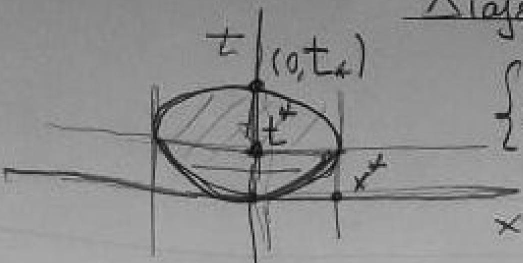
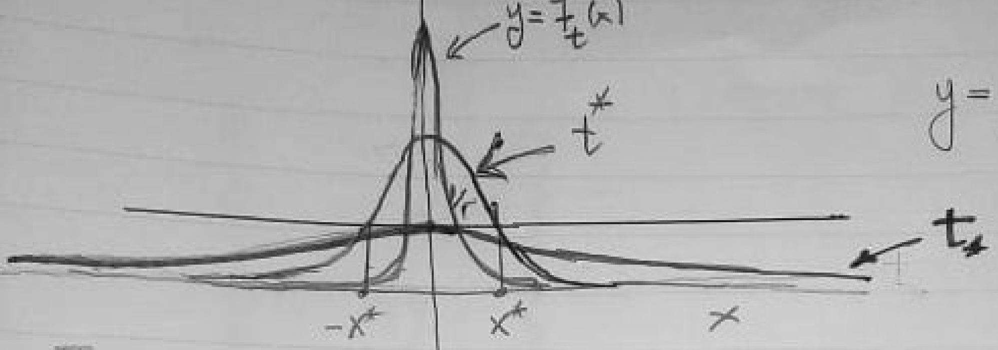
Διάλεξη 17



$$\left\{(x,t) \;\middle|\; \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\, e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \geq \frac{1}{r}\right\} =: S_r$$

Σχ1



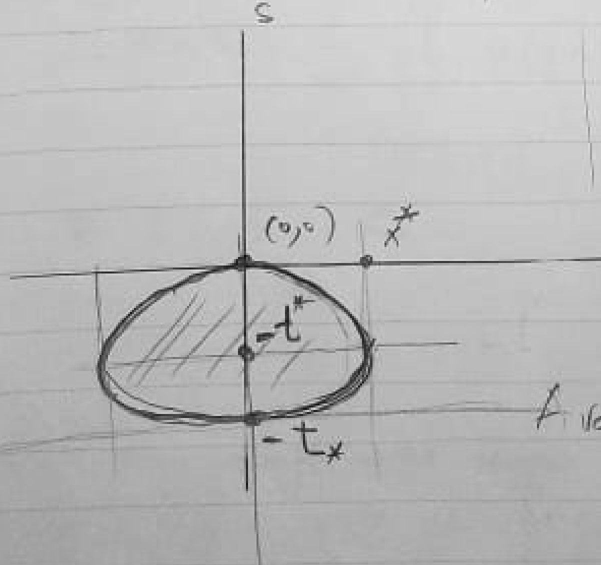
$$y = f_t(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\, e^{-\frac{x^2}{4t}} = \Phi(x,t)$$

Σχ2

t_* = μεγαλύτερος χρόνος, $(0,t_*) \in S_r$, $t \leq t_*$ για $(x,t) \in S_r$

t^* = χρόνος που μεγιστοποιεί την $|x|$, $|x| \leq x^*$ για $(x,t) \in S_r$

$$E(0,0;r) := \left\{(y,s) \;\middle|\; s \leq 0 \quad \Phi(y,-s) \geq \frac{1}{r}\right\}$$



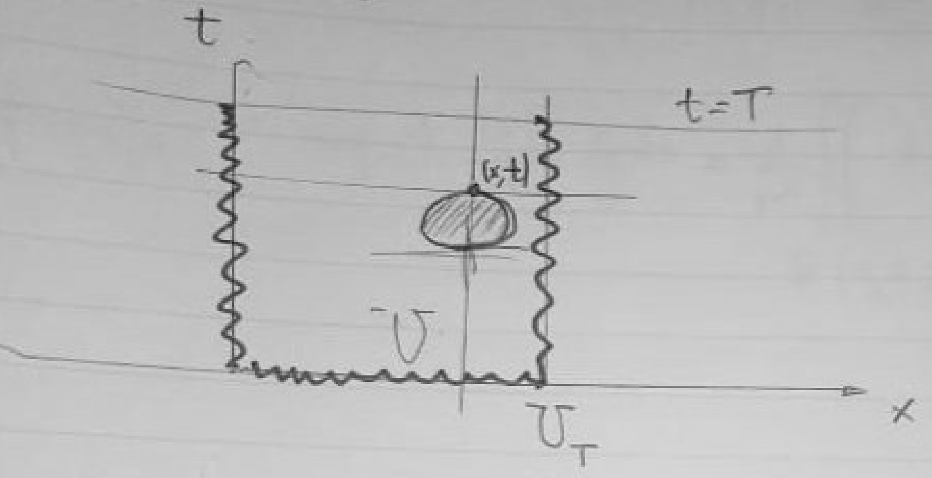
y

Ανάκλαση Σχήματος 1.

Σχ3

$$E(x,t;r) := \left\{(y,s) \;\middle|\; s \leq t,\ \Phi(x-y,t-s) \geq \frac{1}{r^n}\right\}$$

(1) $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \Delta u, & (x,t) \in U \times (0,T) \\ u(x,0) = g(x) \end{cases}$, $U \subset \mathbb{R}^n$, φραγμεν



$$\partial_p \left[U \times (0,T] \right] = \partial U \times [0,T) .$$

Θεώρημα (Μέση Τιμής Εξίσωσης Θερμότητος)

Έστω $u \in C_1^2(U \times (0,T])$.

Ισχύει

(2) $$u(x,t) = \frac{1}{4r^n} \iint_{E(x,t;r)} u(y,s) \frac{|x-y|^2}{(t-s)^2} \, dy \, ds$$

για $\forall$ $E(x,t;r) \subset$

Η εξίσωση είναι αναλλοίωτη κάτω από μεταφορές, και συνεπώς Χ.β.γ. αρκεί να δείξουμε

(3) $$u(0,0) = \frac{1}{4r^n} \iint_{E(0,0;r)} u(y,s) \frac{|y|^2}{s^2} \, dy \, ds =: \frac{1}{4} \phi(r)$$

Αλλαγή Μεταβλητών

$y = \lambda \bar{y}, \quad s = \lambda^2 \bar{s}$ (Παραβολική αλλαγή κλίμακας)

$$\phi(r) = \frac{1}{r^n} \iint_{E(0,0;r)} u(y,s) \frac{|y|^2}{s^2} dy\, ds = \frac{1}{r^n} \iint_{E(0,0;\frac{\lambda}{r})} u(\lambda \bar{y}, \lambda^2 \bar{s}) \frac{|\bar{y}|^2 \lambda^2}{|\bar{s}|^2 \lambda^4} \lambda^{n+2} d\bar{y}\, d\bar{s}$$

$$= \left(\frac{\lambda}{r}\right)^n \iint_{E(\frac{\lambda}{r})} u(ry, r^2 s) \frac{|y|^2}{s^2} dy\, ds$$

όπου $E(r) = E(0,0;r)$.
Επιλέγουμε:
$\boxed{\lambda = r}$

(Εs<0, $\Phi(y,-s) \geq \frac{1}{r^n} \iff$

$$\frac{1}{|4\pi s|^{n/2}} e^{-\frac{y^2}{4s}} \geq \frac{1}{r^n} \iff$$

$$\frac{1}{|4\pi \lambda^2 \bar{s}|^{n/2}} e^{-\frac{\bar{y}}{4\bar{s}}} \geq \frac{1}{r^n} \iff$$

$$\frac{1}{|4\pi \bar{s}|^{n/2}} e^{-\frac{\bar{y}}{4\bar{s}}} \geq \left(\frac{\lambda}{r}\right)^n$$

Επιλέγουμε $\lambda = r$, και αλλάζουμε τον συμβολισμό $\bar{y} \to y$, $\bar{s} \to s$).

Δείξαμε ότι

$\phi(r) =$

(4) $$\phi'(r) = 0$$

οπότε

(5) $$\phi(r) = \lim_{r \to 0} \phi(r) = \left(\iint_{E(1)} \frac{|y|^2}{s^2} dy\, ds \right) u(0,0).$$

Άσκηση

Δείξτε ότι

$$\iint_{E(1)} \frac{|y|^2}{s^2}\, dy\, ds = 4 .$$

Επαλήθευση της (4)

Η συνάρτηση(*)

(6) $$\psi := -\frac{n}{2}\ln(-4\pi s) + \frac{|y|^2}{4s} + n \ln r$$

θα παίξει κάποιο ρόλο σε ότι ακολουθεί.

Έχουμε

$$\phi(r) = \iint_{E(1)} u(ry, r^2 s)\, \frac{|y|^2}{s^2}\, dy\, ds ,$$

$\Longrightarrow$

$$\phi'(r) = \iint_{E(1)} \frac{\partial}{\partial r}\left[u(ry, r^2 s)\, \frac{|y|^2}{s^2} \right] dy\, ds$$

$u(ry, r^2 s)$ $\quad$ $u_s(ry, r^2 s)$

$$= \iint_{E(1)} \frac{|y|^2}{s^2} \left\{ u_{y_i} y_i + u_s (2rs) \right\} dy\, ds .$$

$$\left(r y_i \frac{1}{r} = \bar{y}_i \frac{1}{r},\quad dy\, ds = d(\underbrace{ry}_{\bar{y}})\, r^{-n}\, d(\underbrace{r^2 s}_{\bar{s}})\, r^{-2} \right)$$

$$= (d\bar{y}\, d\bar{s})\, r^{-n-1}\, r^{-1}$$

(*) $$\ln\left[\frac{\Phi(y,-s)}{1/r^n} \right] = \psi$$

clearly $\psi = 0$ on $\partial E(r)$

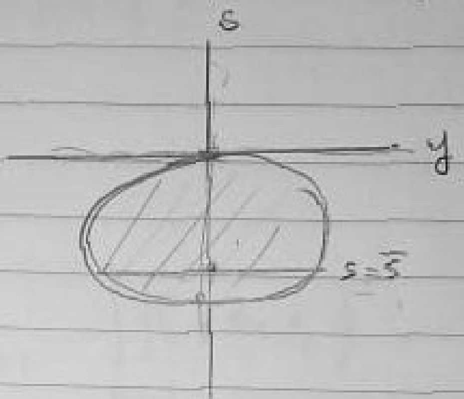
$$\frac{|\bar{y}|^2}{|\bar{s}|^2}\, r \left\{ u_{\bar{y}_i}\, \bar{y}_i \frac{1}{r} + u_{\bar{s}} (2rs) \right\} \frac{d\bar{y}\, d\bar{s}}{r^{n+1}}$$

$$= \left(u_{\bar{y}_i} \bar{y}_i \frac{|\bar{y}|^2}{\bar{s}^2} + 2 u_{\bar{s}} \frac{|\bar{y}|^2}{\bar{s}} \right) \frac{1}{r^{n+1}}\, d\bar{y}\, d\bar{s}$$

$$= \frac{1}{r^{n+1}} \iint_{E(r)} u_{y_i}(y,s)\, y_i \frac{|y|^2}{s^2} + 2u_s \frac{|y|^2}{s} \, dy\, ds$$

$$(\bar{y} \to y,\ \bar{s} \to s)$$

$$=: A + B$$



$\psi = 0$ στο ∂E

Παρατηρήσεις

$$\frac{2u_s |y|^2}{s} = 4u_s y_i \psi_{y_i}$$

$$B = \frac{4}{r^{n+1}} \iint_{E(r)} u_s y_i \psi_{y_i} \, dy\, ds = \frac{4}{r^{n+1}} \iint_{E(r)} \left[\frac{\partial}{\partial y_i}(u_s y_i \psi) - (u_s y_i)_{y_i} \psi \right] dy\, ds$$

Έχουμε

$$\int_{E(r) \cap \{s=\bar{s}\}} \frac{\partial}{\partial y_i}(u_s y_i \psi)\, dy = \int_{\partial E(r) \cap \{s = \bar{s}\}} \psi u_s y_i \nu_i \, dS_y = 0 \quad (\psi = 0)$$

$$\therefore \quad B = \frac{-4}{r^{n+1}} \iint_{E(r)} [n u_s \psi + u_{sy_i} y_i \psi]\, dy\, ds.$$

Συνεχίζουμε με ολοκλήρωση κατά μέρη ως προς s στον $2^{ον}$ όρο.

$$u_{sy_i} y_i \psi = \frac{\partial}{\partial s}(u_{y_i} y_i \psi) - (u_{y_i} y_i \psi_s).$$

Κάνοντας χρήση της $\psi = 0$ στο $\partial E(r)$ έχουμε

$$B = -\frac{4}{r^{n+1}} \iint_{E(r)} (n u_s \psi + u_{y_i} y_i \psi_s)\, dy\, ds =$$

$$= \frac{1}{r^{n+1}} \iint_{E(r)} \left[-4n u_s \psi + u_{y_i} y_i \left(-\frac{n}{2s} - \frac{|y|^2}{4s^2} \right) \right] dy\, ds$$

$$= \frac{1}{r^{n+1}} \iint_{E(r)} \left[-4n u_s \psi - \frac{2n}{s} u_{y_i} y_i \right] dy\, ds \quad - A$$

$\therefore$

$$\varphi'(r) = A + B = \frac{1}{r^{n+1}} \iint_{E(r)} \left[-4n u_s \psi - \frac{2n}{s} u_{y_i} y_i \right] dy\, ds$$

$(u_s = \Delta u)$

$$= \frac{1}{r^{n+1}} \iint_{E(r)} \left[-4n \Delta u \psi - \frac{2n}{s} u_{y_i} y_i \right] dy\, ds$$

κατα μερη

$$= \frac{1}{r^{n+1}} \iint_{E(r)} \left[4n u_{y_i} \psi_{y_i} - \frac{2n}{s} u_{y_i} y_i \right] dy\, ds \,.$$

Εχουμε απο (6):

$$\psi_{y_i} = \frac{y_i}{2s}$$

$\Rightarrow$

$$\varphi'(r) = 0 \,.$$

Η Αποδειξη ειναι πληρης.

$\square$

Παρατηρήματα

1. Ισχυρή Αρχή του Μεγίστου

Θεώρημα 1
Υποθέτουμε $u \in C^2_1(U_T) \cap C(\bar{U}_T)$ επιλύει την $(1)_a$ στο U_T. Ισχύουν τα κάτωθι:

(i) $$\max_{\bar{U}_T} u = \max_{\partial_p U_T} u$$

(ii) Αν U συνεκτικό και $\exists\ (x_0,t_0) \in U_T$ τ.ω.

$$u(x_0,t_0) = \max_{\bar{U}_T} u$$

$\Rightarrow$

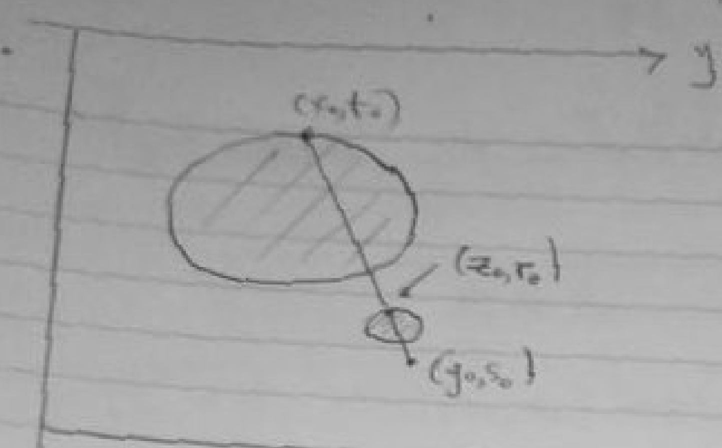
$$u \equiv \text{σταθερά} \quad \text{στο } \bar{U}_{t_0}$$

Παρομοίως για min u.

Απόδειξη

1. Έστω $M = \max_{\bar{U}_T} u$, και έστω

(4) $\quad u(x_0,t_0) = M, \quad (x_0,t_0) \in U_T = U \times (0,T]$



Θεωρούμε $E(x_0,t_0;r) \subset U_T$.

(8) $$M \overset{(2)}{=} u(x_0,t_0) = \frac{1}{4r^n}\iint_{E(x_0,t_0;r)} u(y,s)\frac{|x_0-y|^2}{(t_0-s)^2}\,dy\,ds \le M$$

διότι

(9) $$1 = \frac{1}{4r^n}\iint_{E(x_0,t_0;r)} \frac{|x_0-y|^2}{(t_0-s)^2}\,dy\,ds$$

Κατά συνέπεια

(10) $$u(y,s) = M, \quad (y,s)\in E(x_0,t_0;r)$$

2. Θεωρούμε (το κλειστό) ευθύγραμμο τμήμα $L \subset U_T$, όπως στο Σχ., που συνδέει το (x_0,t_0) με το (y_0,s_0), με $s_0 < t_0$. (ευθεία με κλίση προς τα κάτω)
Θεωρούμε τώρα το σύνολο,

(11) $$\Sigma = \left\{ s \ge s_0 \;\middle|\; u(x,t) = M \text{ για } \forall\, (x,t)\in L,\ s\le t\le t_0 \right\}$$

και ορίζουμε το

(12) $$r_0 = \inf \Sigma$$

(13) Λόγω συνέχειας το $\operatorname{Inf} \Sigma = \operatorname{Min} \Sigma = s_0$

Έστω

(14) $$r_0 > s_0$$

Έχουμε ότι $u(z_0, r_0) = M$, $(z_0, r_0) \in L \cap U_T$.

Κατασκευάζουμε το $E(z_0, r_0; r)$, $r>0$ αρκετά μικρό ώστε $E(z_0, r_0; r) \subset U_T$. Γνωρίζουμε ότι $u \equiv M$ στο $E(z_0, r_0; r)$, που συγκρούεται με τον ορισμό του r_0 και την (14). Καταλήγουμε στο ότι $u \equiv M$ στο L και ειδικά στο $u(y_0, s_0) = M$.

3. Στην περίπτωση που το U είναι συνεκτικό τότε δοθέντος $(\hat{x}, \hat{t}) \in U \times (0, T]$ μπορούμε να βρούμε πολυγωνική γραμμή που να ενώνει το (x_0, t_0) με το $(\hat{x}, \hat{t})$ με πεπερασμένο αριθμό ευθύγραμμων τμημάτων L όπως στο βήμα 2. Κατά συνέπεια

$$u(x,t) \equiv M \text{ στο } U_T.$$

$\square$

<u>Σχόλιο</u> (Άπειρη ταχύτητα διάδοσης)

Θεωρούμε το

$$\begin{cases} u_t = \Delta u, & (x,t) \in U_T \\ u = 0, & (x,t) \in \partial U \times [0,T] \\ u(x,0) = g(x), & x \in U \text{, ανοικτό, συνεκτικό, φραγμένο.} \end{cases}$$

Έστω $g \geq 0$, $g \not\equiv 0$. Υποθέτουμε ότι $u \in C_1^2(U_T) \cap C(\bar{U}_T)$ (άρα $g \in C(\bar{U})$)

Τότε $u(x,t) > 0$ στο U_T.

Απόδειξη

Με εις άτοπον απαγωγή. Έστω $\exists\ (x_0,t_0) \in U_T$

$$u(x_0,t_0) = 0$$

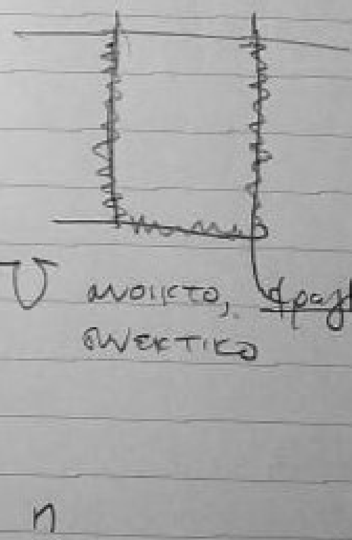
Άρα

$$\min_{\bar{U}_T} u = u(x_0,t_0) = 0$$

$$\overset{\text{Ισχυρή Αρχή}}{\Longrightarrow} \quad u(x,t) \equiv u(x_0,t_0) = 0 \quad , \text{ στο } \bar{U}_T \ , \ \text{✗}.$$

□

Θεώρημα 2 (Μοναδικότητα)



$$\begin{cases} u_t = \Delta u + f(x,t) & \text{στο } U_T \\ u = g & \text{στο } \partial_p U_T \end{cases}$$

U ανοικτό, φραγμένο, συνεκτικό

$$\exists!\ u \in C^2_1(U_T) \cap C(\bar{U}_T)$$

Απόδειξη

Έστω $u, \bar{u}$ δύο λύσεις. Τότε η

$w = u - \bar{u}$ ικανοποιεί την

$$\begin{cases} w_t = \Delta w \ , & \text{στο } U_T \\ w = 0 & \text{στο } \partial_p U_T \end{cases}$$

$$\max_{\bar{U}_T} w = \max_{\partial_p U_T} w = 0, \quad \min_{\bar{U}_T} w = \min_{\partial_p U_T} w = 0$$

□