(6) $v(x,t) = \varphi(x-ct)$

(οδευον κυμα ταχυτητα c)

Συνδεση με την κυματικη εξισωση:

(7) $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right) u = 0$$

Θετουμε

(8) $$v(x,t) := \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right) u(x,t)$$

$\overset{(6)}{\Longrightarrow}$

(9) $$v_t + v_x = 0$$

$$v(x,0) = u_t(x,0) - u_x(x,0) = h(x) - g'(x) =: a(x)$$

(6) $\Rightarrow$

(10) $$v(x,t) = a(x-t).$$

(8) $\Rightarrow$

(11) $$u_t - u_x = a(x-t).$$ (μη ομογενης εξισωση μεταφορας βλ [ΑΑ, σ98, 2η εκ] σ 130, 133)

Διαλεξη 20 : Η Κυματικη Εξισωση

(1) $$u_{tt} - \Delta u = 0 \quad , \quad (x,t) \in U \times (0,$$

(2) $$\Box u := u_{tt} - \Delta u = f(x,t) \quad , \quad \text{— '' —}$$

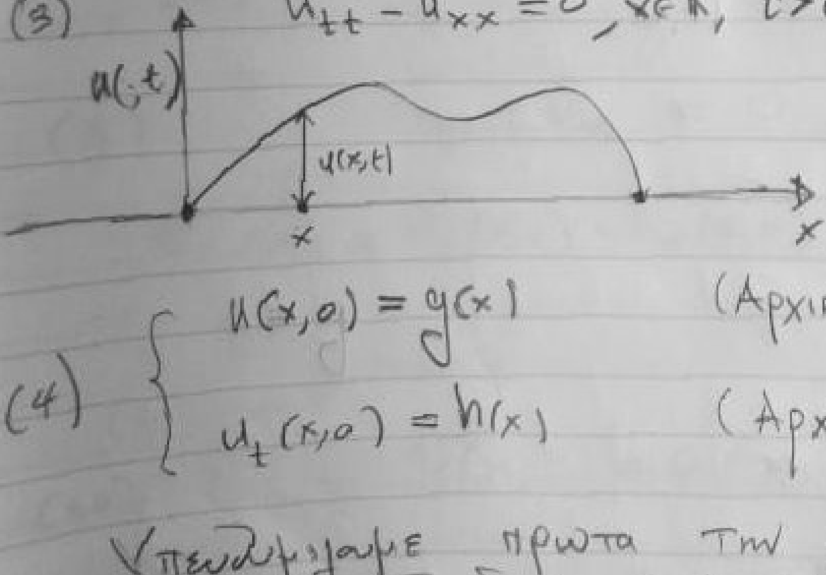
$u = u(x,t)$, $\quad u : \overline{U} \times [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$

$\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, $\quad U \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτο

$\Box$ = D'Alambertian

A. $\underline{n=1}$, $\underline{U=\mathbb{R}}$ (στην ευθεια)

(3) $u_{tt} - u_{xx} = 0$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$ (F = ma



$$k(x,t) = \frac{u_{xx}}{(1+u_x^2)^{3/2}}$$

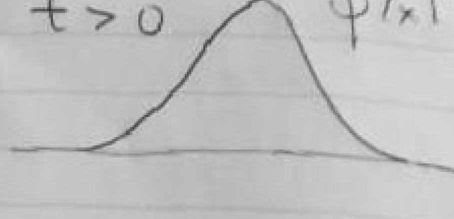
βλ [Ακριβης - Αλικακος σσ 135-137, 2η εκ

(4) $$\begin{cases} u(x,0) = g(x) & \text{(Αρχικη θεση)} \quad x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) = h(x) & \text{(Αρχικη ταχυτητα)}, \quad x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Υπενθυμιζουμε πρωτα την εξισωση της μεταφορας [ΑΑ, Παραδειγμα 1.4, σ 34] :

(5) $$\begin{cases} v_t + c v_x = 0 \quad , \quad x \in \mathbb{R}, \ t > 0 \\ v(x,0) = \varphi(x) \quad , \quad x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$\varphi(x) \in C^1$



(12) $$u(x,t) = \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} a(y)\,dy + b(x+t), \quad b(x) = u(x,0$$

$$= \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} (h(y) - g'(y))\,dy + g(x+t)$$

$$= \frac{1}{2}\left[g(x+t) - g(x-t)\right] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} h(y)\,dy.$$

Τυπος D'Alembert

Σημ:

Η γενικη λυση της $u_{tt} - u_{xx} = 0$ ειναι της μορφης

(13) $$u(x,t) = F(x+t) + G(x-t)$$

οπου F, G καθοριζονται απο τις αρχικες συνθηκες.

Πραγματι η (12) ειναι της μορφης (13).

Αντιστροφα $\forall\, F, G$ C^2 συναρτησεις

$$\Big(u_{tt} = F''(x+t) + G''(x-t)$$

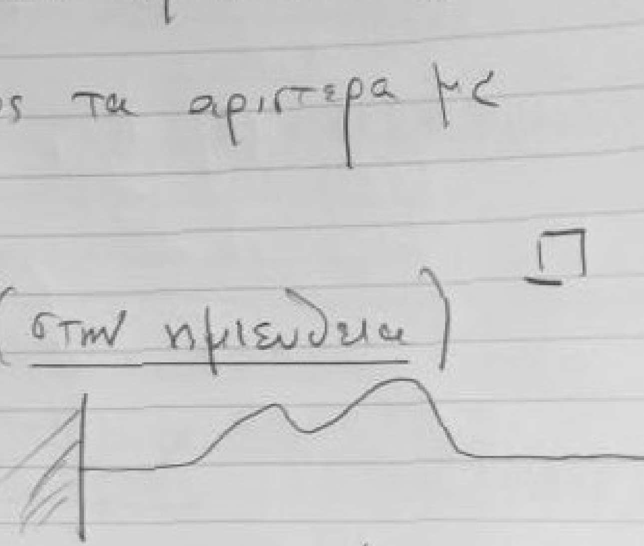
$$u_{xx} = F''(x+t) + G''(x-t) \Big)$$

η (13) ειναι λυση.

Η $F(x+t)$ είναι η γενική λύση της $u_t - u_x = 0$ και η $G(x-t)$ η γενική λύση της $u_t + u_x = 0$.

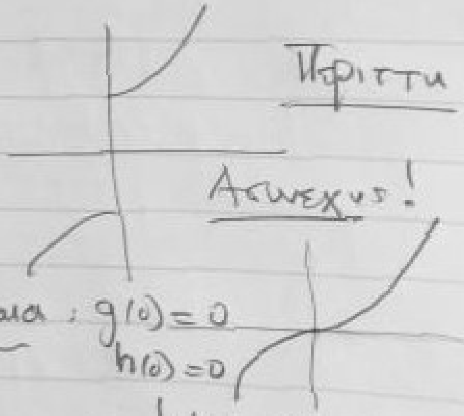
F, G οδεύοντα κύματα, ένα προς τα δεξιά με ταχύτητα 1, ένα προς τα αριστερά με ταχύτητα 1. □

B. $n=1$, $U=(0,\infty)$ (στην ημιευθεία)



(14) $u_{tt} - u_{xx} = 0$, $(0,\infty)\times(0,\infty)$

Α.Σ. $\begin{cases} u(x,0) = g(x), & x \in (0,\infty) \\ u_t(x,0) = h(x), & x \in (0,\infty) \end{cases}$



Σ.Σ. $u(0,t) = 0$, $t>0$

Αναγκαία: $g(0)=0$, $h(0)=0$

Περιττή Ανάκλαση

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x), & x \geq 0 \\ -g(-x), & x<0 \end{cases}, \quad \tilde{h}(x) := \begin{cases} h(x), & x \geq 0 \\ -h(-x), & x \leq 0 \end{cases}$$

Επιλύνουμε την κυματική στην ευθεία

$$\tilde{u}(x,t) = \frac{1}{2}\left[\tilde{g}(x+t) + \tilde{g}(x-t)\right] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \tilde{h}(y)\,dy$$

Υπολογίζουμε για $x=0$

$$\tilde{u}(0,t) = \tilde{g}(0) + \frac{1}{2}\int_{-t}^{t} \tilde{h}(y)\,dy = 0 \quad , \quad t \geq 0,$$

Επίσης για $x>0$

$$\tilde{u}(x,0) = \tilde{g}(x) = g(x)$$

$$\tilde{u}_t(x,0) = \frac{1}{2}\left[\cancel{\tilde{g}'(x) - \tilde{g}'(x)}\right] + \frac{1}{2}\left[\tilde{h}(x+t) + \tilde{h}(x-t)\right]$$

$$= \tilde{h}(x) = h(x)$$

$$\boxed{u(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left[g(x+t) + g(x-t)\right] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} h(y)\,dy \ , & x \geq t \geq 0 \\ \frac{1}{2}\left[g(x+t) - g(t-x)\right] + \frac{1}{2}\int_{-x+t}^{x+t} h(y)\,dy \ , & 0 \leq x \leq t \end{cases}}$$

Γ. Μέθοδος Σφαιρικών Μέσων Όρων $(U \subset \mathbb{R}^n, n \geq 2)$

$$(15) \begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 \ , & (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u(x,0) = g(x) \ , & x \in \mathbb{R}^n \\ u_t(x,0) = h(x) \ , & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Συμβολισμός

$$U(x;r,t) := ⨍_{\partial B(x,r)} u(y,t)\,dS_y$$

$$G(x;r) := ⨍_{\partial B(x,r)} g(y)\,dS_y$$

$$H(x;r) := ⨍_{\partial B(x,r)} h(y)\,dS_y$$

Λήμμα 1 (Euler-Poisson-Darboux Equation)

Θεώρημα 16, υποθέτουμε ότι u η λύση της (15).

Τότε ισχύει

$$(16)\quad \begin{cases} U_{tt} - U_{rr} - \frac{n-1}{r} U_r = 0, & (r,t) \in (0,\infty)\times(0,\infty) \\ U(x;r,0) = G(x;r), & r \in (0,\infty) \\ U_t(x;r,0) = H(x;r), & r \in (0,\infty) \end{cases}$$

1.

$$(17)\quad U_r(x;r,t) = \frac{1}{n\alpha(n) r^{n-1}} \int_{B(x,r)} \Delta u(y,t)\, dy$$

$$\left(= \frac{r}{n} ⨍_{B(x,r)} \Delta u(y,t)\, dy \right)$$

(βλ. σ. 21, Λήμμα 4)

Παρατηρούμε ότι $\lim_{r\to 0} U_r(x;r,t) = 0$ (18)

$$U_{rr}(x;r,t) = \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{n\alpha(n) r^{n-1}} \int_{B(x,r)} \Delta u\, dy \right)$$

$$= \frac{1}{n\alpha(n) r^{n-1}} \int_{\partial B(x,r)} \Delta u\, dS + \frac{(1-n)}{n\alpha(n) r^{n}} \int_{B(x,r)} \Delta u\, dy$$

$$= \fint_{\partial B(x,r)} \Delta u \, dS + \left(\frac{1}{n} - 1\right) \fint_{B(x,r)} \Delta u \, dy .$$

Επίσης

$$(19) \qquad \lim_{r \to 0} U_{rr}(x;r,t) = \Delta u(x,t) + \left(\frac{1}{n} - 1\right) \Delta u(x,t)$$

$$= \frac{1}{n} \Delta u(x,t).$$

2. $$U_r(x;r,t) = \frac{r}{n} \fint_{B(x,r)} \Delta u(y,t) \, dy$$

$$\overset{(15)}{=} \frac{r}{n} \int_{B(x,r)} u_{tt}(y,t) \, dy$$

$$= \frac{1}{n\alpha(n)} \frac{1}{r^{n-1}} \int_{B(x,r)} u_{tt}(y,t) \, dy$$

$\Longrightarrow$

$$r^{n-1} U_r = \frac{1}{n\alpha(n)} \int_{B(x,r)} u_{tt} \, dy$$

(23

$$\left(r^{n-1} U_r\right)_r = \frac{1}{n\alpha(n)} \int_{\partial B(x,r)} u_{tt} \, dy = r^{n-1} \fint_{\partial B(x,r)} u_{tt} \, dy$$

$$= r^{n-1} U_{tt}$$

∎

Επίλυση για $n=3$

Θέτουμε $\tilde{U}_1 = rU$, $\tilde{G}_1 = rG$, $\tilde{H}_1 = rH$

Ισχυριζόμαστε ότι

(20) $$\tilde{U}_{tt} - \tilde{U}_{rr} = 0$$

Επαγωγή:

(21) $$\tilde{U}_{tt} = rU_{tt} = r\left[U_{rr} + \frac{2}{r}U_r\right] \qquad (n=3)$$

$$= rU_{rr} + 2U_r$$

$$= (U + rU_r)_{rr} = \tilde{U}_{rr}$$

Επίσης

(22) $$\begin{cases} \tilde{U}(x;r,0) = \tilde{G}(x;r), & \tilde{U}_t(x;r,0) = \tilde{H}(x;r,0) \\ \tilde{U}(x;0,t) = 0 & (\beta\lambda\,(18)) \end{cases}$$

Κατά συνέπεια εφαρμόζοντας τον τύπο του προηγούμενου στην περίπτωση (B_1, προηγούμενος) για $0 \le r \le t$

(23) $$\tilde{U}(x;r,t) = \frac{1}{2}\left[\tilde{G}(r+t) - \tilde{G}(r-t)\right] + \frac{1}{2}\int_{-r+t}^{r+t} \tilde{H}(y)\,dy$$

$$u(x,t) = \lim_{r \to 0+} U(x;r,t)$$

$\therefore$

$$(24) \quad u(x,t) = \lim_{r\to 0+} \frac{\tilde{U}(x;r,t)}{r}$$

$$\overset{(23)}{=} \lim_{r\to 0+} \left[\frac{\tilde{G}(t+r) - \tilde{G}(t-r)}{2r} + \frac{1}{2r}\int_{t-r}^{t+r} \tilde{H}(y)\,dy \right.$$

$$= \tilde{G}'(t) + \tilde{H}'(t)$$

$$\tilde{G} = rG \ , \ \tilde{H} = rH$$

$\Rightarrow$

$$(25) \quad u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(t \fint_{\partial B(x,t)} g\,dS \right) + t \fint_{\partial B(x,t)} h\,dS$$

Κανοντας χρηση των

$$\fint_{\partial B(x,t)} g(y)\,dS_y = \fint_{\partial B(0,1)} g(x+tz)\,dS_z \ .$$

παιρνουμε

$$(26) \quad \frac{\partial}{\partial t}\left(\fint_{\partial B(x,t)} g\,dS \right) = \fint_{\partial B(0,1)} Dg(x+tz)\cdot z\,dS_z = \fint_{\partial B(x,t)} Dg(y)\cdot \frac{y-x}{t}\,dS_y$$

Τελικώς έχουμε τον <u>τύπο του Kirchhof</u>

$$u(x,t) = \fint_{\partial B(x,t)} \left[t\,h(y) + g(y) + \nabla g(y) \cdot (y-x) \right] dS_y$$

$x \in \mathbb{R}^3 \; , \; t > 0$

$\square$