Θ.

$\phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)\,dx = 1$

$\forall\, \varepsilon > 0 \qquad \phi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\phi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$

$f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p \le \infty$

(α) $\underline{1 \le p < \infty}$

$f * \phi_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{L^p} f$, $L^p = L^p(\mathbb{R}^n)$

(β) $p = \infty$, f ομοιόμορφα συνεχής στο $V \subset \mathbb{R}^n$

$f * \phi_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{\text{ομοιόμ}} f$ στο V

$\underline{\text{Απ}}$

(α) $\underline{1 \le p < \infty}$

$$(f * \phi_\varepsilon)(x) - f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\,\phi_\varepsilon(y)\,dy - f(x)$$
$$= \int_{\mathbb{R}^n} [f(x-y) - f(x)]\,\phi_\varepsilon(y)$$
$$= \int_{\mathbb{R}^n} [f(x-\varepsilon z) - f(x)]\,\phi(z)\,dz$$

$\| f * \phi_\varepsilon - f \|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$

$= \left\| \int_{\mathbb{R}^n} [f(x - \varepsilon z) - f(x)]\,\phi(z)\,dz \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$

(*) $\le \int_{\mathbb{R}^n} \| f(\cdot - \varepsilon z) - f(\cdot) \|_{L^p(\mathbb{R}^n_x)} |\phi(z)|\,dz$

($\underline{\text{Απ (*)}}$

$\|h\|_{L^p(\Omega)} = \sup\limits_{\|g\|_{L^q(\Omega)} \le 1} \int h g\,dx \qquad$ (δυισμός)

$$\left\| \int [f(x-\varepsilon z) - f(x)]\, \varphi(z)\, dz \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n_x)}$$

$$= \sup_{\|\xi\|_{L^q_x} \le 1} \int_{\mathbb{R}^n_x} \left(\int_{\mathbb{R}^n_z} [f(x-\varepsilon z) - f(x)]\, \varphi(z)\, dz \right) \xi(x)\, dx$$

$$\overset{\text{Fubini}}{=} \sup_{\|\xi\|_{L^q_x} \le 1} \int_{\mathbb{R}^n_z} \left(\int_{\mathbb{R}^n_{\cancel{z}}} [f(x-\varepsilon z) - f(x)]\, \xi(x)\, dx \right) \varphi(z)\, dz$$

$$\le \int_{\mathbb{R}^n_z} |\varphi(z)| \left[\sup_{\|\xi\|_{L^q_x} \le 1} \int_{\mathbb{R}^n_{\cancel{z}}} [f(x-\varepsilon z) - f(x)]\, \xi(x) \right] dz$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n_z} |\varphi(z)| \; \| f(\cdot - \varepsilon z) - f(\cdot) \|_{L^p(\mathbb{R}^n_x)}\, dz.$$

<u>Λήμμα</u> (L^p συνέχεια της μετατόπισης)

Έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f = f(y)$, x φιξαρισμένο
$f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1 \le p < \infty)$
$y \to f_x(y) := f(x+y)$

Ισχύει

$$\lim_{x \to 0} \| f_x - f \|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = 0$$

Υποθέτουμε το λήμμα

- $$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^n_z} |\varphi(z)| \, \| f(\cdot - \varepsilon z) - f(\cdot) \|_{L^p(\mathbb{R}^n_x)}\, dz = 0$$

Θα εφαρμόσουμε Κυριαρχημένη Σύγκλιση

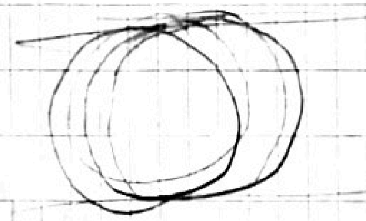
$$g_\varepsilon(z) := |\varphi(z)| \, \| f(\cdot - \varepsilon z) - f(\cdot) \|_{L^p(\mathbb{R}^n_x)}$$

$$|g_\varepsilon(z)| \le 2 \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n_x)} |\varphi(z)|$$

$$\int, \ \ge 0 \ \int |\varphi(z)| < +\infty$$

$\Rightarrow$ ο.κ. από τον Λήμματος

Θεώρημα αποδείχθη. □



Απόδειξη Λήμματος

$a^q + a^{q-1} b$

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

a) Έστω η $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$

- $$\lim_{x \to 0} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x+y) - f(y)|^p \, dy = 0$$

supp $f \subset B(0,R)$

$\boxed{\text{Κυριαρχημένης σύγκλισης}}$

$$g_x(y) := |f(x+y) - f(y)|^q \le 2^{q-1} \left(|f(x+y)|^q + |f(y)|^q \right)$$

$$\Big(\ (a+b)^q = a^q \left(1 + \frac{b}{a}\right)^q \le a^q 2^q \quad \text{αν } a \ge b$$

$$(a+b)^q \le b^q 2^q \quad \text{αν } b \ge a$$

$$\Rightarrow (a+b)^q \le \frac{2^q a^q + 2^q b^q}{2} = 2^{q-1}(a^q + b^q) \ \Big)$$

$$\le 2^{q-1} M \left[\chi_{B(0,2R)} \right] \qquad (|x| < 1)$$

b.) $f \in L^p$

$\exists\ g$, continuous

Lusin

$$\|f-g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\frac{\varepsilon}{3} > \int_{\mathbb{R}} |f-g|^p\,dy = \int_{\mathbb{R}} |f_x - g_x|^p\,dy$$

So

$$\|f_x - f\|_{L^p} \le \|f_x - g_x\|_{L^p} + \|g_x - g\|_{L^p} + \|g-f\|_{L^p}$$

$$\le \frac{2\varepsilon}{3} + \|g_x - g\|_{L^p}$$

$\square$

$$(y_{03}^* - y_3^*)^2 = \frac{\lambda_0^2}{4\left(4\left(\frac{\sigma_0}{\sigma}\right)^2 - 1\right)}$$

$\lambda_0 = \sqrt{3}$ $\quad \lambda_0(y_0^*) = \sqrt{3}$

$$(y_{03}^* - y_3^*)^2 = \frac{3}{4\left(4\left(\frac{\sigma_0}{\sigma}\right)^2 - 1\right)}$$

$$y_{03}^* - y_3^* = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{4\left(\frac{\sigma_0}{\sigma}\right)^2 - 1}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{\sigma}{\sqrt{4\sigma_0^2 - \sigma^2}}$$

· Παρατήρηση

$$\| f * g \|_{L^p} \leq \| f \|_{L^1} \| g \|_{L^p} \qquad (\text{Young})$$

$$\Rightarrow \quad \| f * \phi_\varepsilon \|_{L^p} \leq \| f \|_{L^p} \qquad \boxed{\int \phi_\varepsilon = 1}$$

Επίσης

- $$\int (f * \varphi_\varepsilon)\,dx = \int f\,dx$$ (διατηρεί μάζα

Απ

$$\int_{\mathbb{R}^n} (f * \varphi_\varepsilon)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\,\varphi_\varepsilon(y)\,dy \right) dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(y)\,\varphi_\varepsilon(x-y)\,dy \right) dx$$

$$\overset{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(y)\,\varphi_\varepsilon(x-y)\,dx \right) dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \left(\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(x-y)\,dx \right) dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \left(\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(x)\,dx \right) dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\,dy. \qquad \square$$

$L^1(\mathbb{R}^n)$

$\boxed{L^1(\Omega)}$

Ορισμοί

$T: L^1(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^1(\mathbb{R}^n)$

1) Ένας μετασχηματισμός, όχι αναγκαστικά γραμμικός, λέγεται μονοτονικός αν διατηρεί την διάταξη

$$f(x) \le g(x) \Rightarrow (Tf)(x) \le (Tg)(x)$$

2) Ένας μετασχηματισμός $T: L^1(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^1(\mathbb{R}^n)$, όχι αναγκαστικά γραμμικός, λέγεται συστολή αν

$$\|T(f) - T(g)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \le \|f-g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$$

3) Ένας μετασχηματισμός $T: L^1 \longrightarrow L^1$
(όχι αναγκαστικά γραμμικός)

είναι συντηρητικός αν

$$\int (Tf)(x)\,dx = \int f(x)\,dx.$$

Άσκηση (*)

Έστω ότι ο T είναι συντηρητικός. Τότε

T συστολή $\Leftrightarrow$ T μονότονος.

Ερώτημα: Ισχύει ότι αν ο T έχει δύο από τις τρεις ιδιότητες τότε έχει αναγκαστικά και την τρίτη;