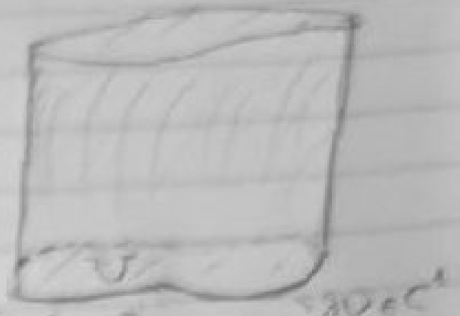
Διάλεξη 19 (Μέθοδος Ενεργείας)

Α. Μοναδικότητα

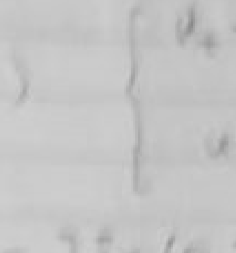
$$(*)\quad \begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{στο } U_T \\ u = g & \text{στο } \Gamma_T \end{cases}$$



$U_T = U \times (0,T]$ = Παραβολικό εσωτερικό του $\bar{U} \times [0,T]$

$\Gamma_T = \partial U$

Γ_T = Παραβολικό σύνορο του $\bar{U}_T = \bar{U} \times [0,T)$, δεν περιέχει το ταβάνι



Το ταβάνι περιέχεται στο παραβολικό εσωτερικό

$t=T$ ------ εσωτερικό

$t=0$ ------

Ομαλότητα δεδομένων – λύσεως

$f \in C(\bar{U}_T)$, $g \in C(\Gamma_T)$, $u \in C^2_1(U_T) \cap C(\bar{U}_T)$

f, g δεδομένα

$g(x,0)$ = Αρχική συνθήκη δίνεται

$g\big|_{\partial U \times (0,T)}$ = δίνεται

$u(x,t)$ = ζητείται

Θεώρημα 1

Υπάρχει το πολύ μία λύση του $(*)$

Απ.

1. Έστω u_1, u_2 λύσεις $\Longrightarrow$

$w = u_1 - u_2$ ικανοποιεί

$$\begin{cases} w_t - \Delta w = 0 & \text{στο } U_T \\ w = 0 & \text{στο } \Gamma_T \end{cases}$$

2. Θέτουμε

$$e(t) = \int_U w^2(x,t)\,dx \quad , \quad 0 \le t \le T.$$

$$\dot{e}(t) = 2\int_U w w_t \,dx$$

$$= 2\int_U w \Delta w \,dx$$

Ταυτότητα Green

$$= 2\left[-\int_U |\nabla w|^2 dx + \int_{\partial U} \overset{0}{\cancel{w}} \frac{\partial w}{\partial \nu} dS \right]$$

$$= -2\int_U |\nabla w|^2 dx \le 0$$

$$\Rightarrow$$

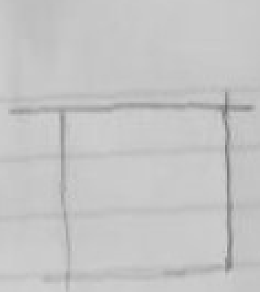
$$0 \le e(t) \le e(0) = 0$$

$$\therefore \quad w(x,t) \equiv 0 \iff u_1 \equiv u_2 \quad \text{στο } U_T.$$

□

<u>Συμπέρασμα</u>: Μοναδικότητα έχει αποδειχθεί και μέσω της Αρχής του Μεγίστου.

B. Οπισθοδρομική Μοναδικότητα



Θεώρημα 2

Έστω $w \in C_1^2(U_T)\cap C(\bar{U}_T)$ και

① $w_t - \Delta w = 0 \quad , (x,t)\in U_T$

② $w(x,t) = 0, \quad x\in \partial U \times [0,T]$

③ $w(x,T) = 0 \quad , x\in U$

Τότε ισχύει:
$w(x,t) \equiv 0 \quad , \quad 0\le t\le T, \quad x\in U$

Σημ.

Δηλαδή αν η λύση μηδενίζεται ταυτοτικά σαν συνάρτηση του x κάποια στιγμή T, και αν μηδενίζεται στο σύνορο για $0\le t\le T$, τότε αναγκαστικά ήταν μηδέν σε όλο το παρελθόν της.

Πόρισμα

Έστω $u_1, u_2 \in C_1^2(U_T)\cap C(\bar{U}_T)$

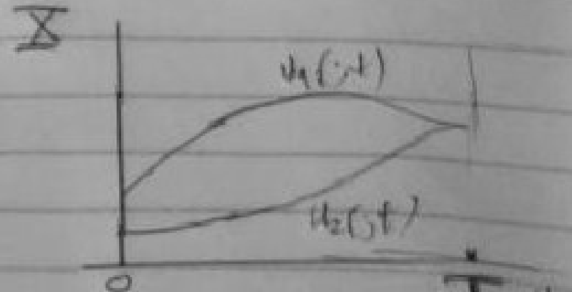
και

$\frac{\partial u_i}{\partial t} - \Delta u_i = 0 \quad , \quad (x,t)\in U_T \quad , i=1,2$

$u_1(x,T) = u_2(x,T) \quad , \quad x\in U$

$u_1(x,t) = u_2(x,t) \quad , \quad x\in \partial U \quad , 0\le t\le T$

$\Longrightarrow \quad u_1(x,0) \equiv u_2(x,0)$



Δεν είναι δυνατόν!

Παρατηρηση

Προσοχη ! Οπισθοδρομικη υπαρξη δεν ισχυει.
Για παραδειγμα το προβλημα

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & , x \in \mathbb{R}^n \\ u(x,T) = v(x) & , v \in C(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n) \end{cases}$$

δοσμενη συναρτηση

Υπαρχει αρχικη συνθηκη $g(x)$ τετοια ωστε

$u(x,0) = g(x)$;

Απαντηση : Εν γενει δεν υπαρχει !

Διοτι αν υπηρχε τοτε μεσω του Θεωρηματος 1, σ 91, η $v(x)$ θα επρεπε να ειναι C^∞.

$\square$

Αποδειξη Θεωρηματος (Επιχειρημα Λογαριθμικης Κυρτοτητος)

1. Θετουμε

(1) $$e(t) := \int_U w^2(x,t)\,dx \quad , \quad 0 \le t \le T$$

Οπως προηγουμενως

(2) $$e'(t) = -2 \int_U |\nabla w|^2 dx$$

(3) $$e''(t) = -2\frac{d}{dt}\int_U |\nabla w|^2\,dx$$

$$= -4\int_U \nabla w\,\nabla w_t\,dx$$

$$= -4\Big[-\int_U \Delta w\, w_t\,dx + \int_{\partial U} \frac{\partial w}{\partial \nu}\, \cancel{w_t}^{\,0}\,dx\Big]$$

$$\Big(w(x,t) = 0\ ,\ x\in\partial U \Rightarrow w_t(x,t) = 0\ ,\ \text{---}\,''\,\text{---} \Big)$$

$$= 4\int_U \Delta w\, w_t\,dx$$

$$\overset{(1)}{=} 4\int_U (\Delta w)^2\,dx\ .$$

Εκτός κυρτότητα της $e(t)$. Θα δείξουμε κάτι ισχυρότερο

(1) $$\int_U |\nabla w|^2 dx = -\int_U \Delta w\, w\,dx + \int_{\partial U} \frac{\partial w}{\partial \nu}\,\cancel{w}^{\,0}\,dS$$

$$= -\int_U \Delta w\, w\,dx$$

$$\le \Big(\int_U w^2 dx\Big)^{1/2}\Big(\int_U (\Delta w)^2 dx\Big)^{1/2}$$

153

1 (2) $\Rightarrow$

(5) $$(e'(t))^2 = 4\left(\int_U |u u_t| \, dx\right)^2$$

$$\overset{(4)}{\le} 4\left(\int_U u^2 dx\right)\left(\int_U |u_t|^2 dx\right)$$

$$= e(t)\, e''(t)$$

Δηλαδή

(6) $$e''(t)\, e(t) \geq (e'(t))^2 \Rightarrow \frac{e''(t)}{e(t)} \geq \left(\frac{e'(t)}{e(t)}\right)^2.$$

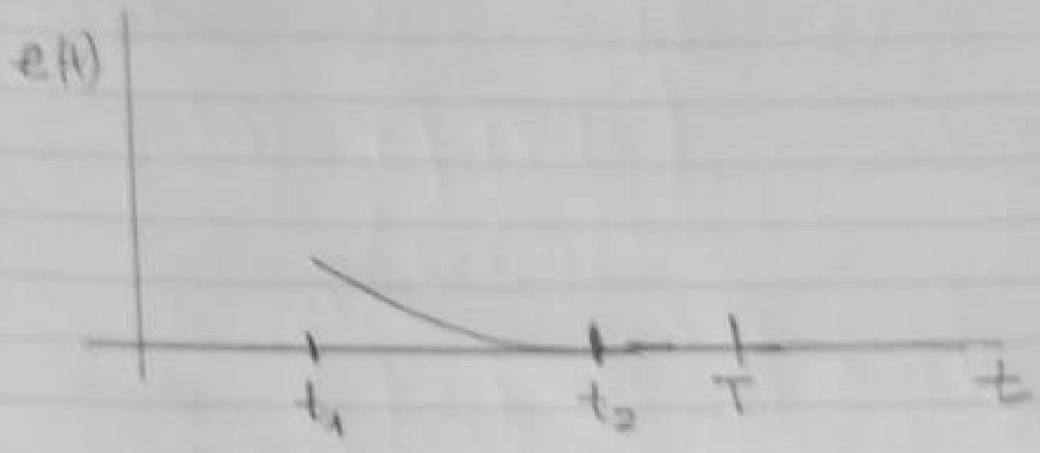
2. Αν $e(t)=0$ για $0 \le t \le T \Rightarrow u \equiv 0$ και το θεώρημα έχει αποδειχθεί.

Έστω λοιπόν ότι $e(t) \not\equiv 0$ για $t \in [0,T]$
Από συνέχεια της u έπεται συνέχεια της $e(t)$
Μπορούμε να υποθέσουμε λοιπόν ότι $\exists\, [t_1,t_2] \subset [0,T]$
τ.ω.

(7) $$e(t) > 0, \quad t_1 \le t < t_2, \quad e(t_2) = 0, \quad t_2 \le T$$

(8) $$t_2 = \max_{\tau \le T} \left\{ \tau > t_1 \;\middle|\; e(t) > 0 \text{ για } t \in [t_1, \tau) \right\}$$

Το ότι ισχύει $e(t_2)$ οφείλεται στο $e(t) \downarrow$ από (2) και στην ευκτότητα της $e'(t)$ από (3)



Άσκηση

Να αποδείξετε την ύπαρξη του t_2 όπως στην (9).

3. Θεωρούμε $t \in [t_1, t_2)$ και ορίζουμε

(9) $$f(t) := \ln e(t)$$

$$f'(t) = \frac{1}{e(t)} e'(t)$$

$$f''(t) = \frac{e''e - (e')^2}{e^2} = \frac{e''}{e} - \left(\frac{e'}{e}\right)^2 \overset{(6)}{>} 0$$

$\therefore$ f κυρτή στο (t_1, t_2)

Για $0 < \alpha < 1$ έχουμε

$$f((1-\alpha)t_1 + \alpha t) \leq (1-\alpha) f(t_1) + \alpha f(t) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln(e((1-\alpha)t_1 + \alpha t)) \leq (1-\alpha)\ln e(t_1) + \alpha \ln e(t)$$

$\Leftrightarrow$

$$e((1-\alpha)t_1 + \alpha t) \leq (e(t_1))^{1-\alpha} (e(t))^{\alpha}$$

και για $t \to t_1$

$$e((1-\alpha)t_1+\alpha t_2) \leq (e(t_1))^{1-\alpha}(e(t_2))^{\alpha}$$

$\Rightarrow$

$$e((1-\alpha)t_1+\alpha t_2)=0 \qquad \forall\ \alpha \in (0,1)$$

Άτοπο.

Η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

$\square$