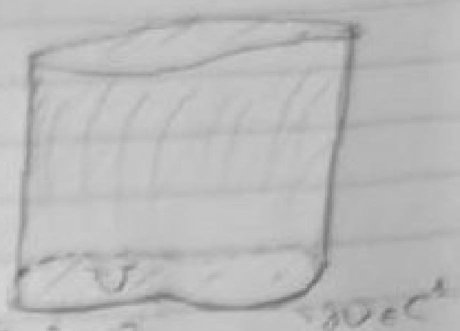
Διάλεξη 19 (Μέγιστη Εκτίμηση)

Α. Μοναδικότητα

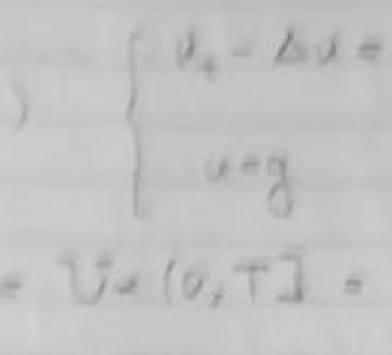


$$(*)\quad \begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{στο } U_T \\ u = g & \text{στο } \Gamma_T \end{cases}$$

$U_T = U \times (0,T]$ = Παραβολικό εσωτερικό του $\bar{U} \times [0,T]$

$\Gamma_T = \partial U$

Γ_T = Παραβολικό σύνορο του $U_T = \bar{U} \times [0,T)$, όχι περιέχει το ταβάνι



Το ταβάνι περιέχεται στο παραβολικό εσ.

$t=T$ ---- εσωτερικό

$t=0$ ----

Ομαλότητα δεδομένων - λύσεως

$f \in C(\bar{U}_T)$, $g \in C(\Gamma_T)$, $u \in C_1^2(U_T) \cap C(\bar{U}_T)$

f, g δεδομένα -

$g(x,0)$ = Αρχική συνθήκη δίνεται

$g\big|_{\partial U \times (0,T)}$ = δίνεται

$u(x,t)$ = ζητείται

Θεώρημα 1

Υπάρχει το πολύ μία λύση της (*)

Απ.

1. Έστω u_1, u_2 λύσεις

$\Rightarrow$

$w = u_1 - u_2$ ικανοποιεί

$$\begin{cases} w_t - \Delta w = 0 & \text{στο } U_T \\ w = 0 & \text{στο } \Gamma_T \end{cases}$$

2. Θέτουμε

$$e(t) = \int_U w^2(x,t)\,dx \quad , \quad 0 \le t \le T.$$

$$\dot{e}(t) = 2\int_U w w_t \,dx$$

$$= 2\int_U w \Delta w \,dx$$

Ταυτότητα Green

$$= 2\Big[-\int_U |\nabla w|^2 dx + \int_{\partial U} \cancel{w}^{\,0} \frac{\partial w}{\partial \nu} dS \Big]$$

$$= -2\int_U |\nabla w|^2 dx \le 0$$

$\Longrightarrow$

$$0 \le e(t) \le e(0) = 0$$

$\therefore \quad w(x,t) \equiv 0 \iff u_1 \equiv u_2 \quad$ στο U_T.

$\square$

<u>Σημείωση</u> : Μοναδικότητα είχε αποδειχθεί και μέσω της Αρχής του Μεγίστου.

B. Οπισθόδρομική Μοναδικότητα

Θεώρημα 2

Έστω $w \in C_1^2(U_T) \cap C(\bar{U}_T)$ και

① $w_t - \Delta w = 0$, $(x,t) \in U_T$

② $w(x,t) = 0$, $x \in \partial U \times [0,T]$

③ $w(x,T) = 0$, $x \in \bar{U}$

Τότε ισχύει: $w(x,t) \equiv 0$, $0 \le t \le T$, $x \in \bar{U}$

Σημ.

Δηλαδή αν η λύση μηδενίζεται ταυτοτικά σαν συνάρτηση του x κάποια στιγμή T, και αν μηδενίζεται στο σύνορο για $0 \le t \le T$, τότε αναγκαστικά ήταν μηδέν σε όλο το παρελθόν της.

Πόρισμα

Έστω $u_1, u_2 \in C_1^2(U_T) \cap C(\bar{U}_T)$

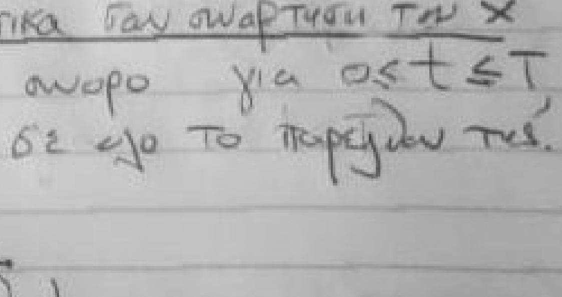
και

$\frac{\partial u_i}{\partial t} - \Delta u_i = 0$, $(x,t) \in U_T$, $i = 1,2$

$u_1(x,T) = u_2(x,T)$, $x \in U$

$u_1(x,t) = u_2(x,t)$, $x \in \partial U$, $0 \le t \le T$

$\Longrightarrow$ $u_1(x,0) \equiv u_2(x,0)$



Δεν είναι δυνατόν!