Διάλεξη 15

Μη Ομογενή Περίπτωση

$$(1)\quad \begin{cases} u_t = \Delta u + f, & (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u = g, & \mathbb{R}^n \times \{t=0\} \end{cases}$$

$$f = f(x,t), \quad g = g(x)$$

Τύπος μεταβολής παραμέτρων

$$(2)\quad u(\cdot,t) = \underbrace{e^{\Delta t} g}_{\text{λύση ομογενούς}} + \underbrace{\int_0^t e^{\Delta(t-s)} f(\cdot,s)\, ds}_{\text{ειδική λύση}}$$

Από Θεώρημα 1, σ 91

$$(3)\quad e^{\Delta t} g = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t)\, g(y)\, dy$$

Κατά συνέπεια

$$(4)\quad \int_0^t e^{\Delta(t-s)} f(\cdot,s)\, ds = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t-s)\, f(y,s)\, dy\, ds.$$

$$\Phi(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \qquad (\text{βλ } (15)\ \sigma\ 89)$$

Σύνοψη κατασκευής

Θεώρημα 2

Ορίζεται $u(x,t)$ μέσω των (2), (3), (4).
$g \in C(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$, $f \in C_1^2(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$, με συμπαγή φορέα. Τότε ισχύουν

(i) $u(x,t)$ ικανοποιεί την (1)a για $t>0$

κλασικά, δηλαδή $u \in C_1^2(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$

(ii) $\lim\limits_{\substack{(x,t)\to(x^0,0)\\ x\in\mathbb{R}^n,\, t>0}} u(x,t) = g(x^0)$

$\square$

Συμβολισμός – Συμπαγής Φορέας

1) $f \in C_1^2(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$ σημαίνει

$f(x,t), \frac{\partial f}{\partial x_i}(x,t), \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x,t), \frac{\partial f}{\partial t}(x,t) \in C(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$

2) $\overline{\{(x,t) \mid f(x,t) \neq 0\}}$ συμπαγές, $\subset \mathbb{R}^n \times [0,\infty)$

Η $f(x,t)$ μηδενίζεται για $|x|>C_1$ και $t>C_2$, δεν μηδενίζεται όμως αναγκαστικά για $t=0$.

Σχόλιο

Αρκεί να το αποδείξουμε για $g \equiv 0$, λόγω θεωρ. 1
($u_t^I - \Delta u^I = f$, $u_t^h - \Delta u^h = 0 \Rightarrow u^h + u^I$ ικανοποιεί (1))

Απόδειξη για $g=0$

1. Πρώτον δείχνουμε να διαφορίσουμε το

$$(5)\quad \int_0^t\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t-s)\, f(y,s)\, dy\, ds \quad , \; t\geq s$$

Ακολουθούμε την τακτική της απόδειξης του τύπου του Poisson, σ 14:

$z=x-y$

$\tau=t-s$

Κάνουμε την αλλαγή μεταβλητών σε δύο βήματα

$$\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t-s)\, f(y,s)\, dy\, ds = \int_0^t\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(z,t-s)\, f(x-z,s)\, dz\, ds$$

$$= \int_0^t\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y,t-s)\, f(x-y,s)\, dy\, ds$$

$$= -\int_t^0\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y,\tau)\, f(x-y,t-\tau)\, dy\, d\tau$$

$$= \int_0^t\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y,s)\, f(x-y,t-s)\, dy\, ds .$$

Εξετάζουμε την παρακάτω σύγκλιση :

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} |\Phi(y,s)|\, |f(x-y,t-s)|\, dy\, ds$$

$$\leq \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y,s)\, dy\, ds$$

$$= \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))} \int_0^t \Big(\underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y,s)\, dy}_{=1} \Big) ds$$

$$= \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))}\, t \ldots$$

Ομοίως

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} |\Phi(y,s)|\, \Big|\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(x-y,t-s)\Big|\, dy\, ds$$

$$\leq \Big\|\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\Big\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))}\, t$$

$$\therefore \Delta_x \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y,s)\, f(x-y,t-s)\, dy\, ds$$

$$= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y,s)\, \Delta_x f(x-y,t-s)\, dy\, ds$$

Ensures

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y,s) \left| f_t(x-y, t-s) \right| dy\, ds$$

$$\le \|f_t\|_{L^\infty}\, t$$

You then conclude $u \in C_1^2(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$,

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y,s)\, f(x-y, t-s)\, dy\, ds$$

$$= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y,s) \frac{\partial}{\partial t} f(x-y, t-s)\, dy\, ds$$

$$+ \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y,t)\, f(x-y, 0)\, dy$$

2. $u_t(x,t) - \Delta_x u(x,t)$

$$= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y,s) \left[\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_x \right] f(x-y, t-s)\, dy\, ds$$

$$+ \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y,t)\, f(x-y, 0)\, dy$$

(6)

$$= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y,s) \left[-\frac{\partial}{\partial s} - \Delta_y \right] f(x-y, t-s)\, dy\, ds$$

$$+ \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y,t)\, f(x-y, 0)\, dy$$

(4)

$$= \int_{\varepsilon}^{t}\int_{\mathbb{R}^n} \cdots\cdots dy\,ds + \int_{0}^{\varepsilon}\int_{\mathbb{R}^n} \cdots\cdots dy\,ds + \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y,t)\, f(x-y,0)\, dy$$

$$=: I_\varepsilon + J_\varepsilon + K.$$

- <u>Εκτίμηση J_ε</u>

$$|J_\varepsilon| \leq \left(\|f_t\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))} + \|\Delta f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))} \right) \varepsilon$$

- <u>Ολοκλήρωση κατά μέρη στο I_ε</u>

επιτρέπεται διότι αποφεύγουμε την ιδιομορφία για $s=0$

$$I_\varepsilon = \int_{\varepsilon}^{t}\int_{\mathbb{R}^n} \left[\cancel{\left(\frac{\partial}{\partial s} - \Delta_y\right) \Phi(y,s)} \right] f(x-y,t-s)\, dy\, ds$$

$$+ \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y,\varepsilon)\, f(x-y,t-\varepsilon)\, dy$$

$$- \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y,t)\, f(x-y,0)\, dy$$

(ως προς y ολοκλήρωση κατά μέρη $\Rightarrow$ $\nexists$ συνοριακοί όροι)

Λαμβάνοντας υπ' όψιν την (6) έχουμε

$$u_t - \Delta_x u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y,\varepsilon)\, f(x-y,t-\varepsilon)\, dy \; \cancel{- \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y,t)\, f(x-y,0)\, dy + K} + J_\varepsilon$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\qquad \right]$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y,\varepsilon) f(x-y, t-\varepsilon)\, dy$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y,\varepsilon) \left[\underbrace{\left(f(x-y, t-\varepsilon) - f(x-y,t)\right)}_{\to 0} + f(x-y,t) \right] dy \right]$$

$$= f(x,t)$$

(Προσέγγιση της μονάδος).

□