Διαλεξη 18

Για μη φραγμένα χωρία χρειάζεται αλλιώς στο απειρ

Θεώρημα 1 (Tychanov)

$$(1)\quad \begin{cases} u_t = \Delta u, & (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,T) \\ u(x,0) = g(x), & x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \qquad , u \in C_1^2(\mathbb{R}^n \times (0,T])$$

$$u \in C(\mathbb{R}^n \times [0,T])$$

Εστω

$$(2)\qquad u(x,t) \leq A e^{a|x|^2}$$

για $A, a > 0$

$$\Longrightarrow$$

$$(3)\qquad \sup_{\mathbb{R}^n \times [0,T]} u = \sup g$$

Αποδειξη

1. Εστω

$$(4)\qquad 4aT < 1$$

$$\Longrightarrow$$

$$4a(T+\varepsilon) < 1 \qquad (\varepsilon \ll 1)$$

Φιξαρουμε $y \in \mathbb{R}^n$, $\mu > 0$ και ορίζουμε

$$(5)\qquad v(x,t) := u(x,t) - \frac{\mu}{(T+\varepsilon-t)^{n/2}} e^{+\frac{|x-y|^2}{4(T+\varepsilon-t)}}$$

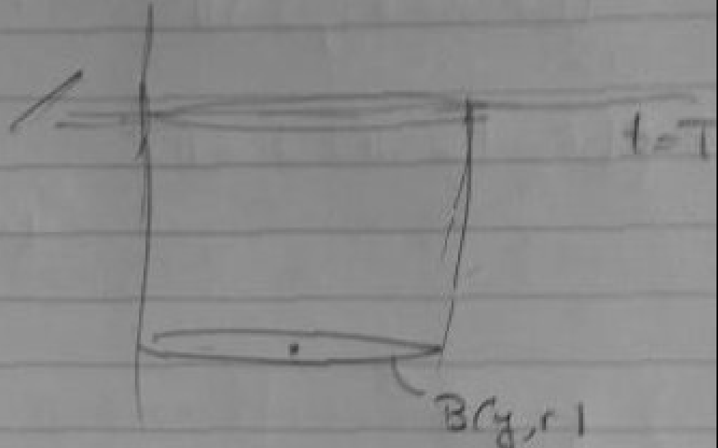
Εχουμε

$$(6)\qquad v_t = \Delta_x v \quad , \mathbb{R}^n \times (0,T]$$

Φιξάρουμε $r>0$ και θέτουμε $V = B(y,r)$

$$V_T = B^{\circ}(y,r)\times(0,T]$$

Από την Αρχή του Μεγίστου



$$(7)\qquad \max_{\bar{V}_T} v = \max_{\partial_p V_T} v$$

$$(8)\qquad v(x,0) = u(x,0) - \frac{\mu}{(T+\varepsilon-t)^{n/2}}\, e^{\frac{|x|^2}{4(T+\varepsilon-t)}}$$

$$\le u(x,0) = g(x).$$

Επίσης για $|x-y|=r$, $0<t\le T$

$$(9)\qquad v(x,t) = u(x,t) - \frac{\mu}{(T+\varepsilon-t)^{n/2}}\, e^{\frac{r^2}{4(T+\varepsilon-t)}}$$

$$\le Ae^{a|x|^2} - \frac{\mu}{(T+\varepsilon-t)^{n/2}}\, e^{\frac{r^2}{4(T+\varepsilon-t)}}$$

$$\le Ae^{a(|y|+r)^2} - \frac{\mu}{(T+\varepsilon)^{n/2}}\, e^{\frac{r^2}{4(T+\varepsilon)}}$$

(4) $\Rightarrow$

$$\frac{1}{4(T+\varepsilon)} = a+\gamma \quad , \text{ κάποιο } \gamma>0$$

Συνεχίζοντας την απόδειξη

(10) $$v(x,t) \le A e^{a(|y|+r)^2} - \mu \left(4(a+\gamma)\right)^{n/2} e^{(a+\gamma)r^2} \le \max_{\mathbb{R}^n} g$$

για r αρκετά μεγάλο (y φιξαρισμένο!).

(7), (10) $\Rightarrow$

$$v(y,t) \le \sup_{\mathbb{R}^n} g$$

$\forall\ y \in \mathbb{R}^n,\ 0 \le t \le T$, υπό τον περιορισμό (4).

Παίρνουμε τώρα $\mu \to 0$:

$$u(y,t) \le \sup_{\mathbb{R}^n} g$$

$\forall\ y \in \mathbb{R}^n,\ 0 \le t \le T$, υπό τον περιορισμό (4).

3. Αν η (4) δεν ισχύει επιλέγουμε $T_1 = \frac{1}{8a}$ και εφαρμόζουμε το αποτέλεσμα διαδοχικά στα διαστήματα $[0, T_1], [T_1, 2T_1], \dots$ κ.λ.π.

$\square$