέσα M, M' των $\Gamma\Delta$ και $\Gamma'\Delta'$ τότε, το τμήμα MM' είναι το κοινό κάθετο τμήμα των $\varepsilon, \varepsilon'$.

Απόδειξη της ύπαρξης του σημείου Γ. Φέρουμε τις εξής οριακά παράλληλες ημιευθείες: $\overrightarrow{B'\Sigma}$ οριακά παράλληλη προς $\overrightarrow{BX}$, $\overrightarrow{A'P}$ οριακά παράλληλη προς $\overrightarrow{AX}$ και $\overrightarrow{A'T}$ οριακά παράλληλη προς $\overrightarrow{EY}$. Αν αποδείξουμε ότι η $\overrightarrow{A'T}$ είναι εσωτερική ημιευθεία της $A\hat{A'}P$ τότε, από την οριακή παραλληλία των $\overrightarrow{AX}$ και $\overrightarrow{A'P}$, η $\overrightarrow{A'T}$ θα συναντούσε την $\overrightarrow{AX}$ σ' ένα σημείο Z. Τότε θα εφαρμόσουμε "Pasch" στο τρίγωνο $(A\overset{\Delta}{A'}Z)$ και η $\overrightarrow{EY}$, αναγκαστικά, θα συναντά την πλευρά AZ. Έτσι, αρκεί να δείξουμε: $A\hat{A'}T < A\hat{A'}P$.

(1) Συγκρίνοντας τα απλά ασυμπτωτικά τρίγωνα $(EA'TY)$ και $(BB'\Sigma X)$ βλέπουμε ότι $E\hat{A'}T \cong B\hat{B'}\Sigma$ (βλ. 2.12.).

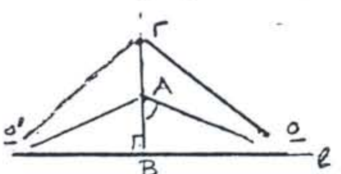
(2) Απο τη μεταβατικοτητα της σχεσης της οριακης παραλληλιας (πρβλ. 2.14) σχηματιζεται το απλα ασυμπτωτικο τριγωνο $(A'B'\Sigma P)$ οποτε, απο το αντιστοιχο "θεωρημα εξωτερικης γωνιας" (πρβλ. 2.11), εχουμε οτι $\Sigma \widehat{B'x'} > P\widehat{A'x'}$ (¡Προσοχη! αφου Σ, Σ' δεν περιεχουν οριακα παραλληλες ημιευθειες, η $\overrightarrow{A'P}$ διαφοροποιειται απο την $\overrightarrow{A'x'}$, οπως και η $\overrightarrow{B'\Sigma}$ διαφοροποιειται απο την $\overrightarrow{B'x'}$).

(3) Τωρα, υπολογιζουμε: $BB'\Sigma = 1^{L} - (\Sigma\widehat{B'x'}) < 1 - (P\widehat{A'x'}) = A\widehat{A'}P$.

Τα (1)-(3) δινουν $(A\widehat{A'}T) < (A\widehat{A'}P)$, δηλαδη η ημιευθεια $\overrightarrow{A'T}$ ειναι, πραγματι, εσωτερικη της γωνιας $A\widehat{A'}P$, οπως ακριβως απαιτειτο!

§3 Η γωνια παραλληλιας - Κατασκευες

Για το ζευγος (A,ℓ) (με $A \notin \ell$) το 2.5 μας εξασφαλιζει δυο οριακα παραλληλες ημιευθειες $\overrightarrow{A\Omega}, \overrightarrow{A\Omega'}$ απο το A προς την ℓ "συμμετρικες" ως προς την καθετη AB.



Καθε μια απο τις, ισες, οξειες γωνιες $B\hat{A}\Omega$, $BA\Omega'$ θα ονομαζεται "γωνια παραλληλιας" για το ζευγαρι (A,ℓ).

Στο, απλα ασυμπτωτικο, τριγωνο $(\overset{\triangle}{AB\Omega})$ η μια γωνια ειναι ορθη και η οξεια γωνια του ειναι η γωνια παραλληλιας για το (A,ℓ). Εφαρμοζοντα το 2.12 εχουμε: Η γωνια παραλληλιας εξαρταται μονον απο το AB, την αποσταση του A απο την ℓ. Οριζεται, ετσι, η αντιστοιχια $(AB) \xrightarrow{\Pi} \Pi(AB)$, που ειναι συναρτηση απο τα ευθυγραμμα τμηματα στις οξειες γωνιες, η οποια στο εξης θα αναφερεται σαν "γωνια παραλληλιας" για το, αντιστοιχο, ευθυγραμμο τμημα.

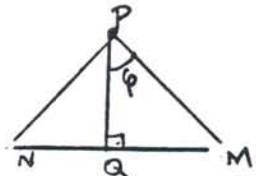
3.1 Προταση: Η γωνια παραλληλιας ειναι γνησια φθινουσα με την ακολουθη εννοια: Αν $B-A-\Gamma$ τοτε ισχυει οτι $\Pi(AB) > \Pi(\Gamma B)$.

Αποδειξη: Αμεση εφαρμογη του θεωρηματος της εξωτερικης γωνιας (πρβλ. 2.11) στο απλα ασυμπτωτικα τριγωνα $(\overset{\triangle}{A\Gamma\Omega})$.

Οτι ακολουθει, τωρα, στοχευει στο να αποδειξει την "1-1" και "επι" αντιστοιχία που δημιουργείται μεταξύ των οξειών γωνιών και των ευθυγράμμων τμημάτων, μέσω της γωνίας παραλληλίας.

<u>3.2. Πρόβλημα.</u>: Να "κατασκευασθεί" ένα ορθογώνιο αλλά ασυμπτωτικό τρίγωνο αν είναι γνωστή η (οξεία) γωνία του.

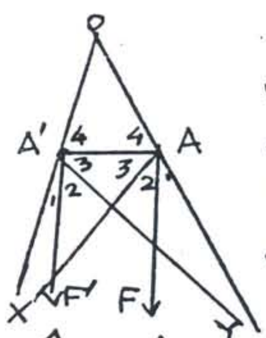
<u>Ανάλυση:</u> Έστω ότι το κατασκευάσαμε και είναι το $(\overset{\triangle}{PQM})$. Αν φέρουμε και την άλλη οριακή παράλληλη, από το



P προς την $\overrightarrow{QN}$, τότε η l θα είναι "κοινή οριακή παράλληλη" των ημιευθειών $\overrightarrow{PN}$ και $\overrightarrow{PM}$, ενώ η γωνία $(N\hat{P}M)$ θα είναι διπλάσια της $\Pi(PQ)$ (λεβλ. 2.5). Οπότε, ανάγομαστε στο εξής:

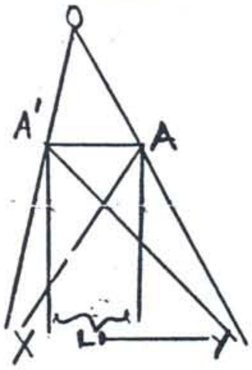
<u>3.2.1 Πρόβλημα.</u> Να κατασκευάσετε "κοινή οριακή παράλληλος" προς δύο τεμνόμενες ημιευθείες.

<u>Λύση.</u> $\boxed{\text{ΒΗΜΑ 1}}$ Αν $x\hat{O}y$ είναι η γωνία των δύο ημιευθειών παίρνουμε A στην $\overrightarrow{OY}$ και A' στην $\overrightarrow{OX}$ τέτοια, ώστε $(OA)\cong(OA')$, και φέρουμε τις οριακά παράλληλες $\overrightarrow{AX}$ και $\overrightarrow{A'Y}$. Διχοτομούμε τις γωνίες $X\hat{A}Y$ και $X\hat{A'}Y$. Ας είναι $\overrightarrow{A'F'}$ και $\overrightarrow{AF}$ οι διχοτόμοι. Από την σύγκριση των, αλλά ασυμπτωτικών τριγώνων $(\overset{\triangle}{OAX})$ και $(\overset{\triangle}{OA'Y})$ (: $x\hat{O}y$ κοινή και $(OA)\cong(OA')$) έχουμε ότι και $(O\hat{A'}Y)\cong O\hat{A}X$ οπότε

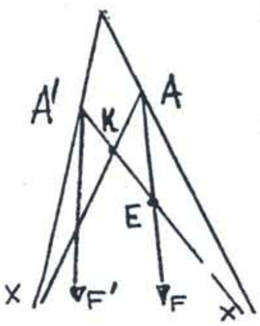


$X\hat{A'}Y\cong X\hat{A}Y$ και $\hat{A}'_1\cong\hat{A}'_2\cong\hat{A}_1\cong\hat{A}_2$. Επιπλέον από το ισοσκελές τρίγωνο $(\overset{\triangle}{A'OA})$ έχουμε $\hat{A}'_4\cong\hat{A}_4$ συνεπώς $\hat{A}'_3\cong\hat{A}_3$.

$\boxed{\text{ΒΗΜΑ 2}}$ Οι $\overrightarrow{AF}$ και $\overrightarrow{A'F'}$, από το $\boxed{\text{ΒΗΜΑ 1}}$ δεν μπορούν να συναντηθούν. Έστω L το κοινό τους σημείο και $\overrightarrow{LY}$ η, από το L, οριακή παράλληλη προς την $\overrightarrow{AY}$. Αρχικά βλέπουμε ότι $L\hat{A'}A\cong\hat{A}'_2+\hat{A}'_3\cong\hat{A}_2+\hat{A}_3\cong L\hat{A}A'$; άρα και $LA\cong LA'$. Από τη σύγκριση των, αλλά ασυμπτωτικών τριγώνων $(\overset{\triangle}{ALY})$ και $(\overset{\triangle}{A'LY})$ [: $(AL)\cong(A'L)$ και $(Y\hat{A}L)\cong\hat{A}_1\cong\hat{A}'_1\cong\hat{A}'_2\cong Y\hat{A'}L$] προκύπτει ότι $Y\hat{L}A\cong Y\hat{L}A'$ άτοπο αφού $A\not\equiv A'$.



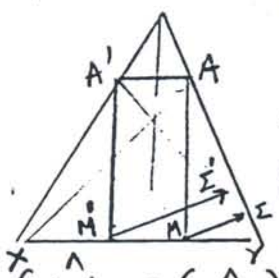
$\boxed{\text{ΒΗΜΑ 3}}$ Οι $\vec{AF}$ και $\vec{A'F'}$ δεν μπορουν να ειναι οριακα παραλληλες.



Εστω οτι ειναι οριακα παραλληλες. Τοτε δημιουργουνται αλλα ασυμπτωτικα τριγωνα. Απο αυτα συγκρινουμε τα $(\overset{\triangle}{AEY})$ και $(\overset{\triangle}{A'EFF'})$ (: πρβλ. διπλα σχημα). Τοτε εχουμε $Y\hat{A}E \cong \hat{A}_1 \cong \hat{A}_1' \cong \hat{A}_2' \cong E\hat{A'}F'$. Δηλαδη, $(A'E) \cong AE$. Αυτο, ομως, ειναι ατοπο γιατι, τοτε, $\hat{A}_3' \cong \hat{A}_2 + \hat{A}_3$, ενω $\hat{A}_3' \cong \hat{A}_3$.).

Αφου, λοιπον, οι AF, A'F' ουτε τεμνονται, ουτε ειναι οριακα παραλληλες δεχονται κοινο καθετο ευθυγραμμο τμημα (πρβλ. 2.15), που ειναι μοναδικο!

$\boxed{\text{ΒΗΜΑ 4}}$ Η κοινη καθετος των AF και A'F' (που εξασφαλιζεται απο τα βηματα 2 και 3) ειναι η ζητουμενη "κοινη οριακα παραλληλος".

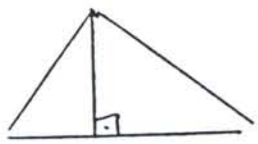


Πραγματι αν δεν ηταν θα μπορουσαμε να φερουμε τις $\vec{M\Sigma}$ και $\vec{M'\Sigma'}$, οριακως παραλληλες απο τα M' και M προς την $\vec{OY}$. Τοτε, απο την συγκριση των "τριγωνων" $(A\hat{M}\Sigma)$ και $(\overset{\triangle}{A'M'\Sigma'})$ εχουμε $(M'\hat{A'}Y) \cong M\hat{A}Y$ και $(AM) \cong A'M'$ (: γιατι;). Αρα και $A'\hat{M'}\Sigma' \cong A\hat{M}\Sigma$, οποτε, $(\Sigma'\hat{M'}M) \cong (\Sigma\hat{M}Y)$ ατοπο, απο το θεωρημα της εξωτερικης γωνιας στο "αλλα ασυμπτωτικο τριγωνο" ΣΜΜ'Σ' ! ■

<u>Παρατηρηση</u>: Παραφραζοντας το 3.2.1 μπορουμε να πουμε: "Στην Υ.Γ. υπαρχουν ευθειες που βρισκονται στο εσωτερικο μιας γωνιας, χωρις να συναντουν καμμια απο τις πλευρες της γωνιας".

<u>3.3. Ορισμος</u>: Ενα <u>διπλα ασυμπτωτικο τριγωνο</u> αποτελειται απο δυο τεμνομενες ημιευθειες και την (μοναδικη) κοινη οριακα παραλληλη προς αυτες, που βρισκεται στο εσωτερικο της γωνιας που σχηματιζουν (πρβλ. 3.2.1).

<u>3.4. Προταση.</u> Καθε γωνια οριζει μονοσημαντα ενα διπλα ασυμπτωτικο τριγωνο. Ισοδυναμα, δυο διπλα ασυμπτωτικα τριγωνα ειναι "ισομορφα" αν και μονον αν εχουν τη (μοναδικη) γωνια τους "ισομορφη".

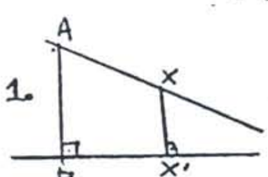


Απόδειξη. Κάθε διπλά ασυμπτωτικό τρίγωνο οδηγεί σ' ένα μοναδικό ορθογώνιο απλά ασυμπτωτικό τρίγωνο (πρβλ. $\boxed{\text{ΒΗΜΑ 4}}$ στο 3.2.1), που η οξεία γωνία του είναι το μισό της γωνίας του αρχικού τριγώνου. Η απόδειξη της πρότασης, τώρα, είναι συνέπεια του κριτηρίου από το 2.12.

3.5. Ορισμός – Παρατήρηση. Ένα τριπλά ασυμπτωτικό τρίγωνο θα αποτελείται από τρεις μη τεμνόμενες ευθείες που ανά δύο περιέχουν ζεύγη οριακά παράλληλων ημιευθειών, και δεν υπάρχουν τριάδες οριακά παράλληλων ημιευθειών! Ένα τριπλά ασυμπτωτικό τρίγωνο κατασκευάζεται

π.χ. αρχίζοντας από τις κάθετες $\overleftrightarrow{ΒΓ}$ και $\overrightarrow{ΜΑ}$ και τις οριακές παράλληλες $\overleftrightarrow{ΑΒ}$ (προς τις $\overrightarrow{ΜΒ}$ και $\overrightarrow{ΜΑ}$) και $\overleftrightarrow{ΑΓ}$ (προς τις $\overrightarrow{ΜΑ}$ και $\overrightarrow{ΜΓ}$). Μπορεί, συνεπώς να αποδειχθεί ότι και κάθε τριπλά ασυμπτωτικό τρίγωνο οδηγεί σ' ένα ορθογώνιο διπλά ασυμπτωτικό τρίγωνο. Μ' αυτήν την έννοια "κάθε δύο τριπλά ασυμπτωτικά τρίγωνα είναι σύμφωνα".

Ασκήσεις.



1. Αν η $\overrightarrow{ΒΣ}$ είναι οριακά παράλληλος προς την $\overrightarrow{ΑΣ}$ να δειχθεί ότι $(XX') < (BA)$.
2. Η Ο.Γ. οδηγεί σε Ευκλείδεια Γεωμετρία (Ε.Γ.) αν και μόνον αν οι μη τεμνόμενες ευθείες είναι ισαπέχουσες.
3. Σ' ένα ισοσκελές απλά ασυμπτωτικό τρίγωνο $(\overset{\triangle}{ΑΒΜ})$ φέρουμε $ΑΗ \perp ΒΜ$, $ΒΚ \perp ΑΜ$. Αν Ο το σημείο τομής των (ΑΗ) και (ΒΚ), να αποδειχθεί ότι η κάθετος ΟΛ στην ΑΒ είναι οριακά παράλληλη προς τις $\overrightarrow{ΑΜ}$ και $\overrightarrow{ΒΜ}$.
4. Δεχόμενοι τα αποτελέσματα της κατάταξης των μη τεμνομένων ευθειών, στην Υ.Γ, να αποδείξετε ότι ισχύει το "θεώρημα της εξωτερικής γωνίας" για τα απλά ασυμπτωτικά τρίγωνα.
5. Η Ο.Γ. οδηγεί σε Ε.Γ. αν και μόνον αν για κάθε τέμνουσα δύο μη τεμνομένων ευθειών ισχύει το "θεώρημα για τις εντός εναλλάξ γωνίες".

6. Αποδείξτε οτι στην Υ.Γ. δεν υπαρχει ευθεια που να τεμνει και τις τρεις πλευρες ενος "τριπλα ασυμπτωτικου τριγωνου".

7. Στα πλαισια της Ο.Γ. να αποδειχθει οτι (καθε) δυο εσωτερικοι διχοτομοι ενος τριγωνου τεμνονται. Απο αυτο συμπερανατε οτι σε καθε τριγωνο στην Υ.Γ. υπαρχει ενα σημειο που ισαπεχει των τριων πλευρων του τριγωνου.

8. Στα πλαισια της Ευκλειδειας Γεωμετριας αποδειξτε οτι (καθε) δυο μεσοκαθετοι στις πλευρες ενος τριγωνου τεμνονται. Πως ακριβως χρησιμοποιειται το 5ο αιτημα;

9. (α) Στα πλαισια της Υ.Γ., αν οι μεσοκαθετοι σε δυο απο τις πλευρες ενος τριγωνου <u>δεν</u> τεμνονται, να αποδειχθει οτι:

(i) Αν δεχονται κοινη καθετο τοτε αυτη ειναι καθετος και στη μεσοκαθετο της τριτης πλευρας.

(ii) Αν ειναι ορικα παραλληλες τοτε και η τριτη μεσοκαθετος ειναι ορικα παραλληλη προς τις δυο.

(β) Χρησιμοποιωντας το μερος (α) διατυπωσατε ικανη και <u>αναγκαια</u> συνθηκη ωστε για ενα τριγωνο, της Υ.Γ., να υπαρχει σημειο που να ισαπεχει απο τις τρεις κορυφες του τριγωνου.

10. Ας ειναι Λ, Μ, Ν τα μεσα των πλευρων ΑΒ, ΒΓ και ΓΑ (αντιστοιχα) ενος τριγωνου $(\overset{\triangle}{AB\Gamma})$, στην Υ.Γ. Να δειξετε οτι τα τριγωνα $(\overset{\triangle}{A\Lambda N})$ και $(\overset{\triangle}{AB\Gamma})$ δεν μπορει να ειναι "ομοια". (δηλαδη δεν μπορει να ισχυουν οι "ισοτητες" $\hat{BA\Gamma} \cong \hat{\Lambda A N}$, $\hat{AB\Gamma} \cong \hat{A\Lambda N}$, $\hat{B\Gamma A} \cong \hat{\Lambda N A}$).

Επιπλεον τα ευθυγραμμα τμηματα (ΛΝ) και (ΒΜ) δεν μπορει να ειναι συμφωνα.

11. Να δειχθει οτι στην Υ.Γ. υπαρχει ενα τριγωνο τετοιο, ωστε οι μεσοκαθετοι σε δυο απο τις πλευρες του να μην τεμνονται.

12. Να δειχθει οτι σε καθε "τριπλα ασυμπτωτικο τριγωνο" υπαρχει ενα σημειο που να ισαπεχει και των τριων πλευρων του. Πως μπορει να χαρακτηρισθει αυτη η "κοινη" αποσταση;

Superposition

§4. Το εμβαδον στην Υπερβολικη Γεωμετρια

Αν δουμε το εμβαδον των τριγωνων στην Ευκλειδια Γεωμετρια μονον ως προς την αριθμητικη του εκφραση ($:= \frac{1}{2}$(βαση)x(υψος)) τοτε αυτο δυσκολα μεταφερεται στην Υ.Γ. (ακριβεστερα: αυτη η συγκεκριμενη εκφραση δεν μεταφερεται και αυτο μπορει, συντομα, να κατανοηθει και απο το εξης: Ο "τυπος" αναγει τον υπολογισμο στο εμβαδον ενος "ορθογωνιου παρ/μου", σχημα που στην Υ.Γ. δεν ειναι δυνατον να υπαρξει). Αν, ομως, δουμε το εμβαδον οχι στην αριθμητικη του εκφραση αλλα στις ιδιοτητες του πανω στα σχηματα (πρβλ. "ισοδυναμα σχηματα") τοτε μπορουμε να αποκρυσταλλωσουμε τις εξης ιδιοτητες (για τριγωνα π.χ)

- Βλεπουμε το εμβαδον σαν μια αντιστοιχια με θετικες τιμες απο ολα τα τριγωνα ωστε: (i) ισα τριγωνα να εχουν ισα εμβαδα, (ii) Αν ενα τριγωνο χωριστει σε δυο τριγωνα με μια ευθεια απο μια κορυφη του τοτε το εμβαδον του αρχικου τριγωνου ειναι ισο με το αθροισμα των εμβαδων των δυο επι μερους τριγωνων.

<u>Συμπερασμα</u>: Το εμβαδον ειναι "θετικο" και "προσθετικο" για τα τριγωνα!

Αυτες ειναι και οι ελαχιστες προϋποθεσεις που πρεπει να ικανοποιουνται απο καθε "συναρτηση" που θελουμε να παιζει το ρολο μιας "<u>συναρτησης εμβαδου</u>". Τις minimum, λοιπον, προϋποθεσεις μιας "συναρτησης εμβαδου" αναγνωριζουμε, στην Υ.Γ., τις γνωστες <u>ιδιοτητες του ελλειμματος για τα τριγωνα</u>! Πραγματι στο θεωρημα που στοχευουμε θα δουμε οτι, μεσω ενος πολ/σιου, αυτο <u>ειναι</u> το "εμβαδον"!

<u>4.1. Θεωρημα</u> (Gauss) : Στην Υ.Γ. καθε πιθανη "συναρτηση εμβαδου" E στα τριγωνα εχει την μορφη $E((\overset{\triangle}{AB\Gamma})) = k[\pi - (\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma})]$, για καθε τριγωνο $(\overset{\triangle}{AB\Gamma})$, οπου k ειναι μια σταθερα (: που δεν εξαρταται απο το τριγωνο!).

Για ιστορικους λογους στην αποδειξη θα χρησιμοποιησουμε την προσεγγιση του Gauss, οπου ομως θα παρουμε σαν δεδομενο οτι η τιμη του εμβαδου ενος σχηματος που προκυπτει απο τον χωρισμο του σχηματος σε τριγωνα [:τριγωνοποιηση] δεν εξαρταται απο τον συγκεκριμενο τροπο που εγινε η τριγωνοποιηση; ισχυρισμος που η αποδειξη του ειναι εξω απο τους σκοπους αυτης της παρουσιασης. Η αποδειξη του Θεωρηματος (4.1) θα γινει με μια σειρα απο βηματα.

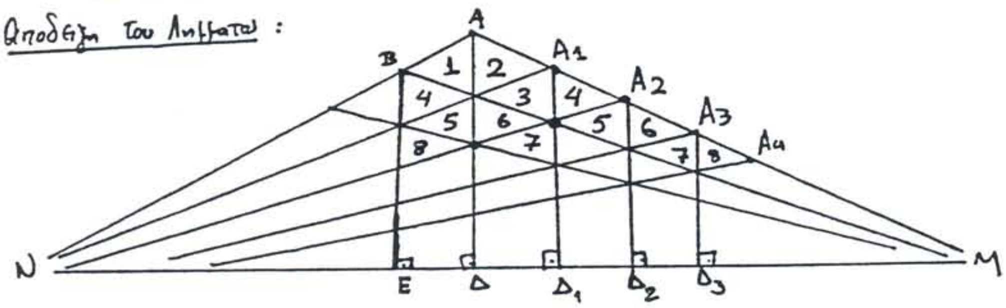
(I) Καθε δυο τριπλα ασυμπτωτικα τριγωνα ειναι συμφωνα (πρβλ. 3.8.)

(II) Η "συναρτηση εμβαδου" (:η απλα το "εμβαδον") ενος τριπλα ασυμπτωτικου τριγωνου εχει πεπερασμενη τιμη, σταθερη για ολα τα τριπλα ασυμπτωτ. τριγωνα.

Πραγματι απο τα (3.7) και (3.8) γνωριζουμε οτι καθε τριπλα ασυμπτωτικο τριγωνο οδηγει μονοσημαντα(?) σ' ενα απλα ασυμπτωτικο τριγωνο οποτε απο το (I), αρκει να δειξουμε οτι το εμβαδον ενος απλα ασυμπτωτικα τριγωνου ειναι πεπερασμενο.

4.1.1 Λημμα: καθε απλα ασυμπτωτικο τριγωνο εχει πεπερασμενο "εμβαδον".

Αποδειξη του Λημματος:



Αρχιζουμε απο το $(A\overset{\Delta}{B}M)$. ΜΝ η κοινη οριακη παραλληλη των $\vec{AB}$ και $\vec{AM}$, ΑΔ η διχοτομος της γωνιας $\hat{A}$. Κανουμε τωρα την εξης κατασκευη:

Μια ανακλαση του σχηματος ως προς ΑΔ πας την ΑΝ στην ΑΜ και το τριγωνο $(A\overset{\Delta}{B}M)$ στο $(A\hat{A_1}N)$ με A-A_1-M και $(AA_1) \cong AB$, $\vec{A_1N}$ οριακα παραλληλη προς (ΜΝ)

(i) Διχοτομουμε την $N\hat{A_1}M$, $A_1\Delta_1$ η διχοτομος, και παιρνουμε την συμμετρικη της ΒΜ ως προς $A_1\Delta_1$, εστω A_2N, και τη συμμετρικη της A_2N ως προς ΑΔ

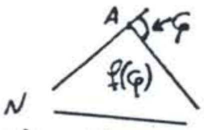
(ii) Διχοτομουμε την $\hat{A_2}$ και επαναλαμβανουμε τα αντιστοιχα (i) για την $(A_2\Delta_2)$.

Ετσι επιτυγχανεται το εξης: Γινεται μια τριγωνοποιηση του $(A\overset{\Delta}{B}M)$ με μια ακολουθια τριγωνων $T_1 (\leftrightarrow 1)$, T_2, T_3, T_4, T_5 .... που μεσω των συμμετριων απεικονιζονται σε αντιστοιχα ισα τριγωνα που ολα ομως βρισκονται στο κυρτο σχημα $(ABE\Delta\Delta_1A_1A)$ που βεβαια εχει πεπερασμενο εμβαδον!

(III) Το εμβαδον ενος διπλα ασυμπτωτικου τριγωνου ειναι συναρτηση της μοναδικης του γωνιας.

Αποδ. Πραγματι ενα διπλα ασυμπτωτικο τριγωνο καθοριζεται μονοσημαντα απο την γωνια του (πρβλ 3.7)

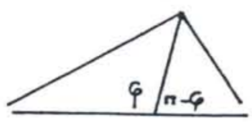
Το (III) μας λεει οτι η συναρτηση εμβαδου στα διπλα ασυμπτωτικα τριγωνα ειναι συναρτηση μονο της γωνιας τους. Ο Gauss εδω για να συμφωνη το εμβαδον με την απαιτηση "το ολον να εχει μεγαλυτερο εμβαδον απο καθε μερος του" την θεωρησε ουσιαστικα συναρτηση της εξωτερικης γωνιας κανοντας την ετσι αυξουσα! (απο



$$E((A\hat{M}N)) = f(\varphi)$$

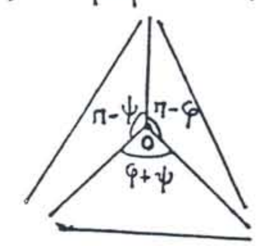
το θεωρημα της "εξωτερικης γωνιας")

(IV) Για $0<\varphi<\pi$ ισχυει $f(\varphi)+f(\pi-\varphi)=t$, οπου t το (σταθερο) εμβαδον ενος (τυχαιου) τριπλα ασυμπτωτικου τριγωνου. (μπορουμε δε να δεχθουμε: $f(0)=0$, $f(\pi)=t$)



Πραγματι δυο διπλα ασυμπτωτικα τριγωνα με γωνιες φ και (π-φ) τοποθετουνται παντα οπως στο διπλανο σχημα!

(V) $f(\varphi)+f(\psi)+f(\pi-\varphi-\psi)=t$



Πραγματι αρχιζοντας απο ενα τυχαιο σημειο O και τοποθετωντας τρεις γωνιες $(\pi-\varphi)$, $(\pi-\psi)$, $(\varphi+\psi)$ οπως στο σχημα οδηγουμαστε σε ενα τριπλα ασυμπτωτικο τριγωνο! Η προσθετικοτητα του εμβαδου τωρα δινει

$$f(\varphi)+f(\psi)+f(\pi-\varphi-\psi)=t!$$

(VI) $f(\varphi)+f(\psi)=f(\varphi+\psi)$. :

Εφαρμοζουμε την (IV) για $(\varphi+\psi)$ οποτε δινει $f(\varphi+\psi)=t-f(\pi-\varphi-\psi)$ (1) απο το (V) εχουμε $f(\pi-\varphi-\psi)=t-f(\varphi)-f(\psi)$ (2). Τα (1) και (2) δινουν το (VI).

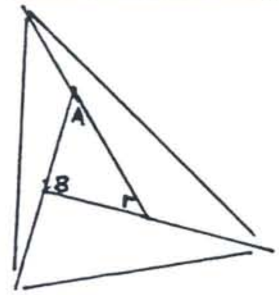
(VII) $f(\varphi)=\frac{t}{\pi}\cdot\varphi$. Για την αποδειξη: Μια γνησια μονοτονη συναρτηση f με την ιδιοτητα (VI) αν ειναι συνεχης ειναι της μορφης $f(\varphi)=\mu\cdot\varphi$, (*) Χωρις συνεχεια ισχυει παλι το ιδιο αποτελεσμα και η αποδειξη εχει ως εξης:

Αν υπηρχε μ ωστε $f(\varphi)=\mu\cdot\varphi$ τοτε απο το (IV) $f(\pi)=\mu\cdot\pi=t \Rightarrow \boxed{\mu=\frac{t}{\pi}}$

Παμε να πιστοποιησουμε τον (*). Απο το (VI) για $\varphi=\psi \Rightarrow f(2\varphi)=2f(\varphi)$ ή $f(\varphi)=\frac{1}{2}f(2\varphi)$ Εφαρμοζουμε αυτο για γωνια $\varphi=\frac{\pi}{2}$ εχουμε οτι $f(\frac{\pi}{2})$ $=\frac{1}{2}f(\pi)=\frac{1}{2}t=\frac{t}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}=\mu\cdot\frac{\pi}{2}$ ομοια ο τυπος (*) ισχυει για γωνιες της μορφης $\frac{\pi}{2^n}$.

Προφανως ισχυει και για γωνιες της μορφης $n\pi$; $n\in\mathbb{N}$. Εστω τωρα οτι υπαρχει γωνια ωστε $f(\phi)\neq\mu\phi$; τοτε οι αριθμοι $\left(\frac{\phi}{\pi}\right)$ και $\left(\frac{f(\phi)}{\mu\pi}\right)$ ειναι διαφορετικοι και αν π.χ. $f(\phi) > \mu\phi$ τοτε $\frac{\phi}{\pi} < \frac{f(\phi)}{\mu}$. Γνωριζουμε οτι υπαρχει $\eta \in D$ [:= οι αριθμοι που εμφανιζονται αν αναπτυχθουν σαν "δυαδικοι" μεδιαφερ του 2] ωστε $\frac{\phi}{\pi} < \eta < \frac{f(\phi)}{\mu\pi} \Leftrightarrow \phi < \eta\pi < \frac{f(\phi)}{\mu}$. Ομως f γνησια αυξουσα αρα $\phi < \eta\pi \Rightarrow f(\phi) < f(\eta\pi) = \eta\mu\pi$ που αντιφασκει με το αλλο μελος της ανισοτητας. Ομοια καταληγουμε σε ατοπο για $f(\phi) < \mu\phi$. Αρα $f(\phi) = \mu\phi$ και $\mu = \frac{t}{\pi}$, $t =$ το "εμβαδον" τυχαιου τριπλα ασυμπτωτικου τριγωνου.

(VIII) <u>Αποδειξη του Θεωρηματος 4.1.</u> Αρχιζοντας απο τριγωνο $(A\hat{B}\Gamma)$ κατασκευαζουμε, παντα, ενα τριπλα ασυμπτωτικο τριγωνο οπου η "συναρτηση" εμβαδου E εχει την σταθερη τιμη t, και διπλα ασυμπτωτικα με εξωτερικες γωνιες τις γωνιες του τριγωνου. Η E στα διπλα ασυμπτωτικα ειναι της μορφης μx (x εξωτερικη γωνια). Η προσθετικοτητα της E δινει οτι:



$$t = E((A\hat{B}\Gamma)) + \mu\hat{A} + \mu\hat{B} + \mu\hat{\Gamma} = E((A\hat{B}\Gamma)) + \mu(\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}).\ \text{ομως } t = \mu\pi$$

Τελικα $E((A\hat{B}\Gamma)) = \mu[\pi - (\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma})]$. ■

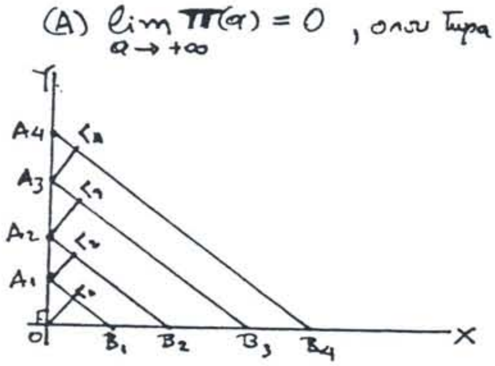
<u>4.2. Πορισμα:</u> Το εμβαδον <u>καθε</u> τριγωνου στην Υ.Γ. φραζεται απο το εμβαδον ενος τριπλα ασυμπτωτικου τριγωνου, που δεν πραγματωνεται για (εσωτ.) τριγωνα!

Στην ουσια αποδεικνυεται και κατι πιο ισχυρο απο το 4.2. Συγκεκριμενα:

<u>4.3. Προταση:</u> Για καθε θ με $0<\theta<\pi$ υπαρχει τριγωνο $(A\hat{B}\Gamma)$ με $\theta <$ ελλειμμα$(A\hat{B}\Gamma) < \pi$. (<u>Ισοδυναμα</u>: το t ειναι το supremum για τα εμβαδα!)

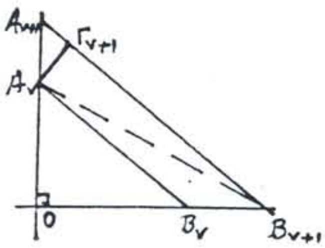
<u>Αποδειξη</u>: Γνωριζουμε οτι η αντιστοιχια $a \to \Pi(a)$ ειναι 1-1/επι για τα ευθυγραμμα τμηματα a και τις γωνιες μεταξυ 0 και $\pi/2$. Επι πλεον

(A) $\lim_{a \to +\infty} \Pi(a) = 0$, οπου τωρα το a ειναι το μηκος του ευθυγραμμου τμηματος:



Η "γωνια παραλληλιας" ειναι γνησια φθινουσα. Εστω οτι υπαρχει $\varepsilon > 0$ με $0<\varepsilon<\Pi(a)$ $\forall a \in (0,+\infty)$. Θεωρουμε την ορθη γωνια $X\hat{O}Y$ και στην πλευρα OY παιρνουμε σημεια $A_1, A_2, \ldots, A_\nu, \ldots$ ωστε $(OA_1) \cong (A_1A_2) \cong \ldots$

και από τα $A_1,\dots,A_\nu,\dots$ ημιευθείες στο εσωτερικό της γωνίας που να σχηματίζουν με την $\vec{OY}$ γωνία ε. Άρα $0<\varepsilon<\Pi(a)$ $\forall a$, αυτές οι ημιευθείες συναντούν την $\vec{OX}$ στα $B_1,\dots,B_\nu,\dots$. Από τα $O, A_1,\dots, A_\nu$ φέρουμε καθέτες στις $(A_\nu B_\nu)$, $\nu=1,2,\dots$ οπότε σχηματίζονται τα ορθογώνια τρίγωνα $(O\overset{\Delta}{A_1}\Gamma_1)$ $(A_1\overset{\Delta}{A_2}\Gamma_2)$, ..., $(A_\nu \overset{\Delta}{A}_{\nu+1}\Gamma_{\nu+1})$, ... που είναι μεταξύ τους "σύμφωνα". Σχετικά με το έλλειμμα $(O\overset{\Delta}{A_\nu}B_\nu)=d_\nu$



Έχουμε: αν έλλειμμα $(O\overset{\Delta}{A_1}\Gamma_1)=d_0=$ έλλειμμα $(A_\nu A_{\nu+1}\Gamma_{\nu+1})$ και $\delta_\nu=$ έλλειμμα $(B_\nu \overset{\Delta}{A_\nu} B_{\nu+1})+$ $+$ έλλειμμα $(B_{\nu+1}\overset{\Delta}{A_\nu}\Gamma_{\nu+1})>0$, τότε:

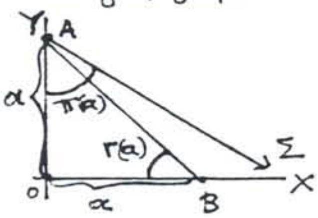
$$d_{\nu+1}=d_0+\delta_\nu+d_\nu>d_0+d_\nu$$

οπότε $d_\nu>d_1+(\nu-1)d_0$ (1) $(\nu>1)$

(2) $d_0,\pi>0$ άρα από Αρχιμήδους-Ευδόξου $\exists\eta$: $\eta d_0\geq\pi$. Από (1),(2) για $\nu=\eta+1$ έχουμε $d_{\eta+1}-d_1>\eta d_0>\pi \Rightarrow d_{\eta+1}>d_1+\pi>\pi$ Αυτό όμως αντιφάσκει με την ιδιότητα του ελλείμματος για τρίγωνα: $0<d_{\eta+1}<\pi$!

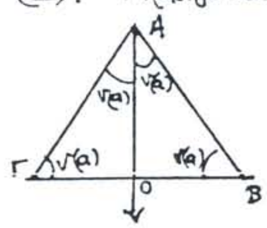
(B) Έστω θ με $0<\theta<\pi$. Θα αποδειχθεί η ύπαρξη του $(A\overset{\Delta}{B}\Gamma)$ όπως στο 4.3.

(I) Ας θεωρήσουμε ένα μήκος α και την γωνία παραλληλίας για το α. Τότε γνωρίζουμε ότι η $\alpha\to\Pi(\alpha)$ μπορεί να "πραγματωθεί" (§3)



Στο σχήμα λοιπόν $(OA)=\alpha$ και $\vec{A\Sigma}$ η οποία Α οριακή παράλληλος προς $\vec{OX}$. Στην $\vec{OX}$ παίρνουμε B: O-B-X με $(OB)\cong(OA)$. Τότε στο τρίγωνο $(A\overset{\Delta}{O}B)$ αφού η AB συναντά την $\vec{OX}$ ισχύει $(O\hat{A}B)<(O\hat{A}\Sigma)$ την αντιστοιχία $\alpha\mapsto r(\alpha)=(O\hat{A}B)$ μπορούμε να την ορίσουμε για κάθε μήκος, και $0<r(\alpha)<\Pi(\alpha)$ άρα καθώς $\alpha\to+\infty$ από το (A) έχουμε $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} r(\alpha)=0$!

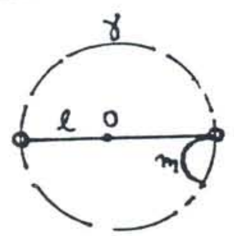
(II). Αρχίζοντας από το $(A\overset{\Delta}{O}B)$ και παίρνοντας το "συμμετρικό" ως προς $(\vec{AO})$



Έχουμε ένα τρίγωνο $(A\overset{\Delta}{B}\Gamma)$ με έλλειμμα $d:=d(\alpha)=$ $=[\pi-4r(\alpha)]$. Καθώς $\alpha\to+\infty$ τότε $d(\alpha)\to\pi$ άρα για $\theta\in\mathbb{R}$ με $0<\theta<\pi$ υπάρχει α ώστε $\theta<d(\alpha)<\pi$ ∎

§5.2. Τα μοντελα του Poincare (: Περιγραφη). Αν και αποτελεσματα που ανηκαν στην Υ.Γ. υπηρχαν απο νωρις (: Saccheri; Gauss) και η δυνατοτητα αναπτυξης μιας Γεωμετριας χωρις το Αιτημα των παραλληλων αναγνωρισθηκε απο τους Bolayi - Lobachevsky, αυστηρη αποδειξη της υπαρξης της Υ.Γ. (τουλαχιστο τοσο αυστηρη οσο και για την Ευκλειδια Γεωμετρια στα πλαισια της §5.1) αργησε να γινει. Αυτο επιτευχθηκε με την κατασκευη ενος μοντελου για την Υ.Γ. απο τον Klein γυρω στο 1860 με μεθοδους και απο την Προβολικη Γεωμετρια και ειναι γνωστο σαν μοντελο Beltrami-Klein. Το μοντελο των Beltrami-Klein σαν πρωτο στον ιλαδο της Υ.Γ. ειναι καπως "δυσνοητο" στην παρουσιαση και κυριος λογος γι' αυτο ειναι ο τροπος που οριζεται η "συμφωνια" για τις γωνιες. Μετα απο αυτο εδοθησαν και αλλα μοντελα απο τα οποια εδω θα παρουσιασθουν αυτα που οφειλονται στον Poincare.

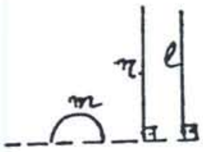
§5.2.1. Το μοντελο του δισκου του Poincare: Σ' αυτο τα "σημεια" του υπερβολικου επιπεδου ταυτιζονται με τα εσωτερικα σημεια ενος Ευκλειδιου κυκλου γ (ανοιχτος δισκος) ενω οι "ευθειες" ειναι δυο ειδων: πρωτα ολες οι (ανοιχτες) διαμετροι του γ και μετα τα ανοιχτα (χωρις ακρα) τοξα κυκλων ορθογωνιων προς τον γ.



ℓ, m: ευθειες
γωνια των (γ, m) ορθη.

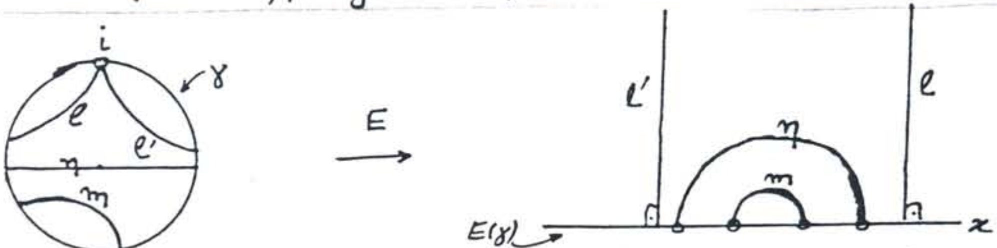
Οσον αφορα τωρα τις σχεσεις που απαιτουνται: Η σχεση "βρισκεται πανω" (πρόσπτωση") οριζεται με την συνηθισμενη εννοια: το σημειο ανηκει στην ευθεια. Αναλογα οριζεται και η σχεση του "μεταξυ" για τα σημεια. Στην σχεση της "συμπτωσης" για τα ευθυγραμμα τμηματα υπαρχει καποια διαδικασια για τον ορισμο της και θα αναπτυχθει κατα την διαρκεια των αποδειξεων. Η "συμπτωση" των γωνιων εχει την συνηθισμενη Ευκλειδια ερμηνεια (: γωνια δυο ευθειων, γωνια καμπυλων) και εδω βρισκεται το πλεονεκτημα του μοντελου.

5.2.2. Το μοντελο του πανω Ημιεπιπεδου του Poincare.: Εαν χρησιμοποιησουμε καρτεσιανες συντεταγμενες για το Ευκλειδιο επιπεδο τοτε το πανω ημιεπιπεδο $H := \{(x,y) \mid y > 0\}$ χρησιμευει σαν "Υπερβολικο Επιπεδο"



Οι ευθειες σ' αυτο το μοντελο παριστανονται με δυο τροπους: ημιευθειες καθετες στον αξονα των x και ημιπεριφερειες που εχουν το κεντρο τους στον αξονα των x. Οι σχεσεις "βρισκεται πανω" και "μεταξυ" εχουν την συνηθισμενη Ευκλειδια σημασια. Οι γωνιες μετρωνται ακριβως οπως στην Ευκλειδια Γεωμετρια του επιπεδου.

5.2.3. Σχεση μεταξυ των δυο μοντελων. Τα μοντελα που παρουσιαστηκαν στα (5.2.1) και (5.2.2) ειναι ισομορφα με την ακολουθη εννοια: Υπαρχει μια 1-1 και επι απεικονιση μεταξυ των σημειοσυνολων των δυο μοντελων που διατηρει την Γεωμετρια δηλαδη: απεικονιζει ευθειες σε ευθειες διατηρωντας τις σχεσεις προσπτωσης, μεταξυ και συμπτωσης οπως υπαρχουν στα δυο μοντελα.



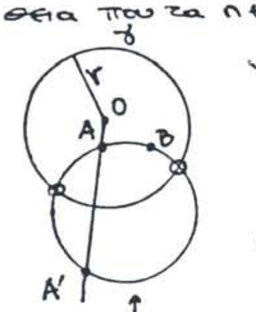
Τα προηγουμενα πραγματωνονται ως εξης: Εαν χρησιμοποιησουμε μιγαδικους αριθμους τοτε $D:=\{z\in\mathbb{C} \mid |z|<1\}$ ειναι τα σημεια για το μοντελο του δισκου και $H:=\{z\in\mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\, z>0\}$ τα σημεια για το πανω ημιεπιπεδο η απεικονιση $E: z \longmapsto i\,\frac{i+z}{i-z}$ απεικονιζει το D επι του H, ειναι 1-1 και διατηρει την γεωμετρια! Εποπτικα η E συμπεριφερεται ως εξης: το $\{z\in\mathbb{C} \mid |z|=1\}-\{i\} \equiv (\gamma - \{\text{ενα σημειο}\})$ απεικονιζεται στον αξονα των x. Οι ορθογωνιες περιφερειες απο το i στις καθετες ημιευθειες. Η E ειναι συμμορφη δηλ. διατηρει τις ευκλειδιες γωνιες παν βεβαια μετρουν και τις γωνιες στα μοντελα του Poincaré. Οσον αφορα την σχεση "συμπτωσης" για τμηματα αν οριστει στο μοντελο του δισκου (πρβλ. § 5.3.) τοτε μεσω της E μπορουμε να ορισουμε μια "επαγωγη" σχεση συμπτωσης στο H κανοντας το εδω μοντελο ισομορφο προς το μοντελο του δισκου! Αυτο δικαιολογει γιατι στα εποµενα περιοριζομαστε αποκλειστικα στο μοντελο του δισκου του Poincare.

§5.3. Αποδείξεις Για το Μοντέλο του Δίσκου του Poincaré.

Θα πιστοποιηθεί η ισχύς εκείνων των αξιωμάτων της Υ.Γ. που οι αντίστοιχες προτάσεις της Ευκλείδιας Γεωμετρίας δεν είναι εντελώς προφανείς. Βασικό ρόλο στις αποδείξεις παίζει η "αντιστροφή" στην Ευκλείδια Γεωμ. που είναι ένας μετ/σμός του επιπέδου στον εαυτόν του που ορίζεται ως εξής: Εάν O ένα σημείο (: το κέντρο της αντιστροφής) και $r^2 \neq 0$ (η δύναμη της αντιστροφής) τότε το τυχαίο σημείο P του επιπέδου απεικονίζεται μέσω της: "αντιστροφής κέντρου O και δύναμης r^2" στο σημείο P' της ημιευθείας $\overrightarrow{OP}$ ώστε $(OP).(OP') = r^2$. Μπορούν να διατυπωθούν προτάσεις για τον τρόπο που μετ/ζονται μέσω της αντιστροφής οι ευθείες και οι κύκλοι, που θα αναφερθούν, χωρίς απόδειξη, στα σημεία που χρησιμοποιούνται.

5.3.1. Αξιώματα του "ανήκειν" (: σχέση πρόσπτωσης).

Πιστοποίηση χρήζει το: "Για κάθε δύο, ξένα μεταξύ τους, σημεία υπάρχει ακριβώς μία ευθεία που τα περιέχει". Για A και B στο εσωτερικό του γ όχι πάνω στην ίδια διάμετρο πρέπει να βρεθεί περιφέρεια από τα A και B που να τέμνει ορθογώνια την γ. Εφαρμόζοντας στοιχειώδη Ευκλείδια Γεωμετρία (: δύναμη σημείου ως προς κύκλο) βρίσκει ότι αυτή η περιφέρεια περιέχει το $A' \equiv$ "αντίστροφο του A με κέντρο O και δύναμη r^2".



ορθογώνια περιφ.

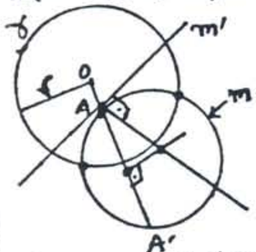
Άρα η ζητούμενη περιφέρεια ορίζεται μονοσήμαντα από τα A, B, A'.

• Χωρίς ιδιαίτερη δυσκολία πιστοποιούνται και τα αξιώματα "διάταξης".

5.3.2. Αξιώματα "σύμπτωσης" (: σύμφωνα) για γωνίες και ευθ. τμήματα

(A) Γωνίες: "μετρώνται" σαν γωνίες καμπυλών της Ευκλείδιας Γεωμετρίας. Το μόνο αξίωμα που θέλει πιστοποίηση είναι "η μεταφορά" των γωνιών. Δηλαδή αφού δοθεί σημείο A, ημιευθεία l από το A και γωνία φ υπάρχει ημιευθεία m από το A (: σε καθορισμένο από πριν ημιεπίπεδο) που να σχηματίζει με την l γωνία φ. Προφανώς αυτό ισχύει αν το A είναι το κέντρο του γ

Εαν A διαφορετικο απο το κεντρο, τοτε η l ειναι τοξο περιφερειας ορθογωνιας προς την γ και η ζητουμενη m ενας ορθογωνιος κυκλος απο το A ωστε οι εφαπτομενες l' και m' στο A να σχηματιζουν γωνια φ. Αρα το αντιστοιχο προβλημα της Ευκλειδιας Γεωμετριας ειναι: "Αν δοθει κυκλος γ εσωτερικο σημειο A ημιευθεια m' απο το A να κατασκευασθει κυκλος m απο το A εφαπτομενος της m' στο A και ορθογωνιος προς την γ". Προφανως σ' ενα τε-

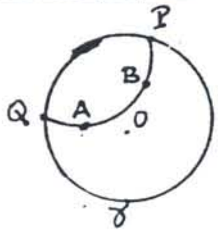


τοιο κυκλο βρισκεται το A' (αντιστροφο του A με κεντρο O και δυναμη r^2) Αρα το κεντρο του ζητουμενου κυκλου βρισκεται στην μεσοκαθετο του AA'. Επι πλεον βρισκεται στην καθετο της m' στο A, αρα ο κυκλος κατασκευαζεται ■

συμφωνιας!!

(B) <u>Σχεση συμφωνιας για τα ευθυγραμμα τμηματα.</u> Η αναγκαιοτητα του ορισμου της σχεσης συμφωνιας οπως τελικα θα δοθει μπορει να γινει, ευκολα, κατανοητη και απο τα εξης: Αν δουμε την Υ.Γ. σαν Γεωμετρια κατα Klein θα αναζητησουμε, εντελως φυσιολογικα, τους αυτομορφισμους του Υπερβολικου επιπεδου δηλαδη τους 1-1 και επι μετα/σμους που διατηρουν τις σχεσεις πανω στις οποιες θεμελιωνεται η Υ.Γ. Στο μοντελο του δισκου, οπως εχει αναπτυχθει ως εδω, οι αυτομορφισμοι θα επρεπε να απεικονιζουν ευθειες σε ευθειες, κυκλους σε κυκλους (: ακριβεστερα να διατηρουν την οικογενεια των κυκλων και ευθειων) να διατηρουν τις γωνιες <u>και</u> να απεικονιζουν "συμφωνα" ευθυγρ. τμηματα σε "συμφωνα" για μια σχεση που πρεπει να οριστει. Μια μεγαλη οικογενεια μετ/σμων που διατηρει ολες τις σχεσεις που εχουν οριστει ως εδω, αν αναφερθουμε σε μιγαδικες συντεταγμενες (: §5.2), ειναι οι μετ/σμοι Möbius δηλ. απεικονισεις της μορφης $z \mapsto (az+b)/(cz+d)$, $|ad-cb| \neq 0$. Ενα αναλλοιωτο αυτων των απεικονισεων ειναι ο "διπλος λογος τεσσαρων σημειων" δηλαδη η ποσοτητα $(z_1,z_2:z_3,z_4) = \left(\frac{z_1-z_3}{z_1-z_4} : \frac{z_2-z_3}{z_2-z_4}\right)$ που ειναι πραγματικος αριθμος, αν τα τεσσαρα σημεια ειναι συνευθειακα η ομοκυκλικα! Αρα, πιθανον, ιδιοτητες του διπλου λογου μπορουν να οδηγησουν σε ενα ορισμο μιας σχεσης συμφωνιας, λαμβανομενων υπ' οψιν των αξιωματων και την προηγουμενη πειρα της Ευκλειδιας γεωμετριας οπου δυο τμηματα ειναι συμφωνα αν εχουν ισα ευκλειδια μηκη!, με οτι αυτο συνεπαγεται: "δεξιοτητα", "προσθετικοτητα"...

(B.1) Ορισμος. Εαν $\gamma(0;r)$ ο κυκλος του μοντελου του Poincaré και A,B εσωτερικα σημεια του γ, για P και Q τα σημεια τομης της γ και της (Poincaré) ευθειας απο τα A και B οριζεται ο διπλος λογος



$$(AB:PQ)=\frac{(\overline{AP})(\overline{BQ})}{(\overline{BP})(\overline{AQ})}\left(=\frac{(\overline{AP})}{(\overline{AQ})}:\frac{(\overline{BP})}{(\overline{BQ})}\right),$$

οπου $(\overline{AP})$ = Ευκλειδιο μηκος του AP (AP ευθ. της Ευκ. Γ.)

Οριζουμε τωρα το Poincaré-μηκος του (AB) ως εξης:

$$\boxed{d(AB)=|\log(AB:PQ)|}=|\eta|$$

→ διατηρ. μετασχ.
→ προσθ.

(B.2) Παρατηρηση. Το $d(AB)$ δεν εξαρταται απο την σειρα των A,B γιατι $(AB:PQ)=(BA:PQ)$ ακομα δεν εξαρταται απο την σειρα των P,Q γιατι αν $x=(AB:PQ)$ τοτε $|\log(AB:PQ)|=|\log x|=|-\log x|=|\log(\frac{1}{x})|=|\log(AB:QP)|$

σι
υπο
ιδι
τω

Ποτε εχω ισοι τμηματων!

(B.3) Ορισμος. Τα (Poincaré-) ευθυγραμμα τμηματα (AB) και $(\Gamma\Delta)$ ειναι "συμφωνα" κατα Poincaré (: αλλοιως Poincaré-συμφωνα) οταν $d(AB)=d(\Gamma\Delta)$.

Τωρα πρεπει να πιστοποιηθουν τα αξιωματα της "συμφωνιας" για τα ευθ. τμηματα.

στο μηκος λαμβανω υποψη μεταφορα ευθειων!!

(B.3.1) ("Μεταφορα" για τα ευθ. τμημ.) Μας δινεται το A (: στο Σχ. του (B.1)), η Poincaré ημιευθεια $\overrightarrow{AP}$ και ζητειται B ωστε $d(AB)$ = (μηκος του τμηματος που πρεπει να μεταφερθει) και $A-B-P$. Το πηλικο $(\overline{AP})/(\overline{AQ})$ ειναι σταθερο. Αν τωρα το B κινειται μεταξυ A και P τοτε $|\log(AB:PQ)|$ παιρνει καθε τιμη μεταξυ 0 και ∞ ακριβως μια φορα! (ιδιοτητες του log) αρα υπαρχει σημειο B ωστε $d(AB)$ ισο με αυτο του τμηματος που πρεπει να μεταφερθει.!!

Προσθετ. μηκους!!

(B.3.2) ("Προσθετικοτητα": $A-B-\Gamma \Rightarrow d(A\Gamma)=d(AB)+d(B\Gamma)$). Αν υπολογισθουν οι διπλοι λογοι εχουμε: $(A\Gamma:PQ)=(AB:PQ)\cdot(B\Gamma:PQ)$ εδω χρησιμοποιειται η βασικη ιδιοτητα του log, αρα $|\log(AB:PQ)|=|\log(AB:PQ)|+|\log(B\Gamma:PQ)|$. Απο αυτο βγαινει αμεσως το αξιωμα: Αν $A-B-\Gamma$ και $A'-B'-\Gamma'$ ωστε $(AB\cong A'B',\ B\Gamma\cong B'\Gamma')$ τοτε $A\Gamma\cong A'\Gamma'$! Τα υπολοιπα αξιωματα για ευθ. τμηματα ειναι αμεσα.

<u>Γ. Αξιωμα συμφωνιας για τα τριγωνα.</u> Πρεπει να πιστοποιηθει ο ισχυρισμος "Δυο τριγωνα που εχουν συμφωνα δυο πλευρες και την περιεχομενη γωνια ειναι συμφωνα." Η αποδειξη ειναι αρκετα ευρημματικη και θα γινει σε βηματα.

<u>Γ.1.</u> (<u>: Ιδιοτητες για την αντιστροφη</u>). Αν μας δοθουν δυο κυκλοι $\gamma(O;r)$ και $\delta(O';r')$ που τεμνονται ορθογωνια τοτε:

(α) Αντιστροφη ως προς δ (: κεντρου O', δυναμης $(r')^2$) απεικονιζει την περιφερεια γ στον εαυτον της και το εσωτερικο της γ στον εαυτον του.

(b) Αντιστροφη ως προς γ διατηρει τις σχεσεις "προσπτωσης", "διαταξης" και "συμφωνιας", οπως εχουν αναπτυχθει μεχρις εδω, οταν βεβαια το εσωτερικο της γ χρησιμευσει σαν μοντελο του δισκου του Poincare στην Υ.Γ.

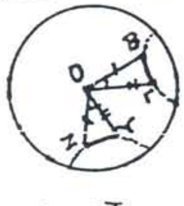
<u>Γ.2.</u> (<u>: Σχεση Ευκλειδιας και Poincare αποστασης για τμηματα πανω σε διαμετρους</u>) Αν $\gamma(O;r)$ ο κυκλος για το μοντελο του δισκου και $B\neq O$, για $d = d(OB) =$ το Poincare μηκος και για $\overline{OB}$ το Ευκλειδιο μηκος ισχυει $\overline{OB} = r\dfrac{e^d-1}{e^d+1}$

<u>Αποδειξη</u>: Εαν $P-O-B-Q$ (: P,Q στην γ) τοτε $d = |\log(OB:PQ)|$ και $(OB:PQ) = e^d$ αλλα $(OB:PQ) = [(\overline{OP})(\overline{BQ}):(\overline{OQ})\cdot(\overline{BP})] = (\overline{BQ})/(\overline{BP})$ $= (r+\overline{OB})/(r-\overline{OB})$ απ' οπου προκυπτει το $\overline{OB}$

<u>Γ.3.</u> Αν στο μοντελο του δισκου δοθει ενα τριγωνο $(X\overset{\triangle}{Y}Z)$ υπαρχει παντα ενα τριγωνο $(O\overset{\triangle}{Y'}Z')$ (O: το κεντρο του δισκου) συμφωνο με το $(X\overset{\triangle}{Y}Z)$ (οπου: $Y\hat{X}Z \cong Y'\hat{O}Z'$ κλπ.)

<u>Κατασκευη του $(O\overset{\triangle}{Y'}Z')$:</u> Εστω X' = το σημειο τομης των κυκλων που οριζουν τα (XY) και (XZ). Αντιστροφη με κεντρο X' και δυναμη $[(\overline{X'X})\cdot(\overline{X'O})]$ απεικονιζει το X στο O, το Y σ' ενα Y' το Z σ' ενα Z' ωστε το τριγωνο $(X\overset{\triangle}{Y}Z) \cong (OY'Z')$ (Απο το Γ.1.) Βεβαια $(\overrightarrow{OY'})$ ακτινα!

<u>Γ.4.</u> Απο το (Γ.3) η πιστοποιηση του αξιωματος αναγεται στην περιπτωση που τα

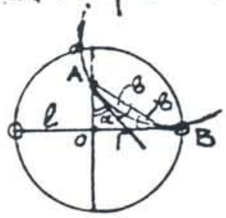


δυο τριγωνα εχουν κοινη την κορυφη της συμφωνης γωνιας τους και μαλιστα στο κεντρο O του δισκου, ενω οι πλευρες των συμφωνων γωνιων ειναι πανω σε ακτινες (: Στο διπλα σχημα) Εδω τωρα απαιτειται <u>πληρης</u> γνωση της Ευκλειδιας Γεωμετριας και σαν Γεωμετριας Μετ/σεων.

$d(OB) \cong d(OY)$ οποτε (: Γ.2) εχουμε $\overline{OB} = \overline{OY}$ Δηλαδη τα Ευκλειδια τριγωνα $(O\overset{\Delta}{Y}Z)$ και $(O\overset{\Delta}{B}\Gamma)$ εχουν δυο πλευρες και την περιεχομενη γωνια ισα αρα αναι ισα. Αφου τα δυο τριγωνα ειναι ισα υπαρχει μια Ευκλειδια Ισομετρια που απεικονιζει το ενα τριγωνο επι του αλλου. Μια τετοια ισομετρια Ειναι μια στροφη γυρω απο το O που πιθανως ακολουθειται απο μια ανακλαση σε μια ευθεια απο το O. Οι δυο αυτοι μετ/σμοι (: στροφες κεντρο O, ανακλασεις σε ευθειες απο το O) διατηρουν την Γεωμετρια Poincare του δισκου αρα απεικονιζουν το Poincare τριγωνο $(O\overset{\Delta}{Y}Z)$ στο Poincare τριγωνο $(O\overset{\Delta}{B}\Gamma)$ που ετσι γινονται συμμορφα ∎

§5.4. Για την Γεωμετρια του Μοντελου του δισκου του Poincare

5.4.1. Η οριακη παραλληλη: Οπως στο (5.3 Γ.) μπορουμε παντα να αναχθουμε στην περιπτωση το ζευγος (A, ℓ) για το οποιο ζητειται η οριακη παραλληλη να πληροι: "η ℓ να ειναι διαμετρος και το A να ειναι στην καθετη στο κεντρο"!



Υπαρχει μια ορθογωνια περιφερεια απο τα A και B (: 5.3.1.) Που παριστανει μια ευθεια στο μοντελο του δισκου και ειναι οριακα παραλληλη απο το A προς ℓ, που βρισκεται προς το μερος του B.

5.4.2. Η γωνια παραλληλιας. Αφου οι γωνιες ειναι Ευκλειδιες γωνιες καμπυλων για να υπολογισθη η $\Pi(AO) = \Pi(d)$ αρκει να βρουμε την γωνια $(O\hat{A}\Gamma)$, $\overrightarrow{A\Gamma}$ εφαπτομενη της $\widehat{AB}$ στο A. Φεροντας την χορδη AB, $(\hat{\Gamma A B}) \cong (\hat{\Gamma B A})$ ενω $\alpha + 2\beta = \frac{\pi}{2}$ (στο τριγωνο $(\hat{A}O\Gamma)$, που ειναι ορθογωνιο, στην Ευκλειδια Γεωμ.) επι πλεον $\overline{AO} = r \cdot \varepsilon\varphi\beta$. Απο το (5.3.Γ.2) για $d := d(AO)$ εχουμε $e^d = (r + \overline{AO})/(r - \overline{AO}) = (1 + \varepsilon\varphi\beta)/(1 - \varepsilon\varphi\beta)$. Ομως αφου $\beta = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}$ ισχυει $\varepsilon\varphi\beta = (1 - \varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2})/(1 + \varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2})$. Τελικα υπολογιζεται οτι $\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2} = e^{-d}$ ισχυει λοιπον ο τυπος $\boxed{\varepsilon\varphi\left(\frac{\Pi(d)}{2}\right) = e^{-d}}$ που συνδεει το μηκος και την γωνια παραλληλιας στο μοντελο του δισκου του Poincare. Τωρα βεβαια γινονται περισσοτερο καθαρες οι ιδιοτητες της γωνιας παραλληλιας οπως αναπτυχθηκαν στο αντιστοιχο κεφαλαιο. Ο προηγουμενος τυπος ηταν γνωστος και χρησιμοποιηθηκε και απο τους Bolayi – Lobachevsky.

<u>Τελικες Παρατηρησεις.</u> Εδω θα σταματησουμε την παραθεση αποτελεσματων της Υ.Γ. ακολουθωντας μια αυστηρα αξιωματικη μεθοδο, γιατι: οπως ακριβως και στην Ευκλειδια Γεωμετρια, η βαθια γνωση της Γεωμετριας αυτης επιτυγχανεται αφ' ενος με την αλγεβροποιηση και αφ' ετερου με την ερευνα της Γεωμετριας στα πλαισια της Γεωμετριας κατα Klein. Ακομα στην παρουσιαση που επιχειρησαμε δεν ακολουθησαμε πιστα τη σειρα διαμορφωσης της Υ.Γ. ιστορικα. Τοσο αυτα οσο και θεματα της Υ.Γ. που δεν εγινε δυνατον να παρουσιασθουν μπορουν να αναζητηθουν και στην βιβλιογραφια που ακολουθει και που βοηθησε <u>ουσιαστικα</u> στην διαμορφωση του κειμενου.

<u>ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ (που χρησιμοποιησαμε)</u>

Bonola, R. : Non Euclidean Geometry (Dover)
Coxeter, H.S.M. : Introduction to Geometry (J. Wiley)
Greenberg, M.J. : Euclidean and Non-Euclidean Geometries (Freeman).
Moise, E.E. : Elementary Geometry from an Advanced Standpoint (Addison-Wesley).