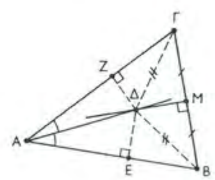
ΠΡΟΕΙΣΑΓΩΓΙΚΟ ΣΧΟΛΙΟ

Το **παράδειγμα** που ακολουθεί δείχνει ότι μια "μικρή" ατέλεια σε κάποιο σχήμα ενδέχεται να οδηγήσει σε τελείως εσφαλμένα συμπεράσματα. Αυτό το ενδεχόμενο, προστιθέμενο σε επιχειρήματα **"επιστημολογικού"** περιεχομένου και σε γενικότερα αποδεκτές απόψεις γύρω από την **"υφή"**, την **"αξιοπιστία"** και την **"εμβέλεια"** των Μαθηματικών, ενισχύει τη θέση ότι τα Μαθηματικά πρέπει να ξεπεράσουν τους **"φραγμούς"** και τις **"παραποιήσεις"** της εποπτείας (χωρίς, βέβαια, να την αγνοήσουν τελείως). Μια "φυσιολογική" συνέπεια της θέσης αυτής είναι η τάση προς την **αξιωματικοποίηση**, που μας απασχόλησε στη 2η παράγραφο και θ'αποτελέσει το αντικείμενο του κεφαλαίου αυτού.

Θεωρούμε το τρίγωνο ΑΒΓ (πρβλ. το σχήμα). Υποθέτουμε ότι η μεσοκάθετη, ΔΜ, στην ΒΓ και η διχοτόμος της ∢ΒΑΓ τέμνονται στο Δ. Φέρουμε τις ΔΕ και ΔΖ κάθετες στις ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Τότε, από την ισότητα των τριγώνων ΑΕΔ και ΑΔΖ συμπεραίνουμε ΑΕ = ΑΖ (και ΔΕ = ΔΖ), ενώ από την ισότητα των τριγώνων ΒΕΔ και ΓΔΖ προκύπτει ΕΒ = ΖΓ. Το τελικό συμπέρασμα είναι ΑΒ = ΑΓ, απ' όπου συνάγεται ότι **"κάθε τρίγωνο είναι ισοσκελές"**. Αυτό, προφανώς, δεν ισχύει, μολονότι οι συλλογισμοί είναι σωστοί. **Το λάθος βρίσκεται σε ατέλεια του σχήματος**, που δεν εντοπίζεται (πάντα) εύκολα από την εποπτεία. Πιο συγκεκριμένα: αν, π.χ., το Ζ βρεθεί "μεταξύ" των Α και Γ, το Ε **δεν μπορεί** να βρεθεί "μεταξύ" των Α και Β (πρβλ. 6.12 και 6.26).



Π Α Ρ Α Γ Ρ Α Φ Ο Σ 6

ΤΑ ΑΞΙΩΜΑΤΑ ΤΟΥ HILBERT ΓΙΑ ΤΙΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΕΣ ΤΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ

Γενικά για την αξιωματική θεμελίωση των Γεωμετριών

6.1. Οι τελευταίες δεκαετίες του περασμένου αιώνα και οι πρώτες του αιώνα μας αποδείχτηκαν καίριες **και** όσον αφορά στο εννοιολογικό υπόβαθρο των σύγχρονων Μαθηματικών **και** όσον αφορά στη σταδιακή οικοδόμηση των αποτελεσματικών μεθόδων τους. Τότε ακριβώς τέθηκαν τα θεμέλια της σύγχρονης άποψης για την "αξιωματικοποίηση" με πρώτη ώριμη εφαρμογή στη Γεωμετρία. Βασική αιτία για την προτεραιότητα αυτή της Γεωμετρίας είναι, βέβαια, το γεγονός ότι προϋπήρχαν τα "Στοιχεία" του Ευκλείδη με την εκπληκτική τους ποιότητα, η οποία είχε ενισχυθεί από την ωριμότητα που συνεπιφέρει ο χρόνος.

Είναι σκόπιμο να υπογραμμισθεί ότι **και** την εποχή του Ευκλείδη **και** την εποχή του Hilbert οι αξιωματικές θεμελιώσεις των Γεωμετριών επηρεάσθηκαν ουσιαστικά από το "φιλοσοφικό κλίμα" και, γενικότερα, την "περιρρέουσα ατμόσφαιρα" της κάθε εποχής. Το γεγονός ότι και τα Μαθηματικά με τη σειρά τους προώθησαν το συνολικό "γίγνεσθαι" της αντίστοιχης εποχής, ενισχύει τη θέση ότι τα Μαθηματικά κατέχουν **σταθερά** μια ιδιαίτερη θέση στο σύνολο των ανθρώπινων ενδιαφερόντων και δραστηριοτήτων.

6.2. Βασικός εκπρόσωπος των γενικών απόψεων, που επέδρασαν καθοριστικά στη συγκεκριμένη παρουσίαση της ύλης στα "Στοιχεία" του Ευκλείδη, ήταν ο Αριστοτέλης (πρβλ. 1.10), που ήταν βαθιά επηρεασμένος από την Πλατωνική Σχολή, αλλά απέρριπτε τον "κόσμο των Ιδεών" του Πλάτωνα. Η αριστοτελική σκέψη περιείχε στοιχεία "ρεαλισμού" και θεωρούσε ότι **τα μαθηματικά αντικείμενα προέρχονται από μια διαδικασία "αφαίρεσης"** και ότι, κατά συνέπεια, δεν είναι αναγκαίο να καταφύγουμε στον "κόσμο των Ιδεών" για να δικαιολογήσουμε την αποδοχή τους.

Τώρα ξέρουμε ότι τα Μαθηματικά ασχολούνται και με έννοιες, που η **"ύπαρξή" τους δεν είναι εξασφαλισμένη** (μια τέτοια έννοια είναι, π.χ., ο "απρόσιτος πληθάριθμος"). Η "κατ' αρχήν" αποδοχή τέτοιων εννοιών διευκολύνεται σήμερα από τις **"προτάσεις μη πληρότητας" του Gödel** (η, έστω και στοιχειώδης, ανάλυση των οποίων υπερβαίνει τους στόχους του βιβλίου αυτού). Την εποχή, όμως, του Αριστοτέλη, όπου πρωτοεμφανίσθηκαν η "Λογική" και η έννοια της "παραγωγικής επιστήμης", τέτοια ωριμότητα δεν αναμενόταν (ας σημειωθεί ότι ο Gödel δημιούργησε γύρω στο 1930!). Έτσι, συνεπής στη "φυσικο-βιολογική" πτυχή της σκέψης του, ο Αριστοτέλης "επίτασσε" την "κατοχύρωση της ύπαρξης" των "γεωμετρικών αντικειμένων", κάτι που ο Ευκλείδης έλαβε πολύ σοβαρά υπόψη του.

Από την άλλη μεριά, η σκέψη του Αριστοτέλη ήταν αρκετά σύγχρονη όσον αφορά την έννοια του "απείρου". Το **"άπειρο"** κατά τον Αριστοτέλη **δεν είναι "πραγματικό"**, αλλά μας απασχολεί **"δυνητικά"**. Το "εν δυνάμει" "άπειρο" **πρέπει** να μας ενδιαφέρει γιατί, π.χ., οι φυσικοί αριθμοί (και η αρίθμηση) υπεισέρχονται σχεδόν παντού και, επειδή δεν τελειώνουν, υποδεικνύουν την **αναγκαιότητα της "δυνητικής ύπαρξης" του "απείρου"**. Η παραδοχή εκ μέρους του Αριστοτέλη ότι "το σύμπαν δεν περιέχει άπειρα αντικείμενα, (και) ο άνθρωπος δεν μπορεί να περατώσει μια άπειρη διαδικασία, για παράδειγμα μια διαδικασία άπειρης αρίθμησης", η παραδοχή, λοιπόν, αυτή (σε συνδυασμό με τη συνολική κοσμοθεωρία του) τον **απέτρεπε να δεχτεί το "πραγματικό άπειρο"**. Σήμερα, όπως είναι γνωστό, στα πλαίσια της "κατά Zermelo-Fraenkel (αξιωματικής θεμελίωσης της) θεωρίας των συνόλων" **γίνεται αποδεκτό** ένα "συνολοθεωρητικό αντικείμενο", που ορίζεται από τις επόμενες δυο απαιτήσεις: περιέχει το 0 και με κάθε στοιχείο του, ν, περιέχει και το ν+1. Πρόκειται για το (άπειρο) σύνολο των φυσικών αριθμών.

6.3. Ο Hilbert είχε **παραπλήσιες** απόψεις με τον Αριστοτέλη όσον αφορά το "άπειρο", για τον οντολογικό χαρακτήρα του οποίου **στρεφόταν προς τη φύση**, σημειώνοντας ότι η δυνατότητα της "άπειρης διαιρετότητας" στο μικρόκοσμο είναι αμφίβολη και οπωσδήποτε, προς το παρόν, δεν μπορεί να διαπιστωθεί. Εξάλλου, οι σύγχρονες θεωρίες θέλουν το σύμπαν "πεπερασμένο". Έτσι, η ύπαρξη "απείρων φυσικών αντικειμένων" (τουλάχιστον) **αμφισβητείται**. Σε κάθε περίπτωση, "η αδυναμία μας για συγκεκριμένο και διακριτό έλεγχο απείρων ολοτήτων τις διαφοροποιεί ουσιαστικά από τις πεπερασμένες". Τέτοιες σκέψεις οδήγησαν τον Hilbert στο να προτείνει ένα **"περατοκρατικό"** ερευνητικό **πρόγραμμα**, που προήλθε **και** από την επιθυμία του να **θεμελιωθούν** μεν αξιωματικά οι μαθηματικές θεωρίες, αλλά παράλληλα να **διαφυλαχτεί** ο κορμός των γνωστών Μαθηματικών.

Το **"περατοκρατικό"** πρέπει να νοηθεί ως εξής: Χωρίς να απορρίψουμε την "ιδέα του απείρου", θα οικοδομούμε τις θεωρίες μας **δίχως να το χρησιμοποιούμε.** Οι διαδικασίες μας θα πρέπει να διακρίνονται για το ότι θα διεκπεραιώνονται κάθε φορά σε **πεπερασμένα βήματα**, στα οποία τα μεγέθη που θα υπεισέρχονται θα είναι "μη άπειρα", παρόλο που **ενδέχεται** "σε δεύτερο πλάνο" να "διαφαίνονται άπειρα αντικείμενα".

Για παράδειγμα, εργαζόμενοι με το γνωστό ορισμό της σύγκλισης ακολουθιών, διαπιστώνουμε τη σύγκλιση μιας ακολουθίας (που έχει **"άπειρους"** όρους), υπολογίζοντας το κατάλληλο **(πεπερασμένο)** $\delta > 0$ για κάθε δεδομένο **(πεπερασμένο)** $\varepsilon > 0$.

* Το πνεύμα αυτό διατρέχει την "αξιωματική θεμελίωση των Γεωμετριών κατά Hilbert", που θα γνωρίσουμε με κάποιες λεπτομέρειες στη συνέχεια (πρβλ. και το τέλος του επιλόγου του προηγούμενου κεφαλαίου). Αργότερα, στο δεύτερο μέρος του βιβλίου αυτού, και ειδικότερα αναπτύσσοντας την "αλγεβροποίηση" της Γεωμετρίας στην 8η παράγραφο, θα δούμε ότι ο Hilbert **αποδεχόταν** τη Θεωρία των Φυσικών Αριθμών (και των πράξεών τους) και, κατ' επέκταση, τις "παράγωγες" θεωρίες (όπως είναι, π.χ., οι θεωρίες των πραγματικών αριθμών, των ρητών κ.λπ.) προκειμένου, από τη μια μεριά, ν' αποδείξει την **"ανεξαρτησία"** των αξιωμάτων του και, από την άλλη, να βρει διέξοδο στην προσπάθειά του να βεβαιωθεί αποδεικτικά ότι το σύστημα των αξιωμάτων του δεν οδηγεί σε **"αντιφάσεις"**.

* Η "ανεξαρτησία των αξιωμάτων" και η "έλλειψη αντιφάσεων" θα μας απασχολήσουν συνοπτικά και αμέσως πιο κάτω. Δεν θα επεκταθούμε, όμως, στα "φιλοσοφικά θέματα" που απορρέουν από τα προηγούμενα, παραπέμποντας, π.χ., στο βιβλίο [6] από τη Βιβλιογραφία της 1ης παραγράφου, από το οποίο χρησιμοποιήθηκαν πιο μπροστά (σε εισαγωγικά) ορισμένα μικρά κομμάτια. Θα σημειώσουμε, ωστόσο, ότι από τα προηγούμενα γίνεται φανερή η **ύπαρξη ενός "φιλοσοφικού υποβάθρου"**, που **υπόκειται στη διαδικαστική μεθοδολογία των μαθηματικών θεωριών** και δεν είναι ευρύτερα γνωστό.

6.4. Βασική θέση του Hilbert ήταν ότι **ένα σύστημα αξιωμάτων για να είναι αποδεκτό πρέπει να ικανοποιεί τις ακόλουθες απαιτήσεις:**

(α) Να μην οδηγεί σε **αντιφάσεις**, δηλαδή να μην είναι δυνατό ν' αποδειχτεί μια "πρόταση" και (ίσως πολύ αργότερα) κάποια άρνησή της. Μια **"πρόταση"** διατυπώνεται αποκλειστικά με όρους, που ενυπάρχουν στ' αξιώματα ή έχουν ήδη κατοχυρωθεί κατά την ανάπτυξη της θεωρίας.

(β) Ν' αποτελείται από **ανεξάρτητα** μεταξύ τους αξιώματα. Να μην είναι, δηλαδή, δυνατό ν' αποδειχτεί κατά την ανάπτυξη της θεωρίας κάποιο αξίωμα ως θεώρημα. Πρόκειται για μια απαίτηση, που στοχεύει στην **"οικονομία"** του συστήματος των αξιωμάτων.

(γ) Να είναι **πλήρες**, με την έννοια ότι: για κάθε "πρόταση", η θεωρία που απορρέει από τα θεωρούμενα αξιώματα είναι (ήδη ή θα είναι κάποτε) σε θέση να κατοχυρώσει αποδεικτικά είτε την ισχύ της υπόψη "πρότασης" είτε την ισχύ της άρνησής της.

Η ανάλυση των τριών προηγούμενων απαιτήσεων του Hilbert θα μπορούσε ν' αποτελέσει το περιεχόμενο (τουλάχιστο) μιας Μονογραφίας. Εδώ θα περιοριστούμε στις παρατηρήσεις που ακολουθούν και στα διευκρινιστικά παραδείγματα του 6.5.

6.4.1. Για το (α). Εκτός του ότι τα Μαθηματικά ασχολούνται μόνο με συστήματα αξιωμάτων που δεν οδηγούν σε αντιφάσεις, **η απαίτηση αυτή λειτουργεί και στην εξής κατεύθυνση:** Ας υποθέσουμε ότι δεν γνωρίζουμε αν ένα σύστημα αξιωμάτων οδηγεί ή όχι σε αντιφάσεις. Ας υποθέσουμε, επίσης, ότι αποδεικνύουμε μια "πρόταση", Π, με τη μέθοδο της **"απαγωγής" σε άτοπο"** (όπως θα κάνουμε συχνά στη συνέχεια). Αυτό σημαίνει ότι αποδεικνύουμε ότι η "άρνηση της **Π" οδηγεί** σε **αντίφαση στα πλαίσια της θεωρίας που οικοδομούμε πάνω στα υπόψη αξιώματα.** Έστω, τέλος, ότι αποδεχόμαστε την **"αρχή της απόκλεισης του τρίτου"**, που σημαίνει ότι κάθε "πρόταση" **είτε** ισχύει **είτε** όχι και δεν υπάρχει "τρίτη" περίπτωση. Με αυτά δεδομένα, δεν μπορούμε να συμπεράνουμε ότι ισχύει η Π, εκτός αν αποδείξουμε ότι η Π δεν οδηγεί σε αντιφάσεις! Από τα προηγούμενα συνάγεται ότι η "απαγωγή σε άτοπο" δίνει **α**μέσως αποδεκτά συμπεράσματα, μόνο αν δεν **υπάρχει αμφιβολία** ότι η υπό ανάπτυξη θεωρία είναι απαλλαγμένη αντιφάσεων.

Το ερώτημα που ανακύπτει είναι: **αν και πώς είναι δυνατό ν' αποδειχτεί ότι ακόμα και στο μέλλον δεν πρόκειται να προκύψουν αντιφάσεις.** Εννοείται ότι, σύμφωνα με τις απόψεις του Hilbert, οι αποδείξεις πρέπει να διεκπεραιωθούν με "περατοκρατικές" διαδικασίες. Την απάντηση στο ερώτημα αυτό έδωσε ο Gödel, αποδεικνύοντας ότι: **στα πλαίσια της "κατά Peano αριθμητικής"**, που αντιστοιχεί στην **αξιωματικά θεμελιωμένη** θεωρία των Ακεραίων (και των πράξεών τους) και έχει **αριθμήσιμο** πλήθος συμβόλων, **δεν είναι δυνατό ν' αποδειχτεί ότι η θεωρία αυτή δεν οδηγεί σε αντιφάσεις.** Το ίδιο ισχύει και για κάθε θεωρία με (τουλάχιστο) αριθμήσιμο πλήθος συμβόλων. Έτσι, οι προθέσεις του Hilbert για συστήματα αξιωμάτων, που οδηγούν σε θεωρίες με περατοκρατικές διαδικασίες και με αποδείξιμη τη "μη αντιφατικότητα" (στα πλαίσια της αντίστοιχης θεωρίας) **δεν δικαιώθηκαν** για "μη πεπερασμένες" θεωρίες.

6.4.2. Για το (β). Στο (β) διασυνδέσαμε την **"ανεξαρτησία"** των αξιωμάτων με την **"οικονομία"** του συστήματός τους. Η διασύνδεση αυτή δεν είναι και τόσο απόλυτη, όσο φαντάζει με την πρώτη ματιά. Για παράδειγμα: Με την υπόθεση ότι η "κατά Peano αριθμητική" δεν οδηγεί σε αντιφάσεις, μπορούμε ν' αποδείξουμε ότι τα (χωρίς ελλείψεις) αξιώματα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας του Επιπέδου είναι **ανεξάρτητα** μεταξύ τους. Παρ' όλα αυτά, **υπάρχει ένα "πιό οικονομικό"** σύστημα αξιωμάτων, που οικοδομεί την **ίδια** Ευκλείδεια Γεωμετρία. Ένα τέτοιο σύστημα είναι, π.χ., εκείνο στο οποίο, αντί για το "αξίωμα των παραλλήλων" με την συνηθισμένη διατύπωση (:"από **κάθε** σημείο εκτός **κάθε** ευθείας περνάει ακριβώς μια παράλληλή της"), θεωρείται το εξής **σαφώς ασθενέστερο** αξίωμα: "υπάρχουν **ένα** σημείο και **μια** ευθεία που δεν το περιέχει έτσι, ώστε από το σημείο να περνάει ακριβώς μια παράλληλη προς την ευθεία". Από το τελευταίο αξίωμα και τα υπόλοιπα αξιώματα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας του Επιπέδου **αποδεικνύεται ως πρόταση** ότι από κάθε σημείο εκτός (κάθε) ευθείας περνάει ακριβώς μια παράλληλη προς την ευθεία.

Στην πράξη, και κυρίως κατά την παρουσίαση αξιωματικά θεμελιωμένων και αποδεικτικά οικοδομούμενων θεωριών, δεν επιδιώκεται η "έσχατη οικονομία", γιατί η επιδίωξη της "οικονομίας" έχει συνήθως ως συνέπεια μια "αργή" και "εκτεταμένη" ανάπτυξη της αντίστοιχης θεωρίας. Για το λόγο αυτό, **δεν θα επιδιώξουμε στη συνέχεια την "κατά το δυνατό πιο οικονομική" διατύπωση των αξιωμάτων του Hilbert, μολονότι θα μείνουμε πιστοί στο πνεύμα τους.**

6.4.3. Για το (γ). Και η απαίτηση της "πληρότητας" κατά Hilbert "έπεσε θύμα" των προτάσεων "μη πληρότητας" του Gödel, ο οποίος διατύπωσε μια "πρόταση" στα πλαίσια της "κατά Peano αριθμητικής" με την ιδιότητα **ούτε η "πρόταση" αυτή ούτε η άρνησή της ν' αποδεικνύονται κατά την ανάπτυξη της θεωρίας αυτής!**

Οι προτάσεις του Gödel απέδειξαν ως λανθασμένη την άποψη (της δεκαετίας του 1920), σύμφωνα με την οποία έπρεπε να επιδιωχθεί η ανάπτυξη **"κατηγορικών"** θεωριών, δηλαδή θεωριών, όλα τα μοντέλα των οποίων είναι "ισόμορφα" μεταξύ τους (:υπάρχει **ακριβώς ένα** μοντέλο, στο οποίο ισχύουν οι προτάσεις της αντίστοιχης αξιωματικά θεμελιωμένης θεωρίας). Η άποψη αυτή είναι λανθασμένη γιατί, αν **Π**, είναι μια "πρόταση" κάποιας θεωρίας, που ούτε αυτή ούτε η άρνησή της αποδεικνύεται στα πλαίσια της υπόψη θεωρίας, τότε (σύμφωνα με το θεώρημα "πληρότητας" του Gödel) υπάρχει κάποιο μοντέλο, στο οποίο ικανοποιούνται τ' αξιώματα της θεωρίας και η **Π**, και **κάποιο άλλο**, όπου πληρούνται τ' αξιώματα της θεωρίας και μια άρνηση της **Π**.

Κλείνοντας το εδάφιο αυτό θα σημειώσουμε ότι, όπως αποδείχτηκε τελικά, το "5ο αίτημα" του Ευκλείδη είναι μια "πρόταση" όπως η προηγούμενη **Π** όσον αφορά στη θεωρία που αναπτύσσεται με βάση τα υπόλοιπα αξιώματα της Επίπεδης Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Σε επόμενες παραγράφους (του 2ου Μέρους του βιβλίου αυτού) θα μελετήσουμε μοντέλα τόσο της Ευκλείδειας Γεωμετρίας (όπου ισχύει το "5ο αίτημα"), όσο και της Υπερβολικής Γεωμετρίας (όπου δεν ισχύει).

6.5. Παράδειγμα. Όλα όσα προηγήθηκαν είναι αρκετά αφηρημένα. Είναι, λοιπόν, σκόπιμο να διευκρινίσουμε κάπως μερικά απ' όσα θίξαμε πιο μπροστά, αναλύοντας ένα συγκεκριμένο παράδειγμα μιας απλής θεωρίας.

Η θεωρία αυτή βασίζεται σ' ένα (μη κενό) σύνολο **"σημείων"**, Σ, και σ' ένα (επίσης μη κενό) σύνολο **"ευθειών"**, **Ε**. Υποθέτουμε ότι ένα υποσύνολο του **Σ×Ε** ορίζει μια **"σχέση σύμπτωσης"** ανάμεσα στα "σημεία" και τις "ευθείες". Αν το (A,x) ανήκει στο σύνολο αυτό, θα λέμε ότι το "σημείο" A **"ανήκει"** στην "ευθεία" x. Αυτό θα το συμβολίζουμε με Acx. Τέλος, υποθέτουμε ότι ισχύουν τ' ακόλουθα τρία αξιώματα:

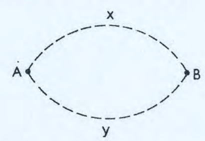
(1) Αν A,B∈Σ με A≠B, υπάρχει **ακριβώς ένα** x∈E με Acx, Bcx (:δυο διαφορετικά "σημεία" ορίζουν μονοσήμαντα μια "ευθεία").

(2) Αν x∈**E**, υπάρχουν A,B∈Σ με A≠B και Acx, Bcx (:σε κάθε "ευθεία" "ανήκουν" δυο τουλάχιστο διαφορετικά "σημεία").

(3) Αν A∈Σ, υπάρχουν x,y∈E με x≠y και Acx, Acy (:κάθε "σημείο" "ανήκει" σε δυο τουλάχιστο διαφορετικές "ευθείες").

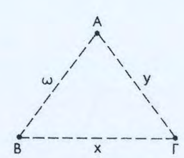
Ας υποθέσουμε ότι η θεωρία που στηρίζεται στις προηγούμενες παραδοχές δεν οδηγεί σε αντιφάσεις (πρβλ. 6.4.1.). Η **γενική μέθοδος** που έχουμε στη διαθεσή μας **για ν' αποδεικνύουμε την "ανεξαρτησία αξιωμάτων"** συνίσταται στα εξής: Δημιουργούμε ένα μοντέλο (στην περίπτωση που μας απασχολεί εδώ, επιλέγοντας κατάλληλα τα σύνολα **Σ**, **E** και τη σχέση "c"), που είναι ή **"μπορούμε να το υποθέσουμε" απαλλαγμένο "αντιφάσεων"**, στο οποίο να ισχύουν τα υπόλοιπα αξιώματα που θεωρούμε εκτός από ένα. Αν το κατορθώσουμε αυτό, συμπεραίνουμε ότι το αξίωμα αυτό είναι "ανεξάρτητο" από τα υπόλοιπα. Το συμπέρασμα στηρίζεται στο συλλογισμό ότι: αν το υπόψη αξίωμα αποδεικνυόταν από τα υπόλοιπα, τότε θα έπρεπε να ισχύει **σε κάθε θεωρία** (άρα και στο αντίστοιχο μοντέλο), που οικοδομούν τα υπόλοιπα αξιώματα.

Πιο συγκεκριμένα, για να βεβαιωθούμε ότι **το αξίωμα (1) είναι "ανεξάρτητο" από τα (2) και (3)** (πρβλ. 6.4.2), θεωρούμε το "πεπερασμένο" μοντέλο (που υποδεικνύεται στο σχήμα) με $\Sigma=\{A,B\}$ και $E=\{x,y\}$, όπου $x=\{A,B\}$ και $y=\{A,B\}$, ενώ το "ανήκει" είναι το συνολοθεωρητικό, δηλαδή $A\subset x \Longleftrightarrow A\in x$. Στο μοντέλο αυτό (όπου οι δυο "ευθείες" θεωρούνται διάφορες, ως στοιχεία του Ε, μολονότι "περιέχουν" τα ίδια σημεία) ικανοποιούνται, προφανώς, τ'αξιώματα (2) και (3) αλλά όχι το (1). Αν, λοιπόν, δεχτούμε ότι η θεωρία που αναπτύσσεται με βάση το μοντέλο αυτό (που είναι ιδιαίτερα απλό) δεν οδηγεί σε "αντιφάσεις", συμπεραίνουμε ότι το αξίωμα (1) είναι "ανεξάρτητο" από τα υπόλοιπα.



Ανάλογα αποδεικνύεται η "ανεξαρτησία" των δυο άλλων αξιωμάτων.

Είναι εύκολο να δούμε ότι η θεωρία που προκύπτει από τα προηγούμενα αξιώματα δεν **είναι "κατηγορική"** (πρβλ. 6.4.3): Ένα μοντέλο όπου ικανοποιούνται τ' αξιώματα αυτά αποτελεί η γνωστή μας Επίπεδη Ευκλείδεια Γεωμετρία. Ένα δεύτερο μοντέλο υποδεικνύεται στο δίπλα σχήμα. Σ' αυτό έχουμε $\Sigma=\{A,B,\Gamma\}$, $E=\{x,y,\omega\}$, όπου $x=\{B,\Gamma\}$, $y=\{A,\Gamma\}$ και $\omega=\{A,B\}$, ενώ



το "ανήκει" (όπως και προηγουμένως) είναι το συνολοθεωρητικό. Όπως και πριν, υποθέτουμε ότι η θεωρία του μοντέλου αυτού δεν οδηγεί σε "αντιφάσεις".

Το ότι η θεωρία αυτή **δεν είναι "πλήρης"** (πρβλ. 6.4.3) διαπιστώνεται ως εξής: στο αμέσως προηγούμενο μοντέλο (πρβλ. το σχήμα) δεν ισχύει το "αξίωμα των παραλλήλων" (:από το Α, που δεν ανήκει στην "ευθεία" x, δεν περνάει καμιά "ευθεία παράλληλη" στην x αφού οι y και ω έχουν κοινά "σημεία" μ' αυτήν). Αντίθετα, στην "Επίπεδη Ευκλείδεια Γεωμετρία" ισχύει το "αξίωμα των παραλλήλων" (:ως **"παράλληλες"** θεωρούνται δυο "ευθείες" χωρίς κοινά "σημεία"). Ας θεωρήσουμε, τώρα, ως "πρόταση" το "αξίωμα των παραλλήλων" με τη διατύπωση "από σημείο εκτός ευθείας περνάει ακριβώς μια παράλληλή της". Αν η **"πρόταση" αυτή αποδεικνυόταν στη θεωρία που αναπτύσσεται από τα προηγούμενα τρία αξιώματα, τότε δεν θα έπρεπε να υπάρχει μοντέλο της θεωρίας, στο οποίο να ισχύει μια άρνηση της "πρότασης" αυτής** (:δεν υπάρχουν "παράλληλες"). Αλλά, ένα τέτοιο μοντέλο υποδεικνύει το προηγούμενο σχήμα. Επομένως, η "πρόταση" αυτή δεν ισχύει στα πλαίσια της θεωρίας των αξιωμάτων (1), (2) και (3), η οποία, επομένως, δεν είναι "πλήρης".

Παρατήρηση. Για να φανεί, έστω και δειγματοληπτικά, **πόσο αποφασιστικά μπορεί να μειωθεί η εμβέλεια μιας θεωρίας από μια "ανελαστική" διατύπωση των αξιωμάτων**, θα προσθέσουμε και το επόμενο παράδειγμα:

Έστω $\Sigma\neq\emptyset\neq E$ και έστω ότι το "σημείο" $A\in\Sigma$ "ανήκει" στην "ευθεία" $x\in E$, αν ανήκει συνολοθεωρητικά. Υποθέτουμε ότι ισχύουν τα επόμενα τρία αξιώματα:

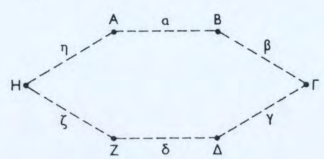
– Για κάθε $x \in E$ υπάρχουν **ακριβώς** 2 διάφορα "σημεία" A,B με $A \in x$, $B \in x$.

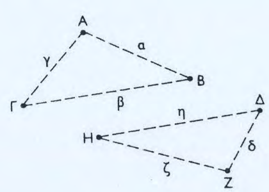
– Για κάθε $A \in \Sigma$ υπάρχουν **ακριβώς** 2 διάφορες "ευθείες" x,y με $A \in x$, $A \in y$.

– Σε κάθε $x \in E$ αντιστοιχούν **ακριβώς** 3 "παράλληλες" ευθείες.

Δεν είναι δύσκολο ν' αποδειχτεί ότι στ' αξιώματα αυτά αντιστοιχούν **ακριβώς** δυο θεωρίες, τα **μοναδικά** ("μη ισόμορφα") μοντέλα των οποίων υποδεικνύονται στ' ακόλουθα σχήματα, όπου

$$\Sigma = \{A,B,\Gamma,\Delta,Z,H,\} \text{ και } E = \{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\zeta,\eta\}:$$





Προλεγόμενα για την αξιωματική θεμελίωση του Hilbert

6.6. Ο **Hilbert** (1862-1943) θεωρείται εκπρόσωπος μιας από τις τρεις τάσεις της **Σχολής των Φορμαλιστών** και ένας από τους πιο σημαντικούς μαθηματικούς των νεότερων χρόνων. Στο "φορμαλισμό" του Hilbert (και κυρίως στην αρχή της αξιωματικής θεμελίωσής του για την Ευκλείδεια Γεωμετρία) διακρίνονται στοιχεία **"ενόρασης"** (:intuition). Έτσι, προσέγγιζε την αξιωματική θεμελίωση της Γεωμετρίας με πνεύμα ανάλογο μ' εκείνο του Ευκλείδη.

Σ' αντίθεση με τους αρχαίους, ο **Hilbert** δεν **έκανε καμιά προσπάθεια να ορίσει (έστω και έμμεσα)** τις **πρωταρχικές έννοιες** "σημείο", "ευθεία" κ.λπ. Άλλωστε, και ο Ευκλείδης δεν χρησιμοποιεί πουθενά στα "Στοιχεία" τους έμμεσους (και από μαθηματική άποψη μη ικανοποιητικούς) ορισμούς που έδωσε για τις έννοιες αυτές. Ο "φορμαλισμός" του Hilbert δεν **προϋποθέτει την "οντολογική" ανάλυση** των θεμελιακών εννοιών και, το κυριότερο, **απορρίπτει κατηγορηματικά την "εποπτεία"**. Όπως θα δούμε στη συνέχεια, υπάρχουν μοντέλα όπου ικανοποιούνται οι διάφορες ομάδες αξιωμάτων του Hilbert, στα οποία **οι έννοιες "σημείο" και "ευθεία" απέχουν πολύ από τις αντίστοιχες συνήθεις έννοιες**. Η κατ' αρχήν αποδοχή αυτής της άποψης του Hilbert αποτελεί βασική προϋπόθεση για την εξοικείωση με τις αποδεικτικές διαδικασίες, που θ' ακολουθήσουν.

Το σύστημα αξιωμάτων του Hilbert (κυρίως όσον αφορά στην "οικονομία" του) βελτιώθηκε διαδοχικά και από τον ίδιο και από άλλους ερευνητές. Η περίοδος από το 1899 (οπότε ο Hilbert **πρωτοπαρουσίασε** τ' αξιώματά του) μέχρι το 1920 θεωρείται η πιο γόνιμη στην κατεύθυνση αυτή. Στη συνέχεια **θα παρουσιάσουμε μια σχετικά ώριμη μορφή της κατά** Hilbert **αξιωματικής θεμελίωσης της Γεωμετρίας**, που αντιστοιχεί στην **11η έκδοση** του κλασικού πια **βιβλίου "Grundlagen der Geometrie"**, του Hilbert (με ενδιαφέρουσες συμπληρώσεις από τον **Bernays**).

Όπως σημειώσαμε ήδη, μολονότι η ανάπτυξη της αξιωματικής θεμελίωσης της Γεωμετρίας θα γίνει στο "πνεύμα" του βιβλίου αυτού του Hilbert, **δεν θα μείνουμε πιστοί στο "γράμμα" του, ώστε να μην εκταθεί πολύ το κείμενο.**

6.7. Συγκρίνοντας την αξιωματική θεμελίωση του Hilbert μ' εκείνη του Ευκλείδη, διαπιστώνουμε **ουσιαστικές διαφορές, δευτερεύ-**

ουσες (αλλά απαραίτητες) **βελτιώσεις** και **κρίσιμες προσθήκες** όσον αφορά στην έννοια "αξιωματική θεμελίωση" και στη συνακόλουθη πρακτική.

* Στις ουσιαστικές διαφορές υπάγονται **η ρητή αναγνώριση του ρόλου του "αξιώματος του Αρχιμήδη"** για την ανάπτυξη της **Ευκλείδειας Γεωμετρίας** και η, επίσης ρητή, **υπογράμμιση της λειτουργικότητας της έννοιας του "μεταξύ" σε κάθε "ευθεία" και σε κάθε "επίπεδο"** (πρβλ. τον Επίλογο της προηγούμενης παραγράφου).

* Ως δευτερεύουσες, αλλά απαραίτητες, βελτιώσεις θα μπορούσαν να θεωρηθούν: η **προσεκτική εισαγωγή των εννοιών "ευθύγραμμο τμήμα" και "γωνία"** καθώς, επίσης, και η **αξιωματική θεσμοθέτηση της "μεταφοράς" ευθυγράμμων τμημάτων και γωνιών**. Η μη κατοχύρωση της "μεταφοράς" ευθυγράμμων τμημάτων και γωνιών αποτελεί ένα από τα βασικά μειονεκτήματα των "Στοιχείων" (πρβλ. 2.7.).

* Τέλος, οι κρίσιμες προσθήκες αναφέρονται στις νεότερες απόψεις για την αξιωματική θεμελίωση. Πιο συγκεκριμένα, αναφέρονται σε θέματα "ανεξαρτησίας" των αξιωμάτων, σε θέματα **"πληρότητας"** της θεωρίας που οικοδομείται πάνω στ' αξιώματα αυτά και σε θέματα που σχετίζονται με το βασικό ερώτημα αν η θεωρία αυτή οδηγεί ή όχι σε **"αντιφάσεις"** (πρβλ. 6.4). Τέτοια θέματα **και η συμβολή του Hilbert σ' αυτά** θα μας απασχολήσουν στο επόμενο κεφάλαιο, όπου θ' αναλύσουμε την "αλγεβροποίηση" της Γεωμετρίας (:η μετάθεση γίνεται για λόγους **μεθοδολογικής** συνοχής κατά την παρουσίαση της ύλης).

6.8. Κατά τη συστηματική ανάπτυξη της θεωρίας του ο Hilbert διέκρινε **5 ομάδες αξιωμάτων** για την "Επίπεδη Ευκλείδεια Γεωμετρία",

στην οποία (λόγω έλλειψης χώρου) θα περιορισθούμε. Οι ομάδες αυτές είναι οι επόμενες:

(I). **Αξιώματα της "σύμπτωσης"** (Verknüpfung, incidence). Στην ομάδα αυτή υπάγονται 8 αξιώματα, τα 3 από τα οποία αναφέρονται στην "Επίπεδη Γεωμετρία" (πρβλ. 6.10) που μας ενδιαφέρει (τα υπόλοιπα αναφέρονται στη "Γεωμετρία του Χώρου"). Αντικείμενο των αξιωμάτων αυτών είναι οι έννοιες που σχετίζονται με τη "σύμπτωση ενός σημείου και μιας ευθείας", δηλαδή οι έννοιες που διευκρινίζουν τι σημαίνει η φράση "ένα σημείο ανήκει σε μια ευθεία" και επιτρέπουν απαντήσεις στο ερώτημα κατά πόσον οι σχέσεις "σύμπτωσης" καθορίζουν τα "σημεία" ή τις "ευθείες".

(II). **Αξιώματα του "μεταξύ"** (Anordnung, betweenness). Η ομάδα αυτή (πρβλ. 6.12) συνίσταται από 3 αξιώματα, που αναφέρονται στην έννοια του "μεταξύ για συνευθειακά σημεία" και από 1 αξίωμα (:το "αξίωμα του Pasch", πρβλ. και 5.6), που θα μπορούσε να θεωρηθεί ότι διέπει την έννοια του "μεταξύ στο επίπεδο" (πρβλ. 6.20, 6.21 και 6.22).

(III). **Αξιώματα της "συμφωνίας"** (Kongruenz, congruence). Η "συμφωνία" αντιστοιχεί στην "ισότητα" με την ευρεία έννοια του όρου (:δεν περιορίζεται, δηλαδή, στην "ταυτότητα"). Η ομάδα αυτή περιλαμβάνει 5 αξιώματα (πρβλ. 6.26.1-6.28.1), στα οποία κατοχυρώνεται η "μεταφορά ευθύγραμμων τμημάτων και γωνιών" και η "ισότητα τριγώνων" (κατά τρόπο που παραπέμπει στα "Στοιχεία" του Ευκλείδη).

(IV). **Αξιώματα της "συνέχειας"** (Stetigkeit, continuity). Τα 2 αξιώματα της ομάδας αυτής, (πρβλ. 6.39), είναι: το "αξίωμα Ευδόξου-**Αρχιμήδη**" και το "**αξίωμα της γραμμικής πληρότητας**" (που στοχεύει αποκλειστικά στο να αναδείξει ως "κατηγορική", πρβλ. 6.4.3, την "Ευκλείδεια Γεωμετρία του Χώρου").

(V). **Αξίωμα των παραλλήλων (ή "Ευκλείδειο αξίωμα")**, που διατυπώνεται από τον Hilbert ως εξής: **Έστω ένα (τυχαίο) σημείο εκτός μιας (τυχαίας) ευθείας. Τότε, στο επίπεδο που ορίζουν υπάρχει το πολύ μια ευθεία, που περνάει από το σημείο και δεν τέμνει την (αρχική) ευθεία**, (πρβλ. παραγρ. 7).

6.9. Πριν αρχίσουμε τη συστηματική ανάπτυξη της "Επίπεδης Ευκλείδειας Γεωμετρίας" σύμφωνα με τις απόψεις του Hilbert, είναι σκόπιμο να κάνουμε τις ακόλουθες παρατηρήσεις:

(α) Θα ήταν παράλειψη να μην αναφερθεί ότι η συμβολή του Pasch κατά το τελικό στάδιο προς την αξιωματική θεμελίωση του Hilbert ήταν σημαντική. Ιδιαίτερα πρέπει να τονισθεί η συμβολή του στ' αξιώματα του "μεταξύ".

(β) Θα παρουσιάσουμε τις 5 ομάδες των αξιωμάτων του Hilbert και τις συνέπειές τους με τη σειρά που αναφέρονται οι ομάδες αυτές στο 6.8. Ο λόγος είναι ότι στις 4 πρώτες ομάδες (εκτός από το, έτσι κι αλλιώς, δευτερεύον "αξίωμα της γραμμικής πληρότητας") οικοδομείται αποδεικτικά η λεγόμενη "**Απόλυτη ή Ουδέτερη Γεωμετρία**", η οποία, κατά συνέπεια, περιέχει τις έννοιες και τις προτάσεις που είναι **κοινές στην "Ευκλείδεια" και την "Υπερβολική Γεωμετρία"** (αλλά **δεν ισχύουν** ενδεχομένως στην "Ελλειπτική", πρβλ. 5.4.).

(Ο όρος "απόλυτη" (absolute) εισήχθη από τον J. Bolyai και ο όρος "ουδέτερη" (neutral) από τους Prenowitz και Jordan.) Όπως θα δούμε, η "**Ουδέτερη Γεωμετρία**" επεκτείνεται στην "Ευκλείδεια" ή την "Υπερβολική" **ανάλογα με το αν θα εμπλουτίσουμε τ' αξιώματά της, επισυνάπτοντας το "αξίωμα των παραλλήλων" ή το "υπερβολικό αξίωμα"**, σύμφωνα με το οποίο: από σημείο εκτός ευθείας (στο "επίπεδο") άγονται **περισσότερες της μιας** "παράλληλες" της (στην "Ελλειπτική Γεωμετρία" δεν άγεται **καμιά** "παράλληλή" της).

(γ) Επαναλαμβάνουμε ότι, αν και ο Hilbert ανάπτυξε τη θεωρία του για την "Ευκλείδεια Γεωμετρία του Χώρου", στη συνέχεια (για να μην εκταθεί το κείμενο) **θα περιορισθούμε σε "Γεωμετρίες του Επιπέδου"**.

<u>Τα αξιώματα της "σύμπτωσης"</u>

6.10. Τ' αξιώματα του Hilbert (για το "επίπεδο") αναφέρονται σ' ένα (μη κενό) σύνολο, Σ, **σημείων**, που θα τα συμβολίζουμε με **κεφαλαία** γράμματα, και σ' ένα (μη κενό) σύνολο, Ε, **ευθειών**, που θα τις συμβολίζουμε με **πεζά** γράμματα. Το σύνολο των σημείων είναι το θεωρούμενο "**επίπεδο**". Οι έννοιες "σημείο", "ευθεία" και "επίπεδο" **δεν διευκρινίζονται καθόλου** και, έτσι, **δεν είναι απαραίτητο να έχουν οποιαδήποτε "οντολογική" έννοια**. Αυτό, ανάμεσα στ' άλλα, σημαίνει ότι, **όταν κατά την ανάπτυξη της θεωρίας θ' αναφερόμαστε σε κάποιο σχήμα, αυτό θα γίνεται απλώς για να διευκολυνθούμε στην κατανόηση των συλλογισμών** και όχι διότι τα σημεία και οι ευθείες (που θα τα γράφουμε χωρίς εισαγωγικά) έχουν τη συνηθισμένη "εποπτική" έννοια (εκτός από ορισμένα παραδείγματα).

Θεωρούμε ότι ανάμεσα στα σημεία και τις ευθείες ορίζεται μια σχέση "**σύμπτωσης**", που θα τη συμβολίζουμε με "c". Γράφοντας

A∈x θα εννοούμε ότι "το σημείο A **ανήκει** στην ευθεία x" ή ότι "η ευθεία x **περνάει** από το σημείο A ή το **περιέχει**" ή ότι "το A είναι σημείο της x". Όταν θ' αναφερόμαστε σε "ν σημεία" ή σε "ν ευθείες" για ν>1, θα εννοούμε ότι πρόκειται για δυο **διαφορετικά** στοιχεία του αντίστοιχου συνόλου. Όπως φαίνεται και από το συμβολισμό, το **"ανήκει" δεν είναι απαραίτητο να έχει τη συνολοθεωρητική** έννοια.

Επιπλέον, υποθέτουμε ότι ισχύουν τ' ακόλουθα **"αξιώματα σύμπτωσης"**:

I(1): Για κάθε δυο (διαφορετικά) σημεία υπάρχει **ακριβώς** μια ευθεία, που τα περιέχει.

(Το αξίωμα αυτό αντιστοιχεί σε **2** αξιώματα του Hilbert, το πρώτο από τα οποία εξασφαλίζει την **ύπαρξη** και το δεύτερο το **μονοσήμαντο** της ευθείας.)

I(2): Κάθε ευθεία περιέχει **δυο τουλάχιστο** σημεία. Υπάρχουν **τουλάχιστο τρία** σημεία **μη συνευθειακά** (:που δεν ανήκουν στην ίδια ευθεία).

Άμεσες συνέπειες των αξιωμάτων αυτών είναι οι επόμενες:

6.10.1. Δυο (διαφορετικές) ευθείες έχουν **το πολύ ένα** σημείο **κοινό** (:που ανήκει και στις δυο). Αν δυο ευθείες έχουν κοινό σημείο, θα λέμε ότι **τέμνονται** σ' αυτό.

Για την απόδειξη αρκεί να λάβουμε υπόψη μας το I(1) και να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της "απαγωγής σε άτοπο" (πρβλ. 6.4.1).

6.10.2. Για κάθε ευθεία υπάρχει **ένα τουλάχιστο** σημείο, που δεν

ανήκει σ' αυτήν.

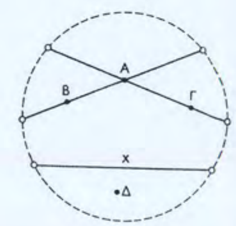
Απόδειξη: Ένα τουλάχιστον από τα μη συνευθειακά σημεία, που υπάρχουν σύμφωνα με το I(2), δεν ανήκει σε οποιαδήποτε ευθεία και αν θεωρήσουμε.

6.11. **Παραδείγματα.** Ακολουθούν τέσσερα μοντέλα, στα οποία ικανοποιούνται τα προηγούμενα αξιώματα. Κυρίως από το τέταρτο γίνεται φανερό ότι **οι έννοιες "σημείο", "ευθεία" και "επίπεδο" στα πλαίσια των σύγχρονων αξιωματικών θεμελιώσεων της "Γεωμετρίας" αποκτούν ένα ευρύτερο από το "εποπτικό" περιεχόμενο.**

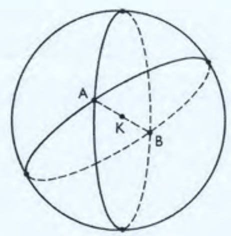
(α) Το μοντέλο των 3 σημείων της σελίδας 134.

(β) Το επίπεδο της Ευκλείδειας Γεωμετρίας με τις (συνηθισμένες) ευθείες του.

(γ) Ως επίπεδο θεωρούμε το εσωτερικό του κύκλου του δίπλα σχήματος και ως ευθείες τις χορδές του (χωρίς τα σημεία τους επί της περιφέρειας). Το "ανήκει" είναι το συνολοθεωρητικό. Στο μοντέλο αυτό **δεν ισχύει** το **"αξίωμα των παραλλήλων"**: από το σημείο A, που δεν ανήκει στην ευθεία x, περνάνε περισσότερες από μια "παράλληλες" προς την x (:χωρίς κοινά σημεία μ' αυτήν), δυο από τις οποίες υποδεικνύονται στο σχήμα. Επίσης, στο μοντέλο αυτό **δεν υπάρχει ευθεία** που **να περνάει από το Δ και να τέμνει και τις δυο "πλευρές"** της **"γωνίας"** BAΓ (πρβλ. το τελευταίο μέρος του 5.16).



(δ) Ας θεωρήσουμε ως επίπεδο την **επιφάνεια** σφαίρας και ως ευθείες τους **μέγιστους** κύκλους της (:τους κύκλους που είναι τομέ της σφαίρας με επίπεδα που περιέχουν το κέντρο της Κ στο σχήμα). Ως "ανήκει" ας θεωρήσουμε πάλι το συνολοθεωρητικό. Στο μοντέλο αυτό **δεν ισχύει το Ι(1)**: από τα **αντιδιαμετρικά** σημεία Α,Β του σχήματος περνάνε περισσότεροι του ενός μέγιστοι κύκλοι, δυο από τους οποίους έχουν σχεδιασθεί.



Τα προηγούμενα αξιώματα **ικανοποιούνται** στο ακόλουθο μοντέλο, που προκύπτει από το προηγούμενο: Ως σύνολο σημείων, **Σ**, θεωρούμε το σύνολο των **ζευγαριών** (Α,Β), όπου το Α είναι **αντιδιαμετρικό** σημείο του Β στην προηγούμενη σφαίρα. **Μια** ευθεία αντιστοιχεί στο υποσύνολο του **Σ** που αποτελείται απ' όλα τα ζευγάρια αντιδιαμετρικών σημείων **ενός** μέγιστου κύκλου της σφαίρας. Στο μοντέλο που θεωρούμε εδώ το **Ε** είναι το σύνολο των ευθειών που προκύπτουν απ' όλους τους μέγιστους κύκλους με τον προηγούμενο τρόπο. Το "ανήκει" είναι και πάλι το συνολοθεωρητικό. Επειδή **κάθε** δυο διάφοροι μέγιστοι κύκλοι τέμνονται σε δυο αντιδιαμετρικά σημεία, στο μοντέλο αυτό **δεν υπάρχουν "παράλληλες" ευθείες!**

Τα αξιώματα του "μεταξύ"

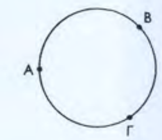
6.12. Αν δοθεί μια **οποιαδήποτε** ευθεία, υποθέτουμε ότι **για κάθε** 3 σημεία της Χ,Υ,Ζ **ορίζεται μια έννοια του "μεταξύ"** (που δεν υπάρχει ανάγκη να διευκρινισθεί παραπέρα, ενώ σε συγκεκριμένα μοντέλα δεν αποκλείεται ν' αντιστοιχεί στη συνηθισμένη έννοια του "μεταξύ"). Η έννοια αυτή υπακούει στα επόμενα αξιώματα:

ΙΙ(1): Το **σύμβολο** Χ-Υ-Ζ σημαίνει ότι τα σημεία Χ,Υ,Ζ είναι **συνευθειακά** και **διαφορετικά** και ότι "το Υ **βρίσκεται μεταξύ** των Χ **και** Ζ". Αν συμβαίνει αυτό, τότε **ισχύει και** Ζ-Υ-Χ (:το Υ βρίσκεται **και** μεταξύ του Ζ και του Χ).

ΙΙ(2): Για **κάθε** δυο σημεία Χ,Υ **υπάρχει ένα τρίτο** Ζ έτσι, ώστε Χ-Υ-Ζ (οπότε το Ζ θ' ανήκει στην ευθεία, που ορίζουν τα Χ,Υ σύμφωνα με το Ι(1)).

ΙΙ(3): Αν δοθούν 3 συνευθειακά (και διαφορετικά) σημεία, **το πολύ** ένα απ' αυτά βρίσκεται μεταξύ των δυο άλλων.

(Το τελευταίο αξίωμα αποκλείει την περίπτωση, που υποδεικνύεται στο δίπλα σχήμα, όπου καθένα από τα σημεία Α,Β,Γ μπορεί να θεωρηθεί **εποπτικά** μεταξύ των δυο άλλων.**)**



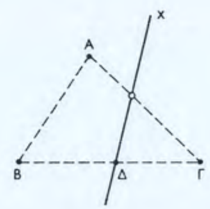
Προκειμένου να διατυπώσουμε το τέταρτο αξίωμα για την έννοια του "μεταξύ" (δηλαδή το "αξίωμα του Pasch"), χρειαζόμαστε τους ορισμούς που ακολουθούν:

6.12.1. Ορισμός. Ένα **ευθύγραμμο τμήμα** με **άκρα** τα (διαφορετικά) σημεία Α και Β αντιστοιχεί στο **όχι διατεταγμένο** ζευγάρι Α,Β και θα **συμβολίζεται** με ΑΒ ή με ΒΑ. Ως **εσωτερικά** σημεία του ΑΒ χαρακτηρίζονται τα σημεία που βρίσκονται μεταξύ των Α και Β (που, κατά συνέπεια, είναι σημεία της ευθείας που ορίζουν μονοσήμαντα τα Α,Β). Τα άκρα και τα εσωτερικά σημεία του ΑΒ θεωρούνται ότι **ανήκουν** στο ευθύγραμμο αυτό τμήμα (που δεν πρέπει να συγχέεται με το σύνολο των σημείων αυτών).

6.12.2. Ορισμός. Τρία **μη συνευθειακά** σημεία Α,Β,Γ ορίζουν το **τρίγωνο ΑΒΓ**. Τα Α,Β,Γ λέγονται **κορυφές** του τριγώνου, ενώ τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ λέγονται **πλευρές** του. (Από το Ι(2) συνάγεται η ύπαρξη ενός τουλάχιστον τριγώνου.)

Με τη βοήθεια των προηγούμενων εννοιών διατυπώνεται το επόμενο αξίωμα, που είναι γνωστό ως **"αξίωμα του Pasch"** και (όπως θα δούμε στη συνέχεια) οδηγεί στην έννοια του "ημιεπιπέδου":

ΙΙ(4): Αν μια ευθεία, x, δεν περιέχει **καμιά** από τις κορυφές ενός τριγώνου, ΑΒΓ, και περνάει από ένα **εσωτερικό** σημείο μιας πλευράς του (το Δ της πλευράς ΒΓ στο δίπλα σχήμα), τότε στην x ανήκει ένα εσωτερικό σημείο **μιας τουλάχιστον** από τις δυο άλλες πλευρές του ΑΒΓ.



Παρατήρηση. Όπως τονίσαμε ήδη, οι προηγούμενες έννοιες, αν και παραπέμπουν σε οικείες από την Ευκλείδεια Γεωμετρία έννοιες, πρέπει να νοούνται "φορμαλιστικά": Το ΑΒ **είναι ένα σύμβολο** για το ευθύγραμμο τμήμα. Το ευθύγραμμο τμήμα **δεν είναι**, εν γένει, το σύνολο των άκρων του και των εσωτερικών του σημείων, όπως η ευθεία **δεν νοείται** ως σύνολο των σημείων της. Αντίστοιχα ισχύουν και για την έννοια τρίγωνο. Επίσης, το προηγούμενο σχήμα διευκολύνει απλώς στην κατανόηση του αξιώματος ΙΙ(4), στη διατύπωση του οποίου οι έννοιες "σημείο" ("κορυφή"), "ευθεία", "ευθύγραμμο τμήμα" ("πλευρά") κ.λπ. υπεισέρχονται με τη "φορμαλιστική" τους (καθαρά συμβολική και μακρυά από την εποπτεία) έννοια.

Τέλος, είναι σκόπιμο να τονισθεί ότι προς το παρόν:

– Δεν ξέρουμε **αν, όταν δοθούν 2 σημεία, υπάρχει** τρίτο που βρίσκεται μεταξύ τους (πρβλ. 6.14).

– Δεν ξέρουμε **αν**, όταν δοθούν 3 σημεία, κάποιο απ' αυτά **βρίσκεται μεταξύ** των δυο άλλων (πρβλ. 6.15). Το ΙΙ(3) μας λέει απλώς ότι, **αν υπάρχει**, θα είναι μοναδικό.

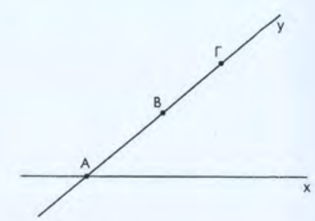
– Δεν είναι σίγουρο ότι η ευθεία x στο αξίωμα ΙΙ(4) δεν τέμνει **και τις δυο** άλλες πλευρές του τριγώνου (πρβλ. 6.16).

Οι απαντήσεις στα ερωτήματα που ανακύπτουν από τα προηγούμενα καθώς, επίσης, και πρώτες πληροφορίες-προτάσεις, που αποδεικνύονται με βάση τ' αξιώματα που έχουμε μέχρι τώρα διατυπώσει, ακολουθούν.

<u>Πρώτες αποδεικτικές διαδικασίες</u>

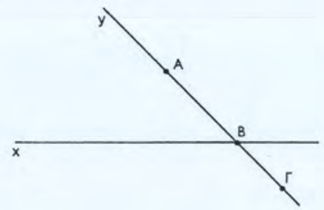
6.13. Θ' αρχίσουμε με την **ανάλυση αποδεικτικών βημάτων**, που θα χρησιμοποιηθούν συχνά στη συνέχεια. Τώρα στην αρχή όλοι οι συλλογισμοί θα στηρίζονται (με παραπομπές) στ' αξιώματα και (ενδεχομένως) τους ορισμούς, που έχουν προηγηθεί. Θα χρησιμοποιούμε το συμβολισμό από το 6.10. Όπως συνήθως, η διαγραφή ενός συμβόλου θα σημαίνει την άρνησή του. Έτσι, "$\not\subset$" σημαίνει "δεν ανήκει".

6.13.1. Αν $A \subset x$, $B \not\subset x$ και Α-Β-Γ (πρβλ. ΙΙ(1)), τότε $\Gamma \not\subset x$.



Απόδειξη με "απαγωγή σε άτοπο" (πρβλ. 6.4.1): Έστω $\Gamma \subset x$. Τότε, αφού $A \neq \Gamma$ (πρβλ. ΙΙ(1)), η ευθεία x και η ευθεία y των Α,Γ (: Α-Β-Γ) θα ταυτίζονταν (πρβλ. Ι(1)), ως στοιχεία του Ε. Επομένως, κάθε σημείο που ανήκει στη μια θ' ανήκει και στην άλλη. Αυτό αντιφάσκει στην υπόθεση $B\notin x$.

6.13.2. Αν $A\notin x$, $B\subset x$ και Α-Β-Γ (οπότε **υπάρχει** $y\in E$ που περιέχει τα Α,Β,Γ), **τότε** $\Gamma\notin x$ **και, επιπλέον, το** Γ **δεν ανήκει σε καμιά ευθεία, διαφορετική από την** y, **που περνάει από το** Α.

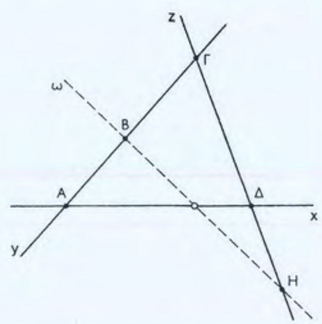


Απόδειξη ανάλογη της προηγούμενης: Επειδή $B\neq\Gamma$ (πρβλ. II(1)), αν $\Gamma\subset x$, οι ευθείες x και y θα ταυτίζονταν (πρβλ. I(1)), που είναι άτοπο, αφού $A\notin x$. Το τελευταίο συμπέρασμα προκύπτει από το I(1) και το ότι $A\neq\Gamma$ (πρβλ. II(1)).

6.13.3. **Έστω ότι η** x **ορίζεται από τα (διαφορετικά) σημεία** Α,Δ. **Επιπλέον, έστω** Α-Β-Γ **με** $B\notin x$ **και** Γ-Δ-Η. **Τότε:**

(α) $B\neq H$, **οπότε ορίζεται μονοσήμαντα η ευθεία** ω **που τα περιέχει.**

(β) **Η** ω **δεν έχει κοινό σημείο με το (ευθύγραμμο τμήμα)** ΓΔ.



(γ) **Η** ω **δεν περιέχει καμιά κορυφή του τριγώνου** ΑΓΔ **(πρβλ. 6.13.1).**

Απόδειξη. (α) Έστω y η ευθεία που υπάρχει εξαιτίας της υπόθεσης Α-Β-Γ (πρβλ. II(1)) και z η ευθεία που υπάρχει εξαιτίας της υπόθεσης Γ-Δ-Η. Αν $y=z$, τότε $\Delta\subset y$ (αφού $\Delta\subset z$), οπότε $y=x$ (αφού $A\subset y$ και $A\neq\Delta$). Αλλά, τότε θα είχαμε $B\subset x$ (αφού $B\subset y$), που είναι άτοπο.

Άρα $y\neq z$. Με αυτό δεδομένο, το τελευταίο συμπέρασμα του 6.13.2 (: $H\notin y$) δίνει $H\neq B$.

(β) Επειδή Γ-Δ-Η, το Η δεν μπορεί να είναι ούτε άκρο (πρβλ. II(1)) ούτε εσωτερικό σημείο του ΓΔ (πρβλ. II(3)). Επομένως, αν Θ είναι ένα κοινό σημείο της ω με το ΓΔ, θα ισχύει $\Theta\neq H$ και (σύμφωνα με το I(1)) $\omega=z$, απ' όπου συνάγεται $B\subset z$ (αφού $B\subset\omega$). Από αυτό και επειδή τα Α,Β,Γ είναι συνευθειακά (πρβλ. II(1)) συμπεραίνουμε ότι τα Α,Β,Δ είναι συνευθειακά (:ανήκουν στην ευθεία $y=z$, αφού $B\neq\Gamma$), που αντιφάσκει στην υπόθεση $B\notin x$. Άρα το ΓΔ και η ω δεν έχουν κοινό σημείο.

(γ) Για ν' αποδείξουμε ότι η ω δεν περιέχει τα Γ και Δ, αρκεί ν' αποδείξουμε ότι το Η είναι το μόνο κοινό σημείο των ευθειών ω και z. Αυτό, όμως, το αποδείξαμε πριν στο (β), καταλήγοντας σε άτοπο με την υπόθεση ότι υπάρχει και ένα δεύτερο κοινό σημείο, Θ, των ω και z. Απομένει, λοιπόν, ν' αποδείξουμε ότι η ω δεν περνάει από το Α: Αν περνάει από το Α, τότε θα ισχύει $\omega=y$ (αφού οι ω και y θα έχουν τα διαφορετικά σημεία Α και Β κοινά), απ' όπου έπεται $\omega=z$ (αφού $\Gamma\subset y$, άρα $\Gamma\subset\omega$, και $\Gamma\neq H$).

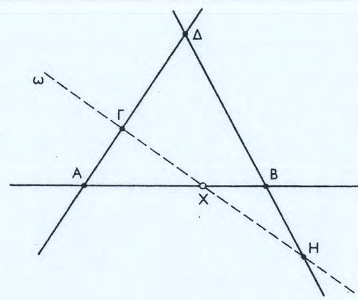
Μετά απ' αυτό καταλήγουμε σε άτοπο, όπως στο τέλος της απόδειξης του (β).

Παρατήρηση. Οι πρώτες αποδεικτικές διαδικασίες σε μια αξιωματικά θεμελιωμένη θεωρία είναι, συνήθως, μακρόσυρτες. Οι προηγούμενες αποδείξεις υπακούουν σ' αυτόν τον κανόνα, μολονότι δεν αναφέρονται σε σημαντικά συμπεράσματα. Ας σημειωθεί ότι οι αποδείξεις των προηγούμενων ισχυρισμών μπορούν να δοθούν και με διαφορετικούς συλλογισμούς.

ΕΙΜΑΙ ΕΔΩ

Συνέπειες των προηγούμενων αξιωμάτων

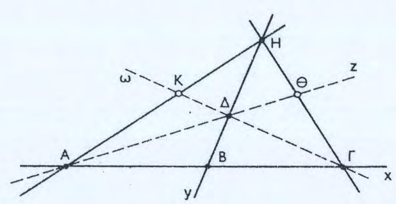
6.14. Για κάθε 2 σημεία Α,Β υπάρχει ένα (τουλάχιστο) τρίτο, Χ, με Α-Χ-Β.



Απόδειξη. Έστω x η ευθεία που **ορίζουν** (σύμφωνα με το Ι(1)) τα Α και Β. **Υπάρχει** κάποιο $Γ \in Σ$ με $Γ \notin x$ (πρβλ. 6.10.2). Το ΙΙ(2) εξασφαλίζει την **ύπαρξη** ενός Δ με Α-Γ-Δ. Ορίζεται, έτσι, το **τρίγωνο** ΑΒΔ (πρβλ.6.13.1.).

Πάλι εξαιτίας του ΙΙ(2) **υπάρχει** Η με Δ-Β-Η, οπότε (σύμφωνα με το 6.13.3) από τα Γ, Η ορίζεται η ευθεία ω, η οποία **δεν περνάει** από καμιά κορυφή του τριγώνου ΑΒΔ, ενώ **περιέχει** το εσωτερικό σημείο Γ της πλευράς του ΑΔ. Επομένως, για το τρίγωνο ΑΒΔ **και την ευθεία ω ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις για την εφαρμογή** του **αξιώματος** ΙΙ(4). Η ευθεία ω, λοιπόν θα **περνάει και** από ένα εσωτερικό σημείο του ΑΒ ή του ΔΒ. Στο 6.13.3(β) αποδείξαμε ότι η ω δεν περιέχει κανένα εσωτερικό σημείο του ΔΒ. Επομένως, **υπάρχει ένα εσωτερικό σημείο**, Χ, του ΑΒ που ανήκει στην ω και είναι το ζητούμενο.

6.15. Αν δοθούν 3 συνευθειακά σημεία, ακριβώς ένα απ' αυτά βρίσκεται μεταξύ των δυο άλλων.



Απόδειξη. Αρκεί ν' αποδείξουμε ότι, αν δοθούν 3 σημεία Α,Β,Γ μιας ευθείας x (πρβλ. το απλώς υποβοηθητικό σχήμα),

τότε κάποιο απ' αυτά βρίσκεται μεταξύ των δυο άλλων (πρβλ. ΙΙ(3)). Θα υποθέσουμε, λοιπόν, ότι ούτε το Α **ούτε** το Γ βρίσκεται μεταξύ των δυο άλλων και θ' αποδείξουμε ότι Α-Β-Γ:

Έστω $Δ \notin x$ (πρβλ. Ι(3)). Τότε $Δ \neq Β$, οπότε τα Δ,Β ορίζουν μια ευθεία y με $y \neq x$. Σύμφωνα με το ΙΙ(2), υπάρχει Η με Β-Δ-Η. Από το 6.13.1 συνάγεται $Η \notin x$. Άρα ορίζεται το τρίγωνο ΒΓΗ. Έστω z η ευθεία που ορίζουν τα Α και Δ ($: Δ \notin x$), οπότε $z \neq x$ και, κατά συνέπεια, η ευθεία z **δεν περιέχει τις κορυφές** Β **και** Γ του **τριγώνου**. Επίσης, **δεν περιέχει ούτε την κορυφή** Η: αν την περιείχε, οι ευθείες y και z θα είχαν κοινά δυο διαφορετικά σημεία (τα Δ και Η) και θα συνέπιπταν, οπότε τα Α,Β,Δ θα ήταν συνευθειακά, που είναι άτοπο. Από την άλλη μεριά, η z **περιέχει** το Δ που είναι ε**σωτερικό σημείο της πλευράς** ΒΗ **του τριγώνου** ΒΓΗ. Έτσι, ικανοποιούνται οι υποθέσεις του αξιώματος ΙΙ(4), οπότε η z θα περνάει από ένα εσωτερικό σημείο, Θ, της πλευράς ΓΗ, αφού δεν μπορεί να περιέχει εσωτερικό σημείο του ΒΓ, επειδή έχουμε υποθέσει ότι το Α δεν βρίσκεται μεταξύ των Β και Γ (πρβλ. και την απόδειξη του 16.3.3(β)).

Επειδή έχουμε υποθέσει ότι **ούτε το** Γ **βρίσκεται μεταξύ των** Α και Β, αποδεικνύεται ανάλογα ότι η ευθεία ω, που ορίζουν τα Γ και Δ, περνάει από ένα εσωτερικό σημείο, Κ, του ΑΗ.

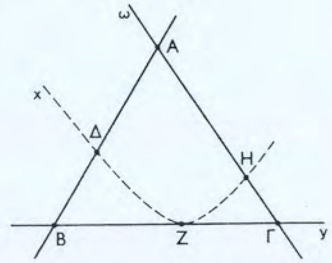
Με αυτό δεδομένο, εφαρμόζοντας το ΙΙ(4) για το τρίγωνο ΑΘΗ (:τα Θ και Η δεν ανήκουν στην x, πρβλ. 16.3.1) και την ευθεία ω, συμπεραίνουμε ότι Α-Δ-Θ (μετά απ' όσα προηγούνται στην απόδειξη αυτή είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι στη συγκεκριμένη περίπτωση ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις για την εφαρμογή του ΙΙ(4)).

Τέλος, επαναλαμβάνοντας την ίδια διαδικασία για το τρίγωνο

ΑΓΘ και την ευθεία y, συμπεραίνουμε ότι το Β είναι εσωτερικό σημείο του ΑΓ (αφού Α-Δ-Θ).

Παρατήρηση. Από την προηγούμενη απόδειξη διαφαίνεται ενδεικτικά η λειτουργικότητα του αξιώματος ("του Pasch") II(4) (πρβλ., π.χ., την αποδεικτική διαδικασία στο 5.10).

6.16. Στο αξίωμα II(4) (πρβλ. 6.12) η ευθεία x περιέχει ένα εσωτερικό σημείο από ακριβώς μια από τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ.



Απόδειξη. Θα καταλήξουμε σε άτοπο, υποθέτοντας ότι η x περιέχει τα σημεία Δ,Ζ,Η που είναι εσωτερικά των ΑΒ,ΒΓ και ΑΓ αντίστοιχα. Σύμφωνα με το 6.15 **ακριβώς ένα** απ' αυτά, έστω το Ζ, βρίσκεται μεταξύ των δυο άλλων. Αφού η x δεν περνάει από τις κορυφές του τριγώνου ΑΒΓ, **ορίζεται** το τρίγωνο ΑΔΗ. Αν συμβολίσουμε με y την ευθεία που ορίζουν τα Β και Γ μπορούμε ν' αποδείξουμε ότι για το τρίγωνο ΑΔΗ και την ευθεία y ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις για την εφαρμογή του αξιώματος II(4):

Από την υπόθεση ορίζεται το τρίγωνο ΑΒΓ, άρα η y δεν περιέχει το Α. Αν η y περιέχει το Η (που είναι διαφορετικό από το Γ, αφού έχουμε υποθέσει Α-Η-Γ), οι ευθείες y και ω (που ορίζουν τα Α και Γ) θα ταυτίζονται. Αυτό αντιφάσκει στην υπόθεση Α∉y. Ανάλογα αποδεικνύεται ότι η y δεν περιέχει το Δ.

Εφαρμόζοντας το II(4) για το τρίγωνο ΑΔΗ και την ευθεία y, συμπεραίνουμε ότι η y θα περιέχει ένα εσωτερικό σημείο του ΑΔ ή του ΑΗ. Έστω ότι η y περιέχει το Χ με την ιδιότητα Α-Χ-Η. Από

το II(3) και από την υπόθεση Α-Η-Γ, συμπεραίνουμε ότι Χ≠Γ. Επομένως, οι ευθείες y και ω θα ταυτίζονται (:έχουν τα σημεία Χ και Γ κοινά). Αυτό, όπως και πριν, αντιφάσκει στο Α∉y. Ανάλογα καταλήγουμε σε άτοπο, υποθέτοντας ότι η x περιέχει εσωτερικό σημείο του ΑΔ, και το συμπέρασμα αποδείχτηκε.

<u>Η έννοια του "μεταξύ" και η "διάταξη" συνευθειακών σημείων</u>

Ακολουθεί μια χαρακτηριστικά "περατοκρατική" διαδικασία, που:

— οδηγεί στη διαπίστωση ότι (εφόσον ισχύουν τα προηγούμενα αξιώματα της "σύμπτωσης" και του "μεταξύ") "**το πλήθος των σημείων που ανήκει σε οποιαδήποτε ευθεία δεν είναι πεπερασμένο**" (πρβλ. 6.19) και

— υποδεικνύει πώς μπορεί ν' αξιοποιηθεί η έννοια του "μεταξύ", ώστε "**να διατάξουμε σε μια σειρά πεπερασμένα (ως προς το πλήθος τους) συνευθειακά σημεία**" (πρβλ. 6.18).

Πιο συγκεκριμένα:

6.17. Αν δοθούν 4 σημεία που ανήκουν σε μια ευθεία x, μπορούμε να τα συμβολίσουμε με Α,Β,Γ,Δ έτσι, ώστε να έχουμε: Α-Β-Γ, Α-Β-Δ, Α-Γ-Δ και Β-Γ-Δ.

(Το συμπέρασμα **παραπέμπει** ευθέως στην εποπτική εικόνα της διάταξης των 4 σημείων με την αλφαβητική σειρά των συμβόλων τους, π.χ., από αριστερά προς τα δεξιά, αλλά δεν **περιορίζεται**, βέβαια, στην εποπτική αυτή εικόνα.)

Απόδειξη. Ας συμβολίσουμε προς το παρόν με Χ,Υ,Ζ,Ω τα 4 σημεία της x που μας δόθηκαν. Θεωρώντας τα 3 πρώτα μπορούμε να υποθέσουμε ότι ισχύει Χ-Υ-Ζ (πρβλ. 6.15), οπότε για τα σημεία Χ,Ζ,Ω ακριβώς μια από τις ακόλουθες περιπτώσεις είναι δυνατή:

(1) Ω-Χ-Ζ, (2) Χ-Ω-Ζ, (3) Χ-Ζ-Ω.

Για την περίπτωση (2) διακρίνουμε τις εξής υποπεριπτώσεις:

(2α) Χ-Ω-Υ, (2β) Χ-Υ-Ω και Χ-Ω-Ζ.

Έχοντας υποθέσει ότι Χ-Υ-Ζ, είναι εύκολο να δούμε ότι το ζητούμενο είναι άμεση συνέπεια του 6.17.1. Πιο συγκεκριμένα, λαμβάνοντας υπόψη το συμπέρασμα του 6.17.1, αρκεί να επιλέξουμε για καθεμιά από τις προηγούμενες περιπτώσεις τον επόμενο συμβολισμό:

Για την (1): Α=Ζ, Β=Υ, Γ=Χ και Δ=Ω (αφού Χ-Υ-Ζ $\Longleftrightarrow$ Ζ-Υ-Χ και Ω-Χ-Ζ $\Longleftrightarrow$ Ζ-Χ-Ω).

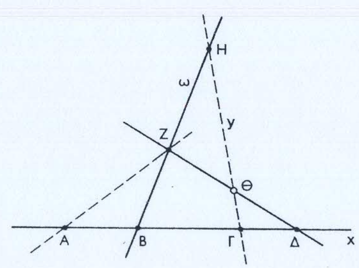
Για την (2α): Α=Χ, Β=Ω, Γ=Υ και Δ=Ζ.

Για την (2β): Α=Χ, Β=Υ, Γ=Ω και Δ=Ζ.

Για την (3): Α=Χ, Β=Υ, Γ=Ζ και Δ=Ω.

6.17.1. Έστω ότι τα 4 σημεία Α,Β,Γ,Δ της ευθείας x ικανοποιούν τις σχέσεις Α-Β-Γ **και** Α-Γ-Δ. **Τότε, έχουμε** Β-Γ-Δ **και** Α-Β-Δ.

Απόδειξη. Έστω Ζ ένα σημείο που δεν ανήκει στην x (πρβλ. Ι(2)), οπότε ορίζεται το τρίγωνο ΑΔΖ. Έστω Η ένα σημείο έτσι, ώστε Β-Ζ-Η (πρβλ. ΙΙ(2)). Σύμφωνα με το 6.13.1, το



Η δεν ανήκει στην x και, κατά συνέπεια, τα Γ και Η ορίζουν μια ευθεία (πρβλ. Ι(1)), που θα τη συμβολίζουμε με y.

Η y **δεν περιέχει καμιά κορυφή** του τριγώνου ΑΔΖ: Αν Ζ∈y (αφού Ζ≠Η, πρβλ. ΙΙ(1)), οι ευθείες y και ω (που ορίζεται από τα Β,Ζ)

θα ταυτίζονταν, οπότε τα σημεία Β,Γ,Ζ θα ήταν συνευθειακά. Αυτό αντιφάσκει στην υπόθεση Ζ∉x. Αν υποθέσουμε ότι η y περιέχει το Α (ή το Δ), καταλήγουμε ανάλογα σε άτοπο (αφού Η∉x). Επιπλέον, η y **περνάει από το εσωτερικό σημείο**, Γ, του ΑΔ (αφού έχουμε υποθέσει Α-Γ-Δ). Ικανοποιούνται, λοιπόν, οι προϋποθέσεις του αξιώματος ΙΙ(4) για το τρίγωνο ΑΔΖ και την ευθεία y.

Επομένως, η y θα περνάει από ένα εσωτερικό σημείο είτε του ΑΖ είτε του ΔΖ (πρβλ. 6.16). Η y δεν περιέχει εσωτερικό σημείο του ΑΖ, γιατί, αν περιείχε, θα έπρεπε να περνάει από ένα εσωτερικό σημείο ενός από τα ΑΒ και ΒΖ (αφού οι προηγούμενοι συλλογισμοί δείχνουν ότι ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του αξιώματος ΙΙ(4) για το τρίγωνο ΑΒΖ και την ευθεία y), που δεν συμβαίνει (δεδομένου ότι y≠x και y≠ω). Καταλήγουμε, έτσι, στο συμπέρασμα ότι η y περιέχει ένα **εσωτερικό σημείο**, Θ, του ΔΖ.

Εξαιτίας αυτού και επειδή έχουμε ήδη αποδείξει ότι η y δεν περνάει από το Ζ και δεν περιέχει άλλο σημείο που ανήκει στην x εκτός από το Β, ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του αξιώματος ΙΙ(4) για το τρίγωνο ΒΔΖ και την ευθεία y. Αυτό σημαίνει ότι η y περνάει από ένα εσωτερικό σημείο είτε του ΒΖ είτε του ΒΔ. Επειδή y≠ω, η y δεν περιέχει σημείο του ΒΖ, οπότε περιέχει ένα εσωτερικό σημείο του ΒΔ. Το Γ είναι το **μοναδικό** κοινό σημείο των ευθειών x και y. Άρα Β-Γ-Δ και το πρώτο μέρος του συμπεράσματος αποδείχτηκε.

Ανάλογα, αρχίζοντας από το Γ (αντί από το Β) και αξιοποιώντας την υπόθεση Α-Β-Γ (αντί για την Α-Γ-Δ), αποδεικνύουμε ότι Α-Β-Δ.

Παρατήρηση. Η δυνατότητα "διάταξης" 4 συνευθειακών σημείων με τον τρόπο που υποδεικνύεται στην εκφώνηση του 6.17 **ήταν αξίωμα** στην 1η έκδοση του βιβλίου του Hilbert (από την ουσιαστικά διαφοροποιημένη 11η έκδοση του οποίου παρουσιάζουμε εδώ επεξεργασμένα αποσπάσματα). Το 1902 **ο E.H. Moore** απέδειξε ότι επρόκειτο για μια δυνατότητα, που απέρρεε από τα υπόλοιπα αξιώματα. Έκτοτε, στην προσπάθεια να διατυπώνεται το σύστημα αξιωμάτων με "**οικονομία**" (πρβλ. 6.4.2), η προηγούμενη δυνατότητα "διάταξης" αποδεικνύεται (περίπου με τη μέθοδο που αναπτύξαμε πιο μπροστά).

6.18. Πόρισμα. Αν δοθούν πεπερασμένα το πλήθος συνευθειακά σημεία, μπορούμε να τα συμβολίζουμε με $A_\varkappa$, $\varkappa=1,\dots,\omega$, **έτσι, ώστε το** A_λ **να βρίσκεται μεταξύ του** $A_{\lambda-\mu}$ **και του** $A_{\lambda+\nu}$ **για** $\lambda=2,\dots,\omega-1$, $\mu=1,\dots,\lambda-1$ **και** $\nu=1,\dots,\omega-\lambda$.

Η απόδειξη γίνεται με αξιοποίηση του 6.17 (πρβλ. και 6.17.1) και με (πεπερασμένη) επαγωγή.

6.19. Πόρισμα. Μεταξύ δυο σημείων βρίσκονται άπειρα σημεία.

Η απόδειξη γίνεται με απαγωγή (ή με "απαγωγή σε άτοπο"), λαμβάνοντας υπόψη τα 6.14 και 6.18.

Το "αξίωμα του Pasch" και η έννοια του "ημιεπιπέδου"

6.20. Έστω $x \in E$ και $\Sigma(x)=\{X \in \Sigma : X \subset x\}$. Έστω $A \in \Sigma$ με $A \not\subset x$ (πρβλ. I(2)). Έστω $\Gamma \subset x$ (πρβλ. I(2)) και $B \in \Sigma$ με Α-Γ-Β (πρβλ. II(2)), οπότε $B \not\subset x$ (πρβλ. 6.13.2). Σε κάθε επιλογή μιας ευθείας x κι ενός σημείου A με $A \not\subset x$ αντιστοιχεί το (μη κενό) σύνολο:

$\Sigma(x,A)=\{A\} \cup \{X \in \Sigma-\{A\}$: το (ευθύγραμμο τμήμα) AX **δεν τέμνει** την $x\}$.

Προφανώς, **δεν υπάρχουν στοιχεία** του **συνόλου** $\Sigma(x,A)$ **που ανήκουν**

στην x.

Θα δείξουμε ότι για τα σύνολα $\Sigma(x,A)$ και $\Sigma(x,B)$, που αντιστοιχούν **σε κάθε επιλογή** μιας ευθείας x και σημείων A,B,Γ με $\Gamma \subset x$, $A \not\subset x$ και Α-Γ-Β ισχύουν τα εξής:

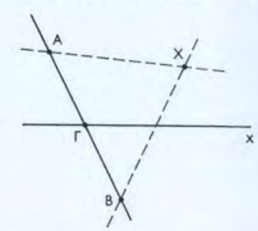
(α) $\Sigma(x,A) \cap \Sigma(x,B)=\emptyset$.

(β) $\Sigma(x,A) \cup \Sigma(x,B)=\Sigma-\Sigma(x)$.

Απόδειξη του (α). Υποθέτουμε ότι $X \in \Sigma(x,A) \cap \Sigma(x,B)$ και διακρίνουμε τις ακόλουθες δυο περιπτώσεις:

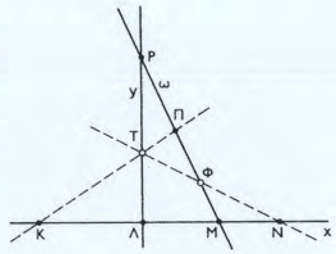
(I) Το X **ανήκει** στην ευθεία, y, που ορίζουν τα A και Γ. Σύμφωνα με το 6.15, ακριβώς ένα από τα X,A,Γ θα βρίσκεται μεταξύ των δυο άλλων. Επειδή $X \in \Sigma(x,A)$ και $\Gamma \subset x$, η περίπτωση Α-Γ-Χ αποκλείεται. Θα εξετάσουμε, λοιπόν, τις περιπτώσεις Α-Χ-Γ και Χ-Α-Γ. Αν ισχύει Α-Χ-Γ, επειδή έχουμε υποθέσει Α-Γ-Β, θα ισχύει και Χ-Γ-Β (πρβλ. 6.17.1), που είναι **άτοπο** (αφού $X \in \Sigma(x,B)$). Έστω, τώρα, ότι ισχύει Χ-Α-Γ. Από το Λήμμα 1 που ακολουθεί συνάγεται πάλι Χ-Γ-Β, που είναι **άτοπο**.

(II) Το X **δεν ανήκει** στην y, οπότε ορίζεται το τρίγωνο ABX. Όπως παρατηρήσαμε ήδη, η x δεν περνάει από καμιά κορυφή του τριγώνου αυτού, ενώ περιέχει το εσωτερικό σημείο Γ της πλευράς του AB. Επομένως, σύμφωνα με το II(4), θα περιέχει και ένα εσωτερικό σημείο του AX ή του BX, που είναι **άτοπο**, αφού $X \in \Sigma(x,A)$ και $X \in \Sigma(x,B)$.



Σε κάθε περίπτωση καταλήγουμε, λοιπόν, σε άτοπο, απ' όπου συνάγεται το ζητούμενο.

Λήμμα 1. Αν δοθούν 4 συνευθειακά σημεία Κ,Λ,Μ,Ν έτσι, ώστε Κ-Λ-Μ και Λ-Μ-Ν, τότε Κ-Λ-Ν και Κ-Μ-Ν.



Απόδειξη. Οι λεπτομέρειες της απόδειξης είναι ανάλογες μ' εκείνες της απόδειξης του 6.17.1. Γι' αυτό, εδώ θα περιγράψουμε μόνο το **γενικό πλάνο** της απόδειξης:

Έστω x η ευθεία των Κ,Λ,Μ,Ν και $\Pi \notin x$. Έστω Ρ έτσι, ώστε Μ-Π-Ρ. Έστω y η ευθεία, που ορίζουν τα Λ και Ρ (και περνάει από το εσωτερικό σημείο Λ του ΚΜ).

Εφαρμόζοντας το ΙΙ(4) για το τρίγωνο ΚΜΠ και την ευθεία y, συμπεραίνουμε ότι η y περνάει από ένα εσωτερικό σημείο, Τ του ΚΠ. Με νέα εφαρμογή του ΙΙ(4) για το τρίγωνο ΛΝΤ και την ευθεία ω, που ορίζουν τα Μ και Ρ (και περνάει από το **εσωτερικό** σημείο Μ του ΛΝ), συμπεραίνουμε ότι η ω περνάει από ένα εσωτερικό σημείο, Φ, του ΝΤ. Τέλος, εφαρμόζοντας το ΙΙ(4) για το τρίγωνο ΚΝΤ και την ευθεία ω, συμπεραίνουμε Κ-Μ-Ν.

Ανάλογα, αρχίζοντας από το Λ (αντί του Μ), αποδεικνύουμε ότι Κ-Λ-Ν.

Απόδειξη **του** (β). Αφού τα Σ(x,A) και Σ(x,B) δεν περιέχουν σημεία της x, το σύνολο του αριστερά μέλους της υπό απόδειξη ισότητας είναι υποσύνολο εκείνου του δεξιά μέλους. Απομένει, λοιπόν, ν' αποδείξουμε ότι κάθε $X\in\Sigma-\Sigma(x)$ ανήκει είτε στο Σ(x,A) είτε στο Σ(x,B). **Θα υποθέσουμε ότι το Χ δεν ανήκει στο πρώτο σύνολο και θ' αποδείξουμε ότι ανήκει** στο δεύτερο:

Θα εργαστούμε σε καθεμιά χωριστά από τις περιπτώσεις που διακρίναμε στην απόδειξη του (α).

Για την **1η περίπτωση** οι υποθέσεις μας είναι Α-Γ-Β και Α-Γ-Χ (αφού το Γ είναι το μοναδικό κοινό σημείο της ευθείας των Α,Β,Γ,Χ και της ευθείας x και, επιπλέον, η x **έχει κοινό** σημείο με το ΑΧ). Από το Λήμμα 2 που ακολουθεί έπεται Α-Χ-Β ή Α-Β-Χ. Αν Α-Χ-Β (ενώ Α-Γ-Χ), τότε Γ-Χ-Β (πρβλ. 6.17.1). Αν Α-Β-Χ (ενώ Α-Γ-Β), τότε Γ-Β-Χ. Και στις δυο περιπτώσεις το ΒΧ δεν έχει κοινό σημείο με την x (:αν υπήρχε κοινό σημείο, θα έπρεπε να είναι το Γ, πρβλ. 6.15). Άρα $X\in\Sigma(x,B)$.

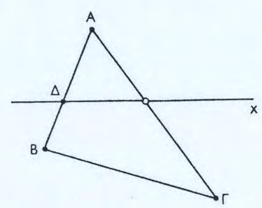
Στη **2η περίπτωση** ορίζεται το τρίγωνο ΑΒΧ και είναι εύκολο να διαπιστωθεί ότι ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του ΙΙ(4) για το τρίγωνο αυτό και την ευθεία x, η οποία περιέχει το εσωτερικό σημείο Γ της πλευράς ΑΒ και ένα εσωτερικό σημείο της πλευράς ΑΧ (αφού έχουμε υποθέσει ότι **το Χ δεν ανήκει στο** Σ(x,A)). Επομένως, σύμφωνα με το 6.16, η x δεν περιέχει σημείο του ΒΧ, απ' όπου έπεται $X\in\Sigma(x,B)$ και το ζητούμενο αποδείχτηκε.

Λήμμα 2. Αν Κ-Λ-Μ **και** Κ-Λ-Ν, **τότε** Κ-Μ-Ν **ή** Κ-Ν-Μ.

Απόδειξη. Αρκεί να καταλήξουμε σε άτοπο, υποθέτοντας Μ-Κ-Ν (πρβλ. 6.15). Οι υποθέσεις μας Κ-Λ-Μ $\Longleftrightarrow$ Μ-Λ-Κ και Μ-Κ-Ν, συνδυαζόμενες με το 6.17.1, δίνουν Λ-Κ-Ν, που αντιφάσκει στην υπόθεση Κ-Λ-Ν.

6.21. **Ορισμός.** Για κάθε $x\in E$ και κάθε $A\in\Sigma$ με $A\notin x$ το σύνολο Σ(x,A) (που ορίσαμε στην αρχή του 6.20) λέγεται **ημιεπίπεδο** ως προς x που περιέχει το Α. Όπως φαίνεται από τα (α) και (β) του 6.20, **κάθε ευθεία x ορίζει ακριβώς δυο ημιεπίπεδα**, τα οποία είναι ξένα μεταξύ τους και περιέχουν τα στοιχεία του Σ εκτός εκείνων που ανήκουν στην x.

6.22. Από το 6.20 γίνεται φανερός ο ουσιαστικός ρόλος του "αξιώματος του Pasch" στη διερεύνηση και τον ορισμό της έννοιας "ημιεπίπεδο". Αντίστροφα, αν **υποθέσουμε** ότι σε κάθε ευθεία x αντιστοιχούν **ακριβώς δυο** σύνολα της μορφής $\Sigma(x,A)$, που **ορίζονται** όπως στην αρχή του 6.20 και **ικανοποιούν** τα 6.20.(α) και 6.20.(β), **τότε μπορούμε ν' αποδείξουμε το "αξίωμα του Pasch"** (και μάλιστα με τη διατύπωση του 6.16) ως εξής:



Έστω ότι η x δεν περιέχει καμιά κορυφή του τριγώνου ΑΒΓ, ενώ περνάει από το εσωτερικό σημείο Δ της πλευράς του ΑΒ. Θεωρούμε τα σύνολα $\Sigma(x,A)$ και $\Sigma(x,B)$. Προφανώς, το Α δεν ανήκει στο $\Sigma(x,B)$. Επειδή ορίζονται ακριβώς δυο ξένα μεταξύ τους (πρβλ. 6.20.(α)) σύνολα της μορφής $\Sigma(x,A)$, τα σύνολα αυτά για τη συγκεκριμένη ευθεία x θα είναι τα $\Sigma(x,A)$ και $\Sigma(x,B)$. Επειδή το Γ δεν ανήκει στην x θ' ανήκει **είτε** στο πρώτο **είτε** στο δεύτερο (πρβλ. 6.20.(β)). Έστω ότι $\Gamma\in\Sigma(x,B)$. Τότε, η x (από τον ορισμό του $\Sigma(x,B)$) δεν έχει κοινό σημείο με το ΒΓ, ενώ έχει κοινό (ένα εσωτερικό) σημείο με το ΑΓ (αφού το Γ δεν ανήκει στο $\Sigma(x,A)$). Επομένως, ισχύει το 6.16.

Η έννοια της "γωνίας"

6.23. Σε αντιστοιχία με τὴν έννοια του "ημιεπιπέδου" **ορίζεται** η έννοια της "ημιευθείας": Έστω $A,B\subset x$ και $A\neq B$ (πρβλ. Ι(2)). Από το ΙΙ(2) συνάγεται η ύπαρξη ενός $\Gamma\subset x$ με Γ-Α-Β. Σε κάθε τέτοια επιλογή 3 σημείων μιας ευθείας x αντιστοιχούν δυο **ημιευθείες** της

με **αρχή** το Α, που θα **συμβολίζουμε** με $\vec{AB}$ και $\vec{A\Gamma}$. Τα στοιχεία του υποσυνόλου

$$\Sigma(\vec{AB})=\{A,B\}\cup\{X:A\text{-}X\text{-}B\}\cup\{X:A\text{-}B\text{-}X\}$$

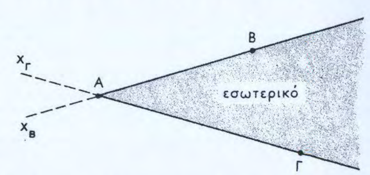
του Σ θα λέμε ότι **ανήκουν** στην ημιευθεία $\vec{AB}$. Ανάλογα ορίζεται το σύνολο $\Sigma(\vec{A\Gamma})$ των στοιχείων του Σ, που θα λέμε ότι ανήκουν στην ημιευθεία $\vec{A\Gamma}$ ή ότι η $\vec{A\Gamma}$ **περνάει** από καθένα απ' αυτά. (Δεν πρέπει να γίνεται σύγχυση ανάμεσα στο σύμβολο $\vec{AB}$ και στο σύνολο $\Sigma(\vec{AB})$.)

6.23.1. Με τον προηγούμενο συμβολισμό και με το συμβολισμό από το 6.20 ισχύουν οι ισότητες: $\Sigma(\vec{AB})\cap\Sigma(\vec{A\Gamma})=\{A\}$, $\Sigma(\vec{AB})\cup\Sigma(\vec{A\Gamma})=\Sigma(x)$.

Απόδειξη. Έστω $X\in\Sigma(\vec{AB})\cap\Sigma(\vec{A\Gamma})$ και $X\neq A$. Τότε ισχύει Χ=Β ή Β-Χ-Α ή Α-Β-Χ. Συνδυάζοντας καθεμιά από τις περιπτώσεις αυτές με τη βασική υπόθεση Β-Α-Γ $\Longleftrightarrow$ Γ-Α-Β και λαμβάνοντας υπόψη τα 6.15, 6.17.1 και το Λήμμα 1 από το 6.20, συμπεραίνουμε Χ-Α-Γ, απ' όπου έπεται $X\notin\Sigma(\vec{A\Gamma})$ (πρβλ. 6.15). Αποδείξαμε, έτσι, την πρώτη ισότητα.

Αν υποθέσουμε $X\subset x$, $X\neq A$ και $X\notin\Sigma(\vec{AB})$, με ανάλογους συλλογισμούς συμπεραίνουμε $X\in\Sigma(\vec{A\Gamma})$, απ' όπου έπεται η δεύτερη ισότητα.

6.24. **Ορισμός.** Έστω $\vec{AB}$, $\vec{A\Gamma}$ δύο ημιευθείες με κοινή αρχή Α έτσι, ώστε τα σημεία τους ν' ανήκουν στις **διαφορετικές** ευθείες x_B και x_Γ (με κοινό σημείο το Α) αντίστοιχα. Το σύστημα των δυο αυτών ημιευθειών το ονομάζουμε **γωνία**, την οποία θα συμβολίζουμε με $\sphericalangle(\vec{AB},\vec{A\Gamma})$ ή με $\sphericalangle(\vec{A\Gamma},\vec{AB})$ ή με $\sphericalangle B A\Gamma$ ή με $\sphericalangle \Gamma AB$. Το **εσωτερικό** της

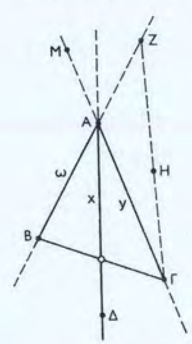


γωνίας αυτής αποτελείται από τα **"εσωτερικά"** της **σημεία**, που είναι τα στοιχεία του συνόλου $\Sigma(x_\Gamma,B)\cap\Sigma(x_B,\Gamma)$ (πρβλ. 6.20 και το σχήμα, απ' όπου προκύπτει ότι τουλάχιστον όταν αναφερόμαστε στην "εποπτεία" θεωρούμε **"κυρτές"** γωνίες). Οι ημιευθείες $\vec{AB}$, $\vec{A\Gamma}$ λέγονται **πλευρές** της γωνίας που ορίζουν.

Αν $X\in\Sigma(\vec{AB})-\{A\}$ και $Y\in\Sigma(\vec{A\Gamma})-\{A\}$, είναι εύκολο να δούμε ότι **κάθε** $Z\in\Sigma$ με X-Z-Y **είναι εσωτερικό σημείο της** $\sphericalangle(\vec{AB},\vec{A\Gamma})$ (πρβλ. 6.15).

Μετά τον προηγούμενο ορισμό, είμαστε σε θέση ν' αποδείξουμε τον επόμενο ισχυρισμό, που αποτελεί "παραλλαγή" του "αξιώματος του Pasch" (πρβλ. σελ. 112):

6.25. Πρόταση. Έστω ΑΒΓ ένα τρίγωνο και Δ ένα **"εσωτερικό"** σημείο της $\sphericalangle$ΒΑΓ. Τότε, ένα **εσωτερικό** σημείο του ευθυγράμμου τμήματος ΒΓ **ανήκει** στην ημιευθεία $\vec{A\Delta}$. (Οι $\sphericalangle$ΒΑΓ, $\sphericalangle$ΑΒΓ και $\sphericalangle$ΒΓΑ λέγονται **γωνίες του τριγώνου** ΑΒΓ.)



Απόδειξη. Έστω Z έτσι, ώστε Β-Α-Ζ, οπότε δημιουργείται το τρίγωνο ΒΓΖ (πρβλ. 6.13.1). Έστω x η ευθεία που ορίζουν τα Α και Δ. Θ' αποδείξουμε ότι ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις για την εφαρμογή του ΙΙ(4) για το τρίγωνο ΒΓΖ και την ευθεία x (η οποία περνάει από το εσωτερικό σημείο Α του ΒΖ): Επειδή το Δ είναι "εσωτερικό" σημείο της $\sphericalangle$ΒΑΓ, δεν ανήκει στις ευθείες που αντιστοιχούν στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ του τριγώνου ΑΒΓ, οπότε η x δεν περνάει από τις κορυφές Β και Γ του τριγώνου ΒΓΖ. Για τον ίδιο λόγο δεν περνάει ούτε από το Ζ (που βρίσκεται πάνω στην ευθεία των Β και Α).

Επομένως, σύμφωνα με το 6.16, η x θα περιέχει ένα εσωτερικό σημείο είτε του ΒΓ (όπως θέλουμε ν' αποδείξουμε) είτε του ΓΖ. **Αρκεί**, λοιπόν, **να καταλήξουμε σε άτοπο**, υποθέτοντας ότι η x θα περιέχει ένα εσωτερικό σημείο, Η, του ΓΖ. Ας υποθέσουμε ότι συμβαίνει αυτό. Τότε (όπως ήδη παρατηρήσαμε), το Η θα είναι "εσωτερικό" σημείο της $\sphericalangle$ΓΑΖ , οπότε $H\in\Sigma(y,Z)$, όπου y είναι η ευθεία που ορίζουν τα Α και Γ. Από την άλλη μεριά, έχουμε υποθέσει ότι $\Delta\in\Sigma(y,B)$ και ότι τα Β,Ζ βρίσκονται σε διαφορετικά ημιεπίπεδα ως προς y (πρβλ. 6.21). Κατά συνέπεια, τα Δ και Η βρίσκονται σε διαφορετικά ημιεπίπεδα ως προς y, απ' όπου συνάγεται ότι υπάρχει **εσωτερικό** σημείο, Θ, του ΔΗ που **ανήκει** στην y. Επειδή όλα τα σημεία που ανήκουν στο ΔΗ ανήκουν και στην x, το Θ **ανήκει και** στην x. Αν $\Theta\neq A$, οι ευθείες x και y ταυτίζονται, που είναι άτοπο (αφού το Δ δεν ανήκει στην y).

Για την απόδειξη της πρότασης απομένει, λοιπόν, να καταλήξουμε σε άτοπο, υποθέτοντας Θ=Α: Τότε έχουμε Δ-Α-Η, οπότε, αν συμβολίσουμε με ω την ευθεία που ορίζουν τα Α και Β και θεωρήσουμε ένα σημείο Μ με Γ-Α-Μ, θα ισχύει $H\in\Sigma(\omega,M)$, αφού τα Δ και Γ βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς ω (πρβλ. 6.20.(α) και (β)). Αυτό είναι άτοπο, αφού $\Gamma\notin\Sigma(\omega,M)$ και τα Η,Γ βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο ως προς ω (δεδομένου ότι το Ζ είναι το μοναδικό κοινό σημείο της ω με την ευθεία που ορίζουν τα Γ,Η).

<u>Τα αξιώματα της "συμφωνίας"</u>

Όπως σημειώσαμε ήδη στο 6.7.(ΙΙΙ), η "συμφωνία" θα παίξει το ρόλο της έννοιας που θα μας επιτρέπει να ελέγχουμε αν δυο (συνήθως "ευθύγραμμα") σχήματα είναι ή όχι "ίσα". Δεν χρησιμοποιείται ο όρος "ισότητα", **για να μη δημιουργηθεί η εσφαλμένη εντύπωση** ότι περιορίζεται απλώς στην έννοια της "ταυτότητας" (: α = α).

Τ' αξιώματα της "συμφωνίας" χωρίζονται σε τρεις ενότητες: τα δυο αξιώματα της πρώτης ενότητας αναφέρονται στη **"συμφωνία" ευθυγράμμων τμημάτων**, (πρβλ. 6.26), η δεύτερη ενότητα καλύπτει τη **"συμφωνία" γωνιών**, (πρβλ. 6.27) και η τρίτη κατοχυρώνει (στο "πνεύμα" του Ευκλείδη) τη **"συμφωνία" τριγώνων** (πρβλ. 6.28).

6.26. **"Συμφωνία" ευθυγράμμων τμημάτων:** Δεχόμαστε ότι υπάρχει μια **σχέση ισοδυναμίας** ανάμεσα στα ευθύγραμμα τμήματα (τα σημεία των οποίων ανήκουν στην ίδια ευθεία ή σε διαφορετικές ευθείες). Δυο ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ και ΓΔ που συνδέονται με τη σχέση αυτή θα τα λέμε **"σύμφωνα"** ή **"ίσα"** και θα γράφουμε $ΑΒ \simeq ΓΔ$, $ΒΑ \simeq ΓΔ$ κ.λπ. Η σχέση "συμφωνίας" αυτή είναι **"πρωταρχική"** (όπως οι έννοιες "σημείο", "ευθεία" και οι σχέσεις "ανήκει", "μεταξύ") και δεν θα διευκρινισθεί περισσότερο. Δεχόμαστε ότι η έννοια αυτή ικανοποιεί τα δυο επόμενα αξιώματα:

ΙΙΙ(1): Αν δοθεί το (ευθύγραμμο τμήμα) ΑΒ, τότε σε **κάθε ημιευθεία** $\vec{ΓΔ}$ (πρβλ. 6.23) αντιστοιχεί **ένα (τουλάχιστο)** σημείο, Ζ, που ανήκει σ' αυτήν έτσι, ώστε $ΑΒ \simeq ΓΖ$.

ΙΙΙ(2): Θεωρούμε τις ευθείες x και x΄ (που δεν αποκλείεται και να ταυτίζονται) και σε καθεμιά τους τα σημεία Α,Β,Γ και Α΄, Β΄,Γ΄, αντίστοιχα έτσι, ώστε τα Γ και Α να μην ανήκουν στις (ημιευθείες) $\vec{ΒΑ}$, $\vec{ΒΓ}$ αντίστοιχα και ανάλογα να ισχύουν για τα Γ΄,Α΄ και τις $\vec{Β'Α'}$, $\vec{Β'Γ'}$. Με αυτές τις υποθέσεις δε-

χόμαστε ότι, αν $ΑΒ \simeq Α'Β'$ και $ΒΓ \simeq Β'Γ'$, τότε $ΑΓ \simeq Α'Γ'$.

6.26.1. **Παρατηρήσεις. (α)** Ο Hilbert είχε απαιτήσει αξιωματικά μόνο τη "μεταβατικότητα" για την προηγούμενη σχέση "συμφωνίας" και είχε αποδείξει την "αυτοπάθεια" και τη "συμμετρικότητα". Εδώ δεχθήκαμε αξιωματικά τη "συμφωνία" των ευθυγράμμων τμημάτων ως σχέση ισοδυναμίας για να μην εκταθεί το κείμενο χωρίς ουσιαστικό λόγο, μια και οι σχετικές αποδείξεις δεν έχουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον. **Το ίδιο θα κάνουμε πιο κάτω και για τη "συμφωνία" των γωνιών.**

(β) Στο ΙΙΙ(1) **δεν απαιτήσαμε το "μονοσήμαντο"** του Ζ, γιατί θα το αποδείξουμε στη συνέχεια, **στηριζόμενοι στο "μονοσήμαντο" της τελικής πλευράς κατά τη "μεταφορά" των γωνιών.**

(γ) Με το συμβολισμό από το ΙΙΙ(1), το ΓΖ μπορεί να θεωρηθεί ως η **"μεταφορά"** του ΑΒ στην "αρχή" της (τυχαίας) ημιευθείας $\vec{ΓΔ}$. Το ΙΙΙ(2) εξασφαλίζει ότι η **"μεταφορά" αυτή είναι "συμβιβαστή"** με την "πρόσθεση" **ευθυγράμμων τμημάτων, τα οποία ορίζονται από συνευθειακά σημεία και έχουν ως μοναδικό "κοινό" σημείο, ένα άκρο τους.** Με το συμβολισμό από το ΙΙΙ(2), το ΑΓ θεωρείται το **"άθροισμα"** των ΑΒ και ΒΓ, ενώ το Α΄Γ΄ θεωρείται το **"άθροισμα" των Α΄Β΄ και Β΄Γ΄.**

(δ) Με την αξιωματική κατοχύρωση της "μεταφοράς" των ευθυγράμμων τμημάτων και την αντίστοιχη κατοχύρωση της "μεταφοράς" γωνιών (που θ' ακολουθήσει), καλύπτεται η σχετική παράλειψη στα "Στοιχεία" (πρβλ. 2.7).

6.26.2. Για να ορισθεί καλά η **ανισοτική σχέση** ανάμεσα στα ευθύγραμμα τμήματα, είναι απαραίτητο ν' αποδειχτεί το "μονοσήμαντο" της "μεταφοράς" τους. Όταν θα γίνει αυτό (πρβλ. 6.29), θα λέμε ότι το ΑΒ (ή το ΒΑ) είναι **μικρότερο** από το ΓΔ (ή το ΔΓ) και θα γράφουμε ΑΒ<ΓΔ, **αν**, όταν "μεταφέρουμε" το ΑΒ στην ημιευθεία $\overrightarrow{ΓΔ}$ (σύμφωνα με το III(1)), **το** (μονοσήμαντα ορισμένο) **σημείο** Ζ (που είναι τέτοιο, ώστε ΑΒ≃ΓΖ) **έχει την ιδιότητα** Γ-Ζ-Δ. Η σχέση ΑΒ>ΓΔ ορίζεται ανάλογα.

Από τους ορισμούς των ανισοτικών σχέσεων αυτών και λαμβάνοντας υπόψη το 6.15 συμπεραίνουμε ότι: **αν δοθούν δυο ευθύγραμμα τμήματα** ΑΒ **και** ΓΔ, **τότε ισχύει ακριβώς μια από τις σχέσεις** ΑΒ<ΓΔ, ΑΒ≃ΓΔ, ΑΒ>ΓΔ.

6.27. **"Συμφωνία" γωνιών:** Δεχόμαστε ότι υπάρχει μια **σχέση ισοδυναμίας** ανάμεσα στις γωνίες (πρβλ. 6.24). Δυο γωνίες ∢ΒΑΓ, ∢ΗΖΘ που συνδέονται με τη σχέση αυτή λέγονται **"σύμφωνες"** ή **"ίσες"** και αυτό το συμβολίζουμε με ∢ΒΑΓ≃∢ΗΖΘ. Για τη σχέση αυτή ισχύει το επόμενο αξίωμα, που εξασφαλίζει **το μονοσήμαντο της "μεταφοράς" των γωνιών:**

III(3): Αν δοθούν η ∢ΒΑΓ, η x∈**Ε**, μια ημιευθεία της $\overrightarrow{ΖΘ}$ (πρβλ. 6.23) και προκαθορισθεί ένα ημιεπίπεδο (από τα δυο) που ορίζει η x (πρβλ. 6.21), τότε υπάρχει **ακριβώς μια** ημιευθεία $\overrightarrow{ΖΗ}$ έτσι, ώστε να ισχύει ∢ΒΑΓ≃∢ΗΖΘ και επιπλέον, τα σημεία της $\overrightarrow{ΖΗ}$, εκτός του Ζ, και τα εσωτερικά σημεία της ∢ΗΖΘ ν' ανήκουν στο προκαθορισμένο ημιεπίπεδο.

6.27.1. Η **ανισοτική σχέση** ανάμεσα σε γωνίες **ορίζεται** σε αναλογία με την αντίστοιχη σχέση για τα ευθύγραμμα τμήματα (πρβλ. 6.26.2): θα γράφουμε ∢ΒΑΓ<∢ΔΖΘ και θα λέμε ότι η ∢ΒΑΓ είναι **μεγαλύτερη**

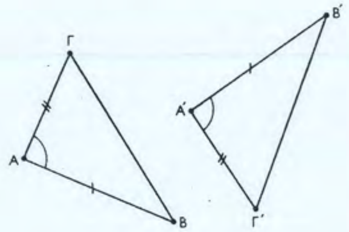
από την ∢ΔΖΘ, αν συμβαίνουν τα εξής: Αν συμβολίσουμε με **x** την ευθεία που ορίζουν τα Ζ,Θ και "μεταφέρουμε" την ∢ΒΑΓ, σύμφωνα με το III(3), με προκαθορισμένα την ημιευθεία $\overrightarrow{ΖΘ}$ και το ημιεπίπεδο ως προς x που περιέχει το Δ (πρβλ. 6.21), τότε **όλα** τα σημεία που ανήκουν στην $\overrightarrow{ΖΗ}$ (πρβλ. III(3)), **εκτός** του Ζ, είναι **εσωτερικά** σημεία της ∢ΔΖΘ (πρβλ. 6.24). Ανάλογα ορίζεται η σχέση ">". Η "μεταβατικότητα" των σχέσεων αυτών αποδεικνύεται εύκολα.

6.27.2. Δεν είναι απαραίτητο να διατυπωθεί για γωνίες ένα αξίωμα αντίστοιχο του III(2), ώστε να διασυνδεθεί η "συμφωνία" με την "πρόσθεση" των γωνιών (πρβλ. 6.26.1.(γ)), γιατί η διασύνδεση αυτή αποδεικνύεται (πρβλ. 6.33). Είναι, όμως, αναγκαίο να ορισθεί η έννοια του "αθροίσματος" δυο γωνιών. **Η έννοια αυτή ορίζεται μόνο για "διαδοχικές" γωνίες:**

Δυο γωνίες λέγονται **διαδοχικές**, αν έχουν μια ημιευθεία ως κοινή πλευρά και δεν έχουν κοινά εσωτερικά σημεία. Επομένως, μια γωνία διαδοχική της ∢ΒΑΓ με πλευρά την ημιευθεία $\overrightarrow{ΑΒ}$ θα είναι η ∢ΒΑΔ, υπό την προϋπόθεση ότι τα Δ και Γ βρίσκονται σε διαφορετικά ημιεπίπεδα ως προς την ευθεία των Α,Β. Αν συμβαίνουν αυτά, το **"άθροισμά"** τους είναι η ∢ΔΑΓ.

6.28. Η **"συμφωνία" τριγώνων** ορίζεται ως εξής: δυο τρίγωνα θα λέγονται **"σύμφωνα"** ή **"ίσα"**, αν οι κορυφές τους μπορούν ν' αντιστοιχισθούν έτσι, ώστε οι αντίστοιχες πλευρές να είναι "σύμφωνες" (πρβλ. 6.26) και οι αντίστοιχες γωνίες να είναι, επίσης, "σύμφωνες" (πρβλ. 6.27). Το επόμενο αξίωμα (τελευταίο για τη "συμφωνία") παίζει κεντρικό ρόλο κατά τη διερεύνηση του ερωτήματος αν δυο δεδομένα τρίγωνα είναι "σύμφωνα" ή όχι:

III(4): Αν για τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ (πρβλ. 6.12.2) ισχύουν $\sphericalangle ΒΑΓ \simeq \sphericalangle Β'Α'Γ'$, $ΑΒ \simeq Α'Β'$ και $ΑΓ \simeq Α'Γ'$, τότε (δεχόμαστε ότι) ισχύει και $\sphericalangle ΑΒΓ \simeq \sphericalangle Α'Β'Γ'$.



6.28.1. Παρατηρήσεις. (α) Το προηγούμενο αξίωμα παραπέμπει στο γνωστό μας από τα "Στοιχεία" κριτήριο ισότητας τριγώνων, σύμφωνα με το οποίο: δυο τρίγωνα είναι ίσα, αν έχουν δυο αντίστοιχες πλευρές ίσες και τις περιεχόμενες γωνίες ίσες. Η σημασία της επιλογής του κριτηρίου αυτού ανάμεσα στα γνωστά τρία βασικά κριτήρια ισότητας τριγώνων, **εκτός** από τη "λειτουργικότητα" του III(4) που θα διαπιστώσουμε στη συνέχεια, αναδεικνύεται **και** από τις επισημάνσεις στο 6.30.1.

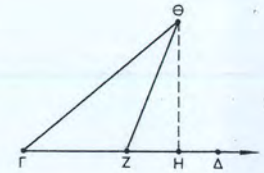
(β) Η παραδοχή $\sphericalangle ΑΒΓ \simeq \sphericalangle Α'Β'Γ'$ στο III(4) προκύπτει, π.χ., από τη συγκεκριμένη διαδοχή των γραμμάτων Α,Β,Γ, και Α΄,Β΄,Γ΄, στις υποθέσεις. Αν εναλλάξουμε σ' αυτές τη θέση των Β,Γ και Β΄,Γ΄, τότε οι υποθέσεις εξακολουθούν να ισχύουν, οπότε το συμπέρασμα παίρνει τη μορφή: $\sphericalangle ΑΓΒ \simeq \sphericalangle Α'Γ'Β'$. Επομένως, αν ισχύουν οι υποθέσεις του III(4), τότε **και οι δυο** υπόλοιπες γωνίες των τριγώνων είναι "σύμφωνες".

<u>**Συνέπειες των μέχρι τώρα διατυπωθέντων αξιωμάτων**</u>

6.29. Πρόταση. Κατά τη "μεταφορά" των ευθυγράμμων τμημάτων ισχύει το **μονοσήμαντο**, δηλαδή το Ζ στο III(1) ορίζεται μονοσή-

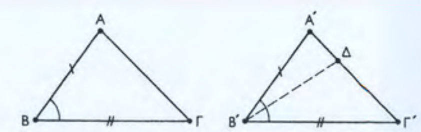
μαντα (πρβλ. 6.26).

Απόδειξη. Με το συμβολισμό από το III(1), έστω ότι, εκτός από το Ζ, υπάρχει **και** το Η (που ανήκει στην $\vec{ΓΔ}$) έτσι, ώστε να ισχύει $ΑΒ \simeq ΓΗ$. Θεωρούμε το Θ που δεν ανήκει στην ευθεία των Γ και Δ. Δημιουργούνται, έτσι, τα τρίγωνα ΓΖΘ και ΓΗΘ, για τα στοιχεία των οποίων ισχύουν οι ισότητες: $\sphericalangle ΖΓΘ \simeq \sphericalangle ΗΓΘ$, $ΓΖ \simeq ΓΗ$ (αφού η "$\simeq$" είναι σχέση ισοδυναμίας) και $ΓΘ \simeq ΓΘ$. Επομένως, σύμφωνα με το III(4) (πρβλ. και 6.28.1.(β)), θα ισχύει $\sphericalangle ΓΘΖ \simeq \sphericalangle ΓΘΗ$, που αντιφάσκει στο **μονοσήμαντο** της "μεταφοράς" των γωνιών (:σύμφωνα με το III(3), οι $\vec{ΘΖ}$ και $\vec{ΘΗ}$ πρέπει να ταυτίζονται).



6.30. Πρώτο κριτήριο ισότητας τριγώνων. Δυο τρίγωνα είναι "σύμφωνα" (πρβλ. 6.28), αν δυο πλευρές τους είναι αντίστοιχα "σύμφωνες" και οι περιεχόμενες σ' αυτές γωνίες είναι, επίσης, "σύμφωνες".

Απόδειξη. Για τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ έστω ότι ισχύουν: $ΑΒ \simeq Α'Β'$, $ΒΓ \simeq Β'Γ'$ και $\sphericalangle ΑΒΓ \simeq \sphericalangle Α'Β'Γ'$. Τότε, σύμφωνα με τα III(4) και 6.28.1.(β), έχουμε: $\sphericalangle ΒΑΓ \simeq \sphericalangle Β'Α'Γ'$ και $\sphericalangle ΒΓΑ \simeq \sphericalangle Β'Γ'Α'$. Μένει, λοιπόν, ν' αποδείξουμε τη "συμφωνία" των ΑΓ και Α΄Γ΄:



Έστω ότι τα ευθύγραμμα αυτά τμήματα δεν είναι "σύμφωνα" και ότι ισχύει $ΓΑ < Γ'Α'$ (πρβλ. 6.26.2). Τότε, υπάρχει ένα σημείο Δ με Γ΄-Δ-Α΄ έτσι, ώστε $Γ'Δ \simeq ΓΑ$, οπότε εφαρμόζοντας το III(4), στα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $\Delta B'\Gamma'$, συμπεραίνουμε $\sphericalangle AB\Gamma \simeq \sphericalangle \Delta B'\Gamma'$, που αντιφάσκει στο μονοσήμαντο της "μεταφοράς" των γωνιών (:έχουμε υποθέσει $\sphericalangle AB\Gamma \simeq \sphericalangle A'B'\Gamma'$).

6.30.1. ΄Οπως φαίνεται από την προηγούμενη απόδειξη, το ουσιαστικό περιεχόμενο του πρώτου κριτηρίου ισότητας τριγώνων είναι ότι από τις "συμφωνίες" $AB \simeq A'B'$, $A\Gamma \simeq A'\Gamma'$ (και την $\sphericalangle BA\Gamma \simeq \sphericalangle B'A'\Gamma'$) έπεται η $B\Gamma \simeq B'\Gamma'$. Αυτό αποκτά ιδιαίτερη σημασία, αν ξεφύγουμε από την άποψη ότι η "συμφωνία" ευθυγράμμων τμημάτων είναι μια **"αφηρημένη"** σχέση ισοδυναμίας, που μας επιτρέπει να "συγκρίνουμε" απλώς ευθύγραμμα τμήματα (όπως συμβαίνει,π.χ., με τα εμβαδά στα "Στοιχεία"), και εισάγουμε τη **"μέτρηση"**, όπως θα κάνουμε συχνά στο 2ο Μέρος του βιβλίου αυτού.

Υπάρχουν στη Βιβλιογραφία προσεγγίσεις της αξιωματικής θεμελίωσης της Γεωμετρίας στο γενικό πνεύμα του Hilbert (και περίπου με την ίδια διαδοχή εισαγωγής εννοιών και απόδειξης προτάσεων), αλλά με εντελώς διαφορετικά "μεθοδολογικά εργαλεία". Μια απ' αυτές χαρακτηρίζεται από τη θεώρηση "συντεταγμένων" **σε κάθε ευθεία** και από τη συνακόλουθη **"μέτρηση"** σε κάθε ευθεία **χωριστά**. Στα πλαίσια αυτά, το αξίωμα III(4) **"διασυνδέει"** τις επιμέρους "μετρήσεις" με την ακόλουθη έννοια:

΄Εχοντας τη δυνατότητα "μέτρησης" σε κάθε ευθεία χωριστά, είναι σκόπιμο να ορίσουμε την έννοια της "συμφωνίας" ευθυγράμμων τμημάτων, θεωρώντας **"σύμφωνα"** δυο ευθύγραμμα τμήματα που έχουν το **ίδιο "μήκος"**, δηλαδή το ίδιο αποτέλεσμα της "μέτρησης" πάνω στις αντίστοιχες ευθείες. Τότε το III(4) (χωρίς απόλυτη αυστηρότητα, αλλά πολύ κοντά στην ουσία) μας λέει ότι **η "μέτρηση"**

πάνω στην ευθεία των B,Γ είναι **"σύννομη"**(:**"διασυνδέεται οργανικά"**) **με τις "μετρήσεις" πάνω στις ευθείες** των Α,Β **και των** Α,Γ. ΄Ετσι, "ενοποιείται" η "μέτρηση" σε **ολόκληρο** το επίπεδο.

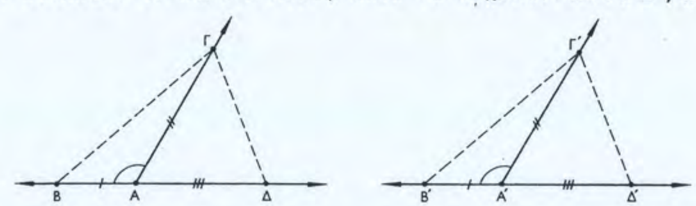
6.31. Δεύτερο κριτήριο ισότητας τριγώνων. Δυο τρίγωνα είναι "σύμφωνα", αν οι κορυφές τους μπορούν να συμβολισθούν με Α,Β,Γ και Α΄,Β΄,Γ΄ αντίστοιχα έτσι, ώστε να ισχύουν: $AB \simeq A'B'$, $\sphericalangle BA\Gamma \simeq \sphericalangle B'A'\Gamma'$ και $\sphericalangle AB\Gamma \simeq \sphericalangle A'B'\Gamma'$.

Η **απόδειξη** επαφίεται στον αναγνώστη.

6.32. Ορισμός. Δυο γωνίες λέγονται **παραπληρωματικές**, αν είναι διαδοχικές (πρβλ. 6.27.2) και οι μη κοινές πλευρές τους είναι ημιευθείες της ίδιας ευθείας με αρχή την κορυφή των γωνιών (πρβλ. 6.23).

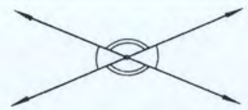
6.32.1. Πρόταση. Αν δυο **γωνίες** είναι **"σύμφωνες"**, τότε και οι **παραπληρωματικές** τους γωνίες είναι **"σύμφωνες"**.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι $\sphericalangle BA\Gamma \simeq \sphericalangle B'A'\Gamma'$. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι έχουμε επιλέξει τα σημεία έτσι, ώστε να ισχύουν: $AB \simeq A'B'$, $A\Gamma \simeq A'\Gamma'$



και $A\Delta \simeq A'\Delta'$, ενώ τα Δ και Δ΄ ικανοποιούν τις σχέσεις Β-Α-Δ και Β΄-Α΄-Δ΄. Επειδή τα τρίγωνα ΑΒΓ, Α΄Β΄Γ΄ είναι "σύμφωνα" (πρβλ. 6.30), έχουμε $B\Gamma \simeq B'\Gamma'$ και $\sphericalangle AB\Gamma \simeq \sphericalangle A'B'\Gamma'$. Εξαιτίας αυτών και της $B\Delta \simeq B'\Delta'$ (πρβλ. III(2)), τα τρίγωνα ΒΔΓ και Β΄Δ΄Γ΄ είναι "σύμφωνα", απ' όπου έπεται ΓΔ≃Γ΄Δ΄και ∢ΒΔΓ≃∢Β΄Δ΄Γ΄. Επομένως, τα τρίγωνα ΑΔΓ και Α΄Δ΄Γ΄ είναι "σύμφωνα" και, κατά συνέπεια, ισχύει το ζητούμενο: ∢ΓΑΔ≃∢Γ΄Α΄Δ΄.

6.32.2. Πόρισμα. Οι **"κατά κορυφή"** γωνίες είναι **"σύμφωνες"** (πρβλ. σχήμα).



6.33. "Συμφωνία" και "πρόσθεση" γωνιών. Έστω ότι οι ∢ΒΑΓ,∢ΓΑΔ είναι **διαδοχικές** (πρβλ.6.27.2) και ότι το ίδιο ισχύει και για τις ∢Β΄Α΄Γ΄, ∢Γ΄Α΄Δ΄. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι ορίζονται οι ∢ΒΑΔ≃≃∢Β΄Α΄Δ΄. Τότε:

(α) Αν ∢ΒΑΓ≃∢Β΄Α΄Γ΄ και ∢ΓΑΔ≃∢Γ΄Α΄Δ΄, τότε: ∢ΒΑΔ≃∢Β΄Α΄Δ΄.

(β) Αν ∢ΓΑΔ≃∢Γ΄Α΄Δ΄ και ∢ΒΑΔ≃∢Β΄Α΄Δ΄, τότε: ∢ΒΑΓ≃∢Β΄Α΄Γ΄.

Απόδειξη. Θ΄αποδείξουμε μόνο το (β), αφήνοντας την (ανάλογη) απόδειξη του (α) στον αναγνώστη. (Ας σημειωθεί ότι το (α) ανάγεται στο (β), αν ληφθεί υπόψη το 6.32.1 και, αντί της μιας από τις δεδομένες γωνίες, θεωρήσουμε την παραπληρωματική της.)

Επιλέγουμε τα σημεία έτσι, ώστε να ισχύουν: ΑΒ≃Α΄Β΄ και ΑΔ≃Α΄Δ΄. Επειδή το Γ είναι εσωτερικό σημείο της ∢ΒΑΔ, η $\overrightarrow{ΑΓ}$ και το ΒΔ έχουν ένα κοινό σημείο, έστω το Ζ, που είναι εσωτερικό του ΒΔ (πρβλ. 6.25). Σύμφωνα με το ΙΙΙ(1), υπάρχει ένα σημείο Ζ΄ που ανήκει στην $\overrightarrow{Α΄Γ΄}$ έτσι, ώστε να ισχύει ΑΖ≃Α΄Ζ΄. Από τη "συμφωνία" των τριγώνων ΑΔΖ, Α΄Δ΄Ζ΄ προκύπτει ∢ΑΔΖ≃∢Α΄Δ΄Ζ΄, ενώ από τη "συμ-

φωνία" των τριγώνων ΑΒΔ, Α΄Β΄Δ΄ έχουμε: ∢ΑΔΒ≃∢Α΄Δ΄Β΄. Επειδή η "συμφωνία" γωνιών είναι σχέση ισοδυναμίας, από τις δυο προηγούμενες "συμφωνίες" συνάγεται η ∢Α΄Δ΄Ζ΄≃∢Α΄Δ΄Β΄. Η τελευταία, συνδυαζόμενη με το ότι τα Β΄ και Ζ΄ βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία που ορίζουν τα Δ΄ και Α΄ (αλλιώς οι ∢Β΄Α΄Γ΄, ∢Γ΄Α΄Δ΄ θα είχαν κοινά εσωτερικά σημεία), μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι οι $\overrightarrow{Δ΄Β΄}$, $\overrightarrow{Δ΄Ζ΄}$ ταυτίζονται (πρβλ. ΙΙΙ(3)). Επομένως, το Ζ΄ είναι το κοινό σημείο των $\overrightarrow{Α΄Γ΄}$ και Β΄Δ΄.

Οι "συμφωνίες" των τριγώνων ΑΔΖ, Α΄Δ΄Ζ΄ και των ΑΔΒ, Α΄Δ΄Β΄ δίνουν αντίστοιχα ΔΖ≃Δ΄Ζ΄ και ΔΒ≃Δ΄Β΄, ∢ΑΒΔ≃∢Α΄Β΄Δ΄. Λαμβάνοντας υπόψη τις "συμφωνίες" αυτές, τις ανισοτικές σχέσεις (όπως ορίσθηκαν στο 6.26.2) και τα ΙΙΙ(2),ΙΙΙ(1), 6.29, μπορούμε ν΄ αποδείξουμε εύκολα με τη μέθοδο της "απαγωγής σε άτοπο" ότι ισχύει ΒΖ≃Β΄Ζ΄. Αλλά τότε, τα τρίγωνα ΑΒΖ, Α΄Β΄Ζ΄ είναι "σύμφωνα" (αφού ∢ΑΒΔ≃∢Α΄Β΄Δ΄) και το ζητούμενο έπεται.

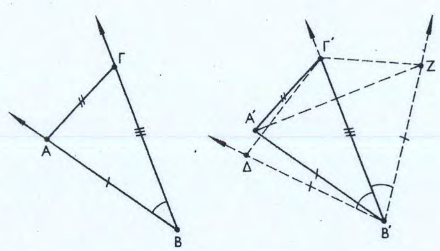
6.34. Πρόταση. Αν δυο πλευρές ενός τριγώνου είναι "σύμφωνες" (δηλαδή, αν το τρίγωνο είναι **ισοσκελές**), τότε και οι απέναντί τους γωνίες του τριγώνου είναι, επίσης, "σύμφωνες". (Ισχύει και το **αντίστροφο**, πρβλ. 6.37.3.)

Για την **απόδειξη** αρκεί να εφαρμόσουμε το ΙΙΙ(4), θεωρώντας ως τρίγωνο Α΄Β΄Γ΄ το ίδιο το ΑΒΓ, για το οποίο υποθέτουμε ότι ισχύει ΑΒ≃ΑΓ.

6.35. Τρίτο κριτήριο συμφωνίας τριγώνων. Αν οι πλευρές δυο τριγώνων είναι ανά δυο "σύμφωνες", τότε τα τρίγωνα είναι "σύμφωνα".

Απόδειξη. Θεωρούμε τα τρίγωνα ΑΒΓ, Α΄Β΄Γ΄ και υποθέτουμε ότι:

ΑΒ ≃ Α΄Β΄, ΑΓ ≃ Α΄Γ΄ και ΒΓ ≃ Β΄Γ΄. Για ν' αποδείξουμε ότι τα τρίγωνα αυτά είναι "σύμφωνα", αρκεί ν' αποδείξουμε ότι οι αντίστοιχες γωνίες τους (: οι "απέναντι" από τις "σύμφωνες" πλευρές) είναι "σύμφωνες" (πρβλ. 6.28).



"Μεταφέρουμε" την ∢ΑΒΓ διαδοχικά στις ∢ΔΒ΄Γ΄, ∢ΖΒ΄Γ΄ έτσι, ώστε τα Δ και Ζ να βρίσκονται σε διαφορετικά ημιεπίπεδα ως προς την ευθεία των Β΄,Γ΄ (πρβλ. ΙΙΙ(3)). Επιλέγουμε τα Δ και Ζ έτσι, ώστε ΒΑ ≃ Β΄Δ και ΒΑ ≃ Β΄Ζ (πρβλ. ΙΙΙ(1)) και υποθέτουμε ότι το Δ ανήκει στο ίδιο ημιεπίπεδο (ως προς την ίδια ευθεία) με το Α΄. Προκειμένου ν' αποδείξουμε ότι οι Β΄Α΄, Β΄Δ **ταυτίζονται**, οπότε θα ισχύει ∢ΑΒΓ ≃ ∢Α΄Β΄Γ΄ (όπως επιδιώκουμε), αρκεί ν' αποδείξουμε ότι ∢ΔΒ΄Γ΄ ≃ ∢Α΄Β΄Γ΄ (πρβλ. ΙΙΙ(3)):

Από τη "συμφωνία" των τριγώνων ΖΒ΄Γ΄ και ΑΒΓ συνάγεται ΑΓ ≃ ΖΓ΄. Συνδυάζοντας αυτό με την υπόθεση ΑΓ ≃ Α΄Γ΄ και το 6.34, συμπεραίνουμε ∢Γ΄Α΄Ζ ≃ ∢Γ΄ΖΑ΄. Επιπλέον, ισχύει ∢Β΄Α΄Ζ ≃ ∢Β΄ΖΑ΄ (πρβλ. 6.34). Επομένως, σύμφωνα με το 6.33.(α), έχουμε ∢Γ΄Α΄Β΄ ≃ ∢Γ΄ΖΒ΄. (Οι προηγούμενοι συλλογισμοί προϋποθέτουν ότι τα Β΄, Γ΄ δεν ανήκουν στην ευθεία των Α΄ και Ζ. Στην αντίθετη περίπτωση, καταλήγουμε στο ίδιο συμπέρασμα με απλούστερους συλλογισμούς.) Κατά συνέπεια, τα τρίγωνα ΖΒ΄Γ΄ και Α΄Β΄Γ΄ είναι "σύμφωνα", απ' όπου έπεται:

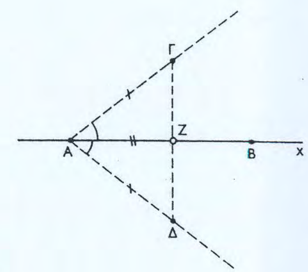
∢ΖΒ΄Γ΄ ≃ ∢Α΄Β΄Γ΄ ⇒ ∢ΔΒ΄Γ΄ ≃ Α΄Β΄Γ΄.

Αποδείξαμε, λοιπόν, ότι ισχύει ∢ΑΒΓ ≃ Α΄Β΄Γ΄. Με αυτό δεδομένο, αν λάβουμε υπόψη μας και τις αρχικές υποθέσεις, διαπιστώνουμε ότι το ζητούμενο είναι άμεση συνέπεια του 6.30.

Οι ορθές γωνίες

6.36. Ορισμός. Μια γωνία λέγεται **ορθή**, αν είναι "σύμφωνη" με την παραπληρωματική της.

6.36.1. Ύπαρξη ορθών γωνιών. Έστω $\vec{AB}$ μια ημιευθεία της ευθείας x. Σύμφωνα με το ΙΙΙ(3), "μεταφέρουμε" μια γωνία στις ∢ΓΑΒ, ∢ΔΑΒ έτσι, ώστε τα Γ και Δ ν' ανήκουν σε διαφορετικά ημιεπίπεδα ως προς x. Υποθέτουμε ότι τα Γ και Δ έχουν επιλεγεί έτσι, ώστε ΑΓ ≃ ΑΔ. Έστω Ζcx με Γ-Ζ-Δ (πρβλ. 6.20 και 6.21). Αν το Ζ συμπίπτει με το Α, τότε καθεμιά από τις ∢ΓΑΖ, ∢ΔΑΖ είναι ορθή. Αν Ζ≠Α, τότε το Ζ είτε θ' ανήκει στην ημιευθεία $\vec{AB}$ είτε όχι. Στην πρώτη περίπτωση, τα τρίγωνα ΑΓΖ και ΑΔΖ είναι "σύμφωνα" και, κατά συνέπεια, οι ∢ΑΖΓ και ∢ΑΖΔ είναι "σύμφωνες", επομένως ορθές. Στη δεύτερη περίπτωση, μπορούμε να επαναλάβουμε τους ίδιους συλλογισμούς στην άλλη ημιευθεία της x (πρβλ. 6.23) για να διαπιστώσουμε ότι οι ∢ΑΖΓ και ∢ΑΖΔ είναι ορθές, λαμβάνοντας υπόψη και το 6.32.1.



6.36.2. Πρόταση. Κάθε δυο ορθές γωνίες είναι "σύμφωνες".

Απόδειξη. Θ' αποδείξουμε ότι οι ορθές γωνίες ∢ΔΑΓ και ∢ΚΖΘ είναι "σύμφωνες" (πρβλ. το σχήμα). Υποθέτουμε ότι οι γωνίες αυτές δεν είναι "σύμφωνες". Έστω ότι ∢ΔΑΓ < ∢ΚΖΘ και ότι η ∢ΔΑΓ

"μεταφέρεται" στην $\sphericalangle ΛΖΘ$ έτσι, ώστε τα σημεία που ανήκουν στην $\vec{ΖΛ}$, εκτός του Ζ, να είναι εσωτερικά της $\sphericalangle ΚΖΘ$ (πρβλ. 6.27.1). Οι υποθέσεις αυτές, συνδυαζόμενες με το "μονοσήμαντο" της "μεταφοράς" των γωνιών, δίνουν:

$$\sphericalangle ΛΖΘ \simeq \sphericalangle ΔΑΓ < \sphericalangle ΚΖΘ \simeq \sphericalangle ΚΖΗ < \sphericalangle ΛΖΗ$$

(:η τελευταία ανισότητα δικαιολογείται από το ότι τα Λ και Η ανήκουν σε διαφορετικά ημιεπίπεδα ως προς την ευθεία των Κ και Ζ, πρβλ. 6.24). Ισχύει, λοιπόν, $\sphericalangle ΛΖΘ < \sphericalangle ΛΖΗ$.

Από την άλλη μεριά, έχουμε:

$$\sphericalangle ΛΖΘ \simeq \sphericalangle ΔΑΓ \simeq \sphericalangle ΔΑΒ \simeq \sphericalangle ΛΖΗ$$

(:η τελευταία "συμφωνία" προκύπτει από το 6.32.1). Η σχέση $\sphericalangle ΛΖΘ \simeq \sphericalangle ΛΖΗ$ αντιφάσκει στην προηγούμενη ανισοτική σχέση (δεδομένου ότι ισχύει το "μονοσήμαντο" της "μεταφοράς" των γωνιών).

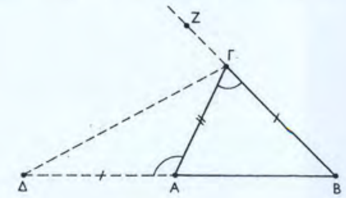
Ανάλογα καταλήγουμε σε άτοπο, υποθέτοντας $\sphericalangle ΔΑΓ > \sphericalangle ΚΖΘ$, απ' όπου έπεται το ζητούμενο: $\sphericalangle ΔΑΓ \simeq \sphericalangle ΚΖΘ$.

Παρατήρηση. Στο πνεύμα της προηγούμενης διαδικασίας θα μπορούσε ν' αποδειχθεί και στα "Στοιχεία" η ισότητα των ορθών γωνιών μεταξύ τους. Είναι, λοιπόν, παράξενο το γεγονός ότι η ισότητα αυτή διατυπώθηκε ως "4ο αίτημα" (πρβλ. σελ. 34) στα "Στοιχεία" του Ευκλείδη.

Σχέσεις "εσωτερικών" και "εξωτερικών" γωνιών τριγώνου

6.37. Ορισμός. Οι παραπληρωματικές γωνίες (πρβλ. 6.32) των γωνιών ενός τριγώνου (πρβλ. 6.25) λέγονται **εξωτερικές** γωνίες του. Αν δοθεί μια εξωτερική γωνία ενός τριγώνου, οι εκτός της παραπληρωματικής της γωνίες του τριγώνου χαρακτηρίζονται ως **"απέναντί της εσωτερικές"** γωνίες.

6.37.1. Πρόταση. Μια εξωτερική γωνία ενός τριγώνου είναι **μεγαλύτερη** από καθεμιά από τις δυο "απέναντί της εσωτερικές" γωνίες.



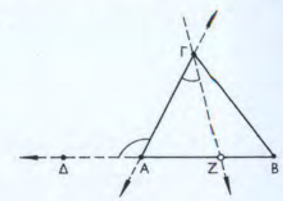
Απόδειξη. Θ' αποδείξουμε ότι ισχύει $\sphericalangle ΔΑΓ > \sphericalangle ΑΓΒ$. Η απόδειξη της $\sphericalangle ΔΑΓ > \sphericalangle ΓΒΑ$ γίνεται ανάλογα, αν, αντί της $\sphericalangle ΔΑΓ$, θεωρήσουμε την "κατά κορυφή" της (πρβλ. 6.32.2).

Η απόδειξη στηρίζεται στον ισχυρισμό (που αποδεικνύεται εύκολα) ότι ισχύει **ακριβώς μια** από τις ακόλουθες σχέσεις

$$\sphericalangle ΔΑΓ < \sphericalangle ΑΓΒ, \quad \sphericalangle ΔΑΓ \simeq \sphericalangle ΑΓΒ, \quad \sphericalangle ΔΑΓ > \sphericalangle ΑΓΒ$$

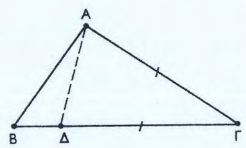
(πρβλ. και 6.26.2, όσον αφορά τον αντίστοιχο ισχυρισμό για ευθύγραμμα τμήματα). Στη συνέχεια, θα καταλήξουμε σε άτοπο, υποθέτοντας ότι ισχύει μια από τις **δυο πρώτες** σχέσεις:

΄Εστω $\sphericalangle ΔΑΓ \simeq \sphericalangle ΑΓΒ$. Εκλέγουμε το Δ έτσι, ώστε Δ-Β-Α και $ΑΔ \simeq ΒΓ$ (πρβλ. ΙΙΙ(1)). Από τη "συμφωνία" των τριγώνων ΑΒΓ και ΓΔΑ (πρβλ. 6.30) συνάγεται $\sphericalangle ΒΑΓ \simeq \sphericalangle ΑΓΔ$. ΄Εστω Ζ έτσι, ώστε Ζ-Γ-Β, οπότε τα Δ και Ζ βρίσκονται **στο ίδιο ημιεπίπεδο** ως προς την ευθεία των Α και Γ. Επειδή $\sphericalangle ΒΑΓ \simeq \sphericalangle ΑΓΖ$ (πρβλ. 6.32.1), ισχύει $\sphericalangle ΑΓΔ \simeq \sphericalangle ΑΓΖ$. Από αυτό και το "μονοσήμαντο" της "μεταφοράς" των γωνιών συμπεραίνουμε ότι οι ημιευθείες $\vec{ΓΔ}$ και $\vec{ΓΖ}$ ταυτίζονται, δηλαδή ότι τα Β,Γ,Δ, είναι συνευθειακά, που είναι **άτοπο**.



΄Εστω, τώρα, $\sphericalangle ΔΑΓ < \sphericalangle ΑΓΒ$. Τότε, σύμφωνα με το 6.27.1, υπάρχει Ζ με την ιδιότητα Α-Ζ-Β έτσι, ώστε να ισχύει $\sphericalangle ΔΑΓ \simeq \sphericalangle ΑΓΖ$. Αναγόμαστε, έτσι, στην προηγούμενη περίπτωση με το τρίγωνο ΑΖΓ αντί του τριγώνου ΑΒΓ.

6.37.2. Πόρισμα. Σ' ένα τρίγωνο απέναντι **μεγαλύτερης** πλευράς βρίσκεται **μεγαλύτερη** γωνία.



Απόδειξη. Έστω ΒΓ>ΑΓ (πρβλ. 6.26.2) και Δ με Β-Δ-Γ έτσι, ώστε ΑΓ≃ΓΔ (πρβλ. III(1)). Τότε, έχουμε ∢ΓΑΔ≃∢ΓΔΑ (πρβλ. 6.34), ∢ΓΑΔ < ∢ΓΑΒ (πρβλ. 6.27.1) και ∢ΓΔΑ > ∢ΓΒΑ (από την προηγούμενη Πρόταση). Από τη σύγκριση των σχέσεων αυτών προκύπτει το ζητούμενο ∢ΓΑΒ > ∢ΓΒΑ.

6.37.3. Το αντίστροφο του 6.34. Ένα τρίγωνο με δυο "σύμφωνες" γωνίες είναι ισοσκελές.

Η **απόδειξη** στηρίζεται στο 6.37.1 και γίνεται με "απαγωγή σε άτοπο".

6.37.4. Μια παραλλαγή του 6.31. Δυο τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ είναι "σύμφωνα", αν ισχύουν οι σχέσεις:

ΑΒ≃Α΄Β΄, ∢ΒΑΓ≃∢Β΄Α΄Γ΄ και ∢ΑΓΒ≃∢Α΄Γ΄Β΄.

Η **απόδειξη** γίνεται και πάλι με "απαγωγή σε άτοπο".

6.37.5. Σημαντική παρατήρηση. Στην απόδειξη της Πρότασης 6.37.1 χρησιμοποιήθηκε ουσιαστικά η δυνατότητα "μεταφοράς" οποιουδήποτε ευθυγράμμου τμήματος σε οποιαδήποτε ημιευθεία, που κατοχυρώθηκε με το αξίωμα III(1). Η δυνατότητα αυτή σχετίζεται με το **"απέραντο"** κάθε ευθείας στα πλαίσια της Γεωμετρίας που οικοδομούμε αξιωματικά (πρβλ. την Παραδοχή στη σελ. 112).

Όπως είχε επισημανθεί από πολύ νωρίς, η Πρόταση 6.37.1 είναι ιδιαίτερα σημαντική, δεδομένου ότι οδηγεί άμεσα στην ακόλουθη

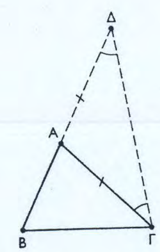
Πρόταση. Το "άθροισμα" δυο γωνιών ενός τριγώνου (:αν η μια "μεταφερθεί" κατάλληλα ώστε να ορίζεται, πρβλ. 6.27.2) είναι **μικρότερο** από 2 ορθές (πρβλ. 6.36).

Είχαμε ήδη την ευκαιρία να διαπιστώσουμε πόσο επηρεάζει η Πρόταση αυτή βασικές ιδιότητες της Γεωμετρίας που οικοδομούμε βήμα-βήμα. Για παράδειγμα, στο 5.14 διαπιστώσαμε το ρόλο της προηγούμενης Πρότασης κατά τη διερεύνηση της σχέσης ανάμεσα στις 2 ορθές και στο "άθροισμα" των γωνιών ενός τριγώνου (που ορίζεται, αν διευρυνθεί η έννοια της γωνίας και "μεταφερθούν" κατάλληλα οι γωνίες του τριγώνου).

Το τελικό συμπέρασμα της διερεύνησής αυτής (:το "άθροισμα" των γωνιών ενός τριγώνου δεν είναι μεγαλύτερο των 2 ορθών) δείχνει ότι **στις Γεωμετρίες που προκύπτουν από τ' αξιώματα του Hilbert δεν συμπεριλαμβάνεται και η "Ελλειπτική Γεωμετρία"** (πρβλ. 5.4.(II))!

Τέλος, ας σημειωθούν και τ' ακόλουθα: Στην **20η Πρόταση** των "Στοιχείων" ο Ευκλείδης αποδεικνύει ότι **το "άθροισμα" δυο πλευρών ενός τριγώνου** (που ορίζεται με κατάλληλη "μεταφορά" της μιας) **είναι μεγαλύτερο από την τρίτη.** Η **απόδειξη** γίνεται με τη βοήθεια του αντιστρόφου του Πορίσματος 6.37.1 (που αποδεικνύεται εύκολα με "απαγωγή σε άτοπο", αν ληφθούν υπόψη τα 6.34 και 6.37.1) και, σε γενικές γραμμές, έχει ως εξής:

΄Εστω ότι το Δ (όπως στο σχήμα) έχει επιλεγεί έτσι, ώστε ΑΓ≃ΑΔ, οπότε ΑΒ+ΑΓ= =ΑΔ. Τότε, έχουμε ∢ΒΔΓ≃∢ΑΓΔ (πρβλ. 6.34) και, κατά συνέπεια, ∢ΒΔΓ<∢ΒΓΔ (: το Δ δεν ανήκει στην ευθεία των Δ και Γ, σύμφωνα με το 6.13.1). Επομένως, λαμβάνοντας υπόψη το αντίστροφο του 6.37.1, συμπεραίνουμε ΒΓ<ΑΔ=ΑΒ+ΑΓ.



Τα παραπάνω δείχνουν ότι η Πρόταση 6.37.1 (που αποδεικνύεται στα αρχικά στάδια της αξιωματικής θεμελίωσης του Hilbert) παίζει κεντρικό ρόλο **και** όσον αφορά στο "άθροισμα" των γωνιών ενός τριγώνου **και** όσον αφορά στις ανισοτικές σχέσεις των πλευρών του. Οι επισημάνσεις αυτές υπογραμμίζουν τη σημασία της Πρότασης στα πλαίσια των αξιωματικών θεμελιώσεων και του Ευκλείδη και του Hilbert (πρβλ., επίσης, 5.11, 5.13 και 5.14).

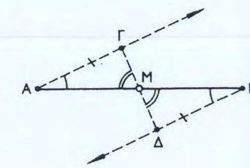
<u>Η ύπαρξη "μέσου" ευθυγράμμου τμήματος και "διχοτόμου" γωνίας</u>

6.38.1. Κάθε ευθύγραμμο τμήμα, ΑΒ, **έχει ακριβώς ένα** <u>"μέσον"</u>, **δηλαδή υπάρχει** ένα <u>μονοσήμαντα</u> ορισμένο σημείο Μ έτσι, ώστε Α-Μ-Β **και** ΑΜ≃ΜΒ.

Απόδειξη. Θεωρούμε μια γωνία και τη "μεταφέρουμε" στις ∢ΒΑΓ και ∢ΑΒΔ έτσι, ώστε τα Γ και Δ να βρίσκονται σε **διαφορετικά** ημιεπίπεδα ως προς την ευθεία, x, των Α,Β (πρβλ. III(3)). Αξιοποιώντας το III(1), επιλέγουμε τα Γ και Δ έτσι, ώστε ΑΓ≃ΒΔ. ΄Εστω Μ το κοινό σημείο των ΓΔ και x (πρβλ. 6.21).

Το σημείο αυτό δεν μπορεί να συμπίπτει ούτε με το Α ούτε με το Β: Αν, π.χ., συμπίπτει με το Β, τότε η ∢ΔΒΑ θα είναι εξωτερική γωνία του τριγώνου ΑΒΓ, ενώ είναι "σύμφωνη" με την "απέναντί της εσωτερική" ∢ΒΑΓ, που είναι άτοπο (πρβλ. 6.37.1). Ανάλογα καταλήγουμε σε άτοπο, υποθέτοντας Α-Β-Μ ή Μ-Α-Β.

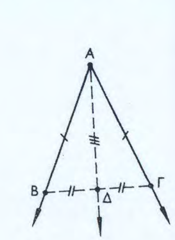
Επομένως, σύμφωνα με το 6.15, θα ισχύει Α-Μ-Β. Τότε, αφού ∢ΓΜΑ≃∢ΒΜΔ (πρβλ. 6.34), τα τρίγωνα ΑΜΓ και ΒΜΔ θα είναι "σύμφωνα" (πρβλ. 6.37.4), οπότε έχουμε ΑΜ≃ΜΒ.



Το **μονοσήμαντο** του Μ προκύπτει ως εξής: ΄Εστω Ν ένα σημείο, **διαφορετικό** από το Μ, που ικανοποιεί τις σχέσεις Α-Ν-Β και ΑΝ≃ΝΒ. Τότε, αφού Α-Μ-Β, αποκλείεται να ισχύει Ν-Α-Μ (πρβλ. Λήμμα 1 από το 6.20). Επομένως, θα ισχύει **είτε** Α-Ν-Μ **είτε** Α-Μ-Ν. Θα εξετάσουμε μόνο την πρώτη περίπτωση, μια και η δεύτερη αντιμετωπίζεται ανάλογα: Επειδή δεχτήκαμε ότι Α-Ν-Μ, ισχύει ΑΝ<ΑΜ (πρβλ. 6.26.2) και Ν-Μ-Β (πρβλ. 6.17.1), δηλαδή ΜΒ<ΝΒ. Συνδυάζοντας τις προηγούμενες σχέσεις, έχουμε ΑΝ<ΑΜ≃ΜΒ<ΝΒ, απ' όπου συνάγεται εύκολα ΑΝ<ΝΒ, που **αντιφάσκει** στην ΑΝ≃ΝΒ, και το ζητούμενο αποδείχτηκε.

6.38.2. Κάθε γωνία έχει ακριβώς μια <u>"διχοτόμο"</u>. Δηλαδή, αν, μας δοθεί η ∢ΒΑΓ, **υπάρχει μια** <u>μονοσήμαντα</u> **ορισμένη** ημιευθεία $\vec{A\Delta}$ έτσι, **ώστε το** Δ **να βρίσκεται στο εσωτερικό της** ∢ΒΑΓ **και να ισχύει** ∢ΒΑΔ≃∢ΓΑΔ.

Απόδειξη. Επιλέγουμε τα Β και Γ έτσι, ώστε να ισχύει ΑΒ≃ΑΓ. ΄Εστω Δ το "μέσον" του ΒΓ, που, όπως αποδείξαμε στο 6.38, υπάρχει. Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ είναι "σύμφωνα" (πρβλ. 6.35). Επομένως, ισχύει η σχέση



∢ΒΑΔ ≃ ∢ΓΑΔ, ενώ το Δ είναι εσωτερικό σημείο της ∢ΒΑΓ (πρβλ. 6.24.) Το **μονοσήμαντο** αποδεικνύεται με συλλογισμούς ανάλογους εκείνων που έγιναν στο τελευταίο μέρος της προηγούμενης απόδειξης.

<u>Τα αξιώματα της "συνέχειας" του Hilbert</u>

6.39. Ο Hilbert διετύπωσε τ' ακόλουθα δυο αξιώματα, χαρακτηρίζοντάς τα ως **"αξιώματα συνέχειας"**. Το **πρώτο** είναι το "αξίωμα Ευδόξου-Αρχιμήδη", που όχι μόνο είναι **εξαιρετικά "λειτουργικό"**, όπως διαπιστώσαμε (έστω και δειγματοληπτικά) στην 5η παράγραφο, αλλά και **θεσμοθετεί τη δυνατότητα "μέτρησης"**. Δυνατότητα, που ενυπάρχει ήδη στη διατύπωση του αξιώματος αυτού από τον Εύδοξο (πρβλ. σελ. 21). Το **δεύτερο** από τ' αξιώματα αυτά σχετίζεται με το **"συνεχές"** των **"ευθειών"** της Γεωμετρίας που αναπτύσσεται με βάση το σύνολο των αξιωμάτων του Hilbert και, έτσι, συμβάλλει ουσιαστικά στη διασύνδεση της Γεωμετρίας αυτής με την **"Αναλυτική Γεωμετρία"** του επιπέδου, που θα μας απασχολήσει στο 2ο Μέρος του βιβλίου.

Για τη διατύπωση του πρώτου αξιώματος είναι χρήσιμο να διευκρινίσουμε την έννοια "ν-πολλαπλάσιο" ενός ευθυγράμμου τμήματος. Έστω Α,Β δυο σημεία και ΓΔ ένα ευθύγραμμο τμήμα. Το **ν-πολλαπλάσιο** του ΓΔ **στην ημιευθεία** $\vec{AB}$ είναι το ευθύγραμμο τμήμα που κατασκευάζεται επαγωγικά με την ακόλουθη διαδικασία: Έστω $AΔ_1$ η "μεταφορά" του ΓΔ στην $\vec{AB}$ σύμφωνα με το III(1) και $Δ_λΔ_{λ+1}$ η αντίστοιχη "μεταφορά" πάλι του ΓΔ στην $\overrightarrow{Δ_λ Z_λ}$, όπου $Δ_{λ-1}-Δ_λ-Z_λ$ για $λ=2,\dots,ν-1$. Το **ν-πολλαπλάσιο** του ΓΔ στην $\vec{AB}$ είναι το ευθύγραμμο τμήμα $AΔ_ν$.

Τ' αξιώματα "συνέχειας" του Hilbert είναι τα εξής δυο:

IV(1) ("Αξίωμα Ευδόξου-Αρχιμήδη"): Αν δοθούν δυο ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ και ΓΔ, **υπάρχει** ένας φυσικός αριθμός ν έτσι, ώστε να ισχύει $A-B-Δ_ν$, όπου $AΔ_ν$ είναι το **ν-πολλαπλάσιο** του ΓΔ στην $\vec{AB}$.

IV(2) (Αξίωμα της "γραμμικής πληρότητας"): Δεν είναι δυνατό να **επεκταθεί** (με επιπλέον σημεία) μια ευθεία σε μια καινούρια ευθεία έτσι, ώστε να **ισχύουν** για τα σημεία της καινούριας ευθείας οι βασικές ιδιότητες που απορρέουν από τ' αξιώματα της "σύμπτωσης", του "μεταξύ", της "συμφωνίας" **και** από το προηγούμενο αξίωμα.

Άμεση συνέπεια του αξιώματος της "γραμμικής πληρότητας" είναι η επόμενη Πρόταση, που **ισχύει και για την αξιωματικά θεμελιωμένη Ευκλείδεια Γεωμετρία του 3-διάστατου χώρου και επεκτείνει την "πληρότητα" από τις ευθείες σ' ολόκληρο το επίπεδο.**

6.39.1. **Πρόταση.** Το επίπεδο, για τα σημεία του οποίου ισχύουν τ' αξιώματα που έχουμε διατυπώσει μέχρι τώρα, **δεν επεκτείνεται** έτσι, ώστε να εξακολουθούν να ισχύουν τ' αξιώματα αυτά.

Απόδειξη. Έστω ότι δεν **ισχύει** η Πρόταση. Θα χαρακτηρίζουμε ως "καινούρια" τα επιπλέον σημεία, αντιδιαστέλλοντάς τα από τα "παλαιά". Έστω Α,Β,Γ τρία μη συνευθειακά σημεία (πρβλ. I(2)) και Δ ένα ("παλαιό") εσωτερικό σημείο του ΒΓ (πρβλ. 6.14). Επιπλέον, έστω Κ ένα "καινούριο" σημείο και ω η ευθεία που ορίζεται από τα Δ και Κ (πρβλ. I(1)). Η ω δεν περνάει από καμιά κορυφή του τριγώνου ΑΒΓ, γιατί αν, π.χ., περνούσε από το Α, η ("παλαιά") ευθεία των Α και Δ θα επεκτεινόταν, σε αντίθεση με όσα επιτάσσει το IV(2). Επομένως, σύμφωνα με το II(4), η ω θα περνάει από ένα εσωτερικό σημείο του ΑΒ ή του ΑΓ. Έστω ότι περνάει από το εσωτερικό σημείο Χ του ΑΓ. Αν το Χ είναι "καινούριο" σημείο, η ("παλαιά") ευθεία των Α και Γ θα επεκτείνεται, που είναι άτοπο. Αν το Χ είναι "παλαιό", τότε θα επεκτείνεται η ("παλαιά") ευθεία των Δ και Χ, που είναι και πάλι **άτοπο**. Άρα, η Πρόταση ισχύει.

6.39.2. Παρατηρήσεις. (α) Το αξίωμα IV(1) επιτρέπει τη "μέτρηση" για τον εξής λόγο: Έστω ότι θέλουμε να "μετρήσουμε" το ΑΒ με "μονάδα" το ΓΔ. Έστω ν ο **ελάχιστος** φυσικός αριθμός, για τον οποίο ικανοποιείται το IV(1). Τότε, θα έχουμε είτε $Β=Δ_{ν-1}$ είτε $Α-Δ_{ν-1}-Β$. Στην πρώτη περίπτωση το "μήκος" του ΑΒ είναι ν-1, ενώ στη δεύτερη συνεχίζουμε τη "μέτρηση" με ανάλογη διαδικασία, θεωρώντας ως "μονάδα" το ΑΜ, όπου Μ είναι το "μέσον" του ΑΒ (πρβλ. 6.38.1.), κ.ο.κ.

(β) Όπως παρατήρησε και ο Hilbert, **αν παραλειφθεί το IV(1)**, το σύστημα των υπόλοιπων αξιωμάτων (συμπεριλαμβανομένου και του IV(2)) οδηγεί σε **αντιφάσεις**. Για παράδειγμα,αν δεν είναι απαραίτητο να ικανοποιείται το IV(1), το θεωρούμενο επίπεδο δεν αποκλείεται να επεκτείνεται και αυτό αντιφάσκει στην προηγούμενη Πρόταση, για την απόδειξη της οποίας **δεν χρησιμοποιήθηκε** το IV(1).

(γ) Ο Hilbert χαρακτήριζε το IV(2) ως **"τελικό δομικό λίθο"** του αξιωματικού του συστήματος. Ο λόγος που το αξίωμα αυτό κατατάχτηκε στ' αξιώματα "συνέχειας" είναι ότι, με τη βοήθειά του, μπορεί ν' αποδειχτεί ότι κάθε ευθεία είναι "συνεχές" (:χωρίς "κενά").

(δ) Η "ανεξαρτησία" των αξιωμάτων που διατυπώσαμε ως τώρα καθώς, επίσης, και η "ανεξαρτησία" τους από το "αξίωμα των παραλλήλων" (που θα μελετήσουμε στην επόμενη παράγραφο) θα μας απασχολήσουν στο 2ο Μέρος του βιβλίου (πρβλ. την 8η παράγραφο). Οι αποδείξεις των "ανεξαρτησιών" αυτών θα γίνουν με την κατασκευή κατάλληλων μοντέλων (πρβλ. και το Παράδειγμα στο 6.5). Η αιτία για τη μεταφορά των αποδείξεων αυτών είναι **μεθοδολογική**: τα σχετικά μοντέλα υπάγονται στην **"Αναλυτική Γεωμετρία"** και το περιεχόμενο της 8ης παραγράφου είναι ακριβώς η κριτική παρουσίαση (με κάποιες εφαρμογές) της **"αλγεβροποίησης"** της Γεωμετρίας.

Επίλογος

* Όπως σημειώσαμε ήδη, το περιεχόμενο της παραγράφου αυτής αντιστοιχεί (με αρκετές προσθήκες και κριτικές παρατηρήσεις) στο 1ο κεφάλαιο του (κλασικού πια) βιβλίου του Hilbert με τίτλο "Grundlagen der Geometrie". Στον επίλογο του κυρίως κειμένου του βιβλίου αυτού ο Hilbert παρατηρεί:

"...κατά τις έρευνές μας (όσον αφορά τις "αρχές" της Γεωμετρίας) μας οδηγούσε η βασική θέση: να διερευνούμε κάθε ερώτηση που προέκυπτε με τέτοιο τρόπο, ώστε ταυτόχρονα να ελέγχουμε, αν η απάντησή της στα πλαίσια μιας προδιαγεγραμμένης πορείας είναι δυνατή με συγκεκριμένα και λίγα βοηθητικά μέσα."

Το απόσπασμα αυτό αποδίδει καθαρά τις προθέσεις του Hilbert.

* Όσον αφορά, τώρα, στην "υφή" του αξιωματικού συστήματος του Hilbert, αυτή χαρακτηρίζεται από μια σαφή τάση "φορμαλισμού" και από κάποια στοιχεία "διαίσθησης", που το διαφοροποιούν,

π.χ., από τ' αξιωματικά συστήματα που διατυπώνονται με τη βοήθεια "πρωτοβάθμιων γλωσσών" και οδηγούν σε θεωρίες που αναπτύσσονται στα πλαίσια της σύγχρονης "Λογικής". Μια "μέση οδό" φαίνεται να υποδεικνύει ο **Tarski**, προτείνοντας ένα "συμβολικά" διατυπωμένο σύστημα αξιωμάτων για τη Γεωμετρία, που στην ουσία του είναι (σχεδόν) παράλληλο μ' εκείνο του Hilbert, και αναπτύσσοντας τη σχετική θεωρία με τη βοήθεια μιας "συμβολικής γλώσσας" και με τρόπο, ώστε να υπάρχουν εμφανείς ομοιότητες με την αντίστοιχη πορεία του Hilbert, μολονότι υπεισέρχονται νέα στοιχεία (πρβλ. το βιβλίο [6] από τη Βιβλιογραφία που ακολουθεί).

Στη σύγχρονη βιβλιογραφία, εκτός από τις προηγούμενες τάσεις, παρουσιάζονται και άλλες απόψεις για τη θεμελίωση και την ανάπτυξη της Γεωμετρίας, οι πιο σημαντικές από τις οποίες έχουν "αλγεβρικό" χαρακτήρα και θα μας απασχολήσουν στο 2ο Μέρος του βιβλίου αυτού. Τέλος, θα ήταν παράλειψη, αν δεν αναφερθούν δυο επιμέρους μεν, αλλά ενδιαφέρουσες προτάσεις. Η **μια** προέκυψε από την κριτική του **Baldus** πάνω στην αξιωματική θεμελίωση του Hilbert και προτείνει να θεωρηθούν οι ευθείες ως υποσύνολα του συνόλου των σημείων και η **άλλη** συνίσταται στο να ορισθεί η έννοια του "μεταξύ" ως μια **"αντι-αυτοπαθής" σχέση**, δηλαδή ως μια μεταβατική ανισοτική σχέση "<" με την ιδιότητα: για κάθε δυο σημεία Α και Β ικανοποιείται **ακριβώς μια** από τις σχέσεις: Α<Β, Α=Β και Β<Α (πρβλ., π.χ., το βιβλίο [5] από τη Βιβλιογραφία που ακολουθεί).

* Οι ορισμοί που διατυπώσαμε ήδη, οι προτάσεις που αποδείξαμε κι εκείνες που θ' αποδειχτούν στην επόμενη παράγραφο συναποτελούν ένα ικανοποιητικό υπόβαθρο για την παραπέρα ανάπτυξη της θεωρίας, που μπορεί να γίνει (περίπου) με τη διαδοχή των ορισμών και των προτάσεων στα "Στοιχεία" του Ευκλείδη, αφού ξεκαθαριστούν κάπως οι ιδιότητες των "ανισοτικών σχέσεων". Ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης, επιχειρώντας (έστω και "εν μέρει") ν' ακολουθήσει την πορεία αυτή, θα διαπιστώσει ταυτόχρονα ορισμένα "κενά" στις αποδείξεις του Ευκλείδη, αλλά και τη διαχρονικότητα των αποδεικτικών διαδικασιών που αναπτύχθηκαν για πρώτη φορά τόσο **συνολικά** και **συγκροτημένα** στα "Στοιχεία".

Δυο από τα "κενά" αυτά είναι:

— Η κατοχύρωση (αξιωματικά ή αποδεικτικά) της **ύπαρξης σημείων τομής** ευθειών και "καμπύλων" (πρβλ. 2.8 και 2.9), που θα μας απασχολήσει στην επόμενη παράγραφο (πρβλ. 7.5). Και
— Η διερεύνηση της έννοιας **"εμβαδόν"** (πρβλ. 2.11), που δεν ορίζεται παρά **"έμμεσα"** στα "Στοιχεία" και αποκτά ιδιαίτερο ενδιαφέρον στα πλαίσια της **"Υπερβολικής Γεωμετρίας"**, όπως θα δούμε αναλυτικά στην αντίστοιχη παράγραφο του 2ου Μέρους του βιβλίου αυτού.

* Αν θέλαμε, κλείνοντας, να συνοψίσουμε μερικά από τα χαρακτηριστικά των αξιωμάτων, των προτάσεων και των τάσεων, που παρουσιάσαμε λεπτομερειακά στην παράγραφο αυτή, θα σημειώναμε τα εξής:
— Στην αξιωματική θεμελίωση του Hilbert οι έννοιες "σημείο", "ευθεία" και "ανήκει" νοούνται με μια **ευρύτητα**, που υπερβαίνει κατά πολύ την "εποπτικότητά" τους. **Αυτό δεν είναι ανεξάρτητο από την ανακάλυψη των "Μη Ευκλείδειων Γεωμετριών"**, που έσπασε το φράγμα της περιοριστικής άποψης ότι η "Ευκλείδεια" είναι η μοναδική "Γεωμετρία" που υπάρχει (πρβλ. την 5η παράγραφο).

— Στην ίδια αξιωματική θεμελίωση υπογραμμίστηκε πειστικά η **σημασία της έννοιας του "μεταξύ"** (που μελετήθηκε κυρίως από τον Pasch) στα πλαίσια ενός συστήματος αξιωμάτων, που επιτρέπει την (χωρίς "κενά") ανάπτυξη της Γεωμετρίας στο πνεύμα των "Στοιχείων" του Ευκλείδη.

— Από τις αρχικές θεωρήσεις του Hilbert **απουσιάζει η έννοια της "μετρικής"** και της συνακόλουθης "μέτρησης", μολονότι στ' αξιώματά του συμπεριλαμβάνεται το "αξίωμα Ευδόξου-Αρχιμήδη" που την επιτρέπει (πρβλ. 6.39.2.(α)).

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

(που χρησιμοποιήθηκε για την παράγραφο 6)

Πρώτη ομάδα

Εκτός από τα βιβλία [1] και [3] από τη Βιβλιογραφία της παραγράφου 5, και τα:

[1] N.W. **Efimow**: Höhere Geometrie I, Vieweg-Winter, 1970.

[2] W.K.C. **Guthrie**: The greek Philosophers from Thales to Aristotle, Methnen, 1984.
(Υπάρχει και ελληνική μετάφραση: Παπαδήμας, 1987.)

[3] R. **Torretti**: Philosophy of Geometry from Riemann to Poincaré, Reidel, 1978.

Δεύτερη ομάδα: για συμπλήρωση και επέκταση

Εκτός από τα βιβλία [6] και [5] από τις Βιβλιογραφίες των παραγράφων 1 και 5 αντίστοιχα, και τα:

[4] D. **Hilbert**: Grundlagen der Geometrie, Teubner, (11η έκδοση) 1972.
(Υπάρχει και αγγλική μετάφραση: La Salle-Open Court, 1971.)
[Πρόκειται για μια βελτιωμένη έκδοση του αρχικού βιβλίου του Hilbert, στην οποία έχουν προστεθεί ενδιαφέροντα Παραρτήματα, που επεκτείνονται **και** στις "Μη Ευκλείδειες Γεωμετρίες" **και** σε στοιχεία της "Θεωρίας των Επιφανειών". Η έκδοση αυτή έχει εμπλουτισθεί με νεώτερες συμπληρώσεις, που οφείλονται στον Bernays.]

[5] H. **Meschkowski**: Grundlagen der Euklidischen Geometrie, Wissenschafsverlag-Bibliographisches Institut, 1974.
[Περιέχει την αξιωματική ανάπτυξη της Ευκλείδειας Γεωμετρίας στο πνεύμα μεν του Hilbert, αλλά θεωρώντας τις ευθείες υποσύνολα του συνόλου των σημείων και την έννοια του "μεταξύ" ως μια "αντι-αυτοπαθή" σχέση (πρβλ. τον Επίλογο της παραγράφου αυτής).]

[6] W. **Schwabhäuser**-W. **Szmilew**-A. **Tarski**: Mathematische Methoden in der Geometrie, Springer, 1983.
[Αποτελεί μια επεξεργασμένη παρουσίαση της "συμβολικής" αξιωματικής θεμελίωσης της Γεωμετρίας, όπως την πρότεινε ο Tarski (πρβλ. τον Επίλογο της παραγράφου αυτής).]