Διαλεξη 7 (Ομαλοτητα)

• Οι Αρμονικες Συναρτησεις ειναι C^∞

Θεωρημα 1
Εστω $u \in C(U)$ εχει την ιδιοτητα μεσης τιμης, τοτε $u \in C^\infty(U)$, U ανοικτο, $U \subset \mathbb{R}^n$.

Σχολια (mollifier, Ορος του Friedrichs απο το Courant 1950's)
Εστω $\eta(x) \geq 0$, με συμπαγη φορεα,

$$\eta(\cdot) \in C^\infty(U), \text{ και } \int_{\mathbb{R}^n} \eta(x)\,dx = 1 \qquad (*)$$

Παραδειγμα

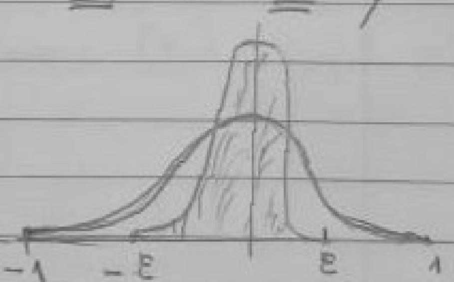
$$(1) \qquad \eta(x) = \begin{cases} C\, e^{\frac{1}{|x|^2-1}}, & |x|<1 \\ 0, & |x| \geq 1 \end{cases}$$

(C ωστε να ισχυει η $(*)$)

Οριζουμε (αλλαγη κλιμακας απο 1 σε ε)

$$(2) \qquad \eta_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon^n}\, \eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

$\forall\ \varepsilon > 0$



Διατηρει το εμβαδον:

$$(3) \qquad \int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\varepsilon^n}\, \eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) dx$$

$$\left\{ y = \frac{x}{\varepsilon} \Rightarrow \left|\det\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)\right| = \frac{1}{\varepsilon^n} \right\}$$

$$\left(dx = \frac{dx}{dy}\, dy \ , \quad \det\left|\frac{dx}{dy}\right| = \varepsilon^n \right)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \eta(y)\, dy = 1.$$

Έστω ότι

$$\operatorname{supp} \eta \subset B(0;1),$$

τότε

$$\operatorname{supp} \eta_\varepsilon(x) = \operatorname{supp} \eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

$$\left(\frac{|x|}{\varepsilon} < 1 \Leftrightarrow |x| < \varepsilon \right)$$

$$\operatorname{supp} \eta_\varepsilon \subset B(0;\varepsilon)$$

$\square$

Η συγκεκριμένη η στην (1) είναι επίσης ακτινικά συμμετρική,

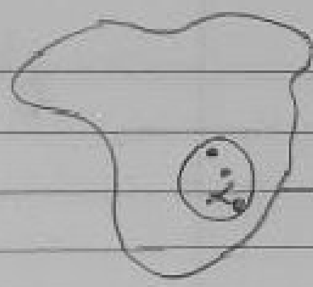
$$\eta(x) = \tilde{\eta}(|x|)$$

και λέγεται το "standard mollifier".

Προφανώς

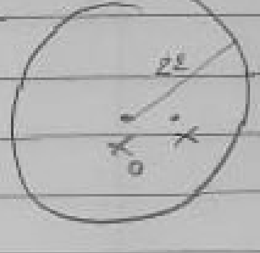
(4) $$\eta_\varepsilon \in C^\infty(U)$$

Απόδειξη του Θεωρήματος



1. Ορίζουμε για $x \in U$

(5) $$u^\varepsilon(x) = (\eta_\varepsilon * u)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon(x-y)\, u(y)\, dy$$



Παρατηρούμε ότι το

$$\operatorname{supp}\; y \to \eta_\varepsilon(x-y)$$

περιέχεται στην $B(x;\varepsilon)$. Σταθεροποιούμε $x_0 \in U$ και θεωρούμε την $B(x_0;2\varepsilon) \subset U$, (δυνατόν για $\varepsilon > 0$ αρκετά μικρό) και στην συνέχεια θεωρούμε x τέτοιο $|x - x_0| < \varepsilon$. Έχουμε $B(x;\varepsilon) \subset B(x_0;2\varepsilon)$

(6) $$\int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon(x-y)\, u(y)\, dy = \int_{B(x_0;2\varepsilon)} \eta_\varepsilon(x-y)\, u(y)\, dy$$

Επίσης κάνοντας χρήση της $u(\cdot) \in C(\overline{B(x_0;2\varepsilon)})$

(7) $$\frac{\partial u^\varepsilon(x)}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{B(x_0;2\varepsilon)} \eta_\varepsilon(x-y)\, u(y)\, dy$$

$$= \int_{B(x_0;2\varepsilon)} \frac{\partial \eta_\varepsilon(x-y)}{\partial x_i}\, u(y)\, dy$$

Παρομοίως

45

$$\frac{\partial^2 u^\varepsilon(x)}{\partial x_i \partial x_j} = \int_{B(x_0;2\varepsilon)} \frac{\partial^2 \eta_\varepsilon}{\partial x_i \partial x_j}(x-y)\, u(y)\, dy$$

(8) $$u^\varepsilon \in C^\infty(V).$$

2. Στην συνέχεια θα αξιοποιήσουμε ότι το "standard mollifier" είναι και ακτινικά συμμετρικό και θα δείξουμε ότι $u^\varepsilon(x) = u(x)$!

$$u^\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{B(x,\varepsilon)} \tilde{\eta}\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right) u(y)\, dy$$

Δεν έχει εξάρτηση από γωνία

$$= \frac{1}{\varepsilon^n} \int_0^\varepsilon \left(\int_{\partial B(x,\sigma)} \tilde{\eta}\, u\, dS \right) d\sigma \quad (\beta\lambda.\ RK\ \sigma.25)$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^n} \int_0^\varepsilon \tilde{\eta}\left(\frac{\sigma}{\varepsilon}\right) \left(\int_{\partial B(x,\sigma)} u\, dS \right) d\sigma$$

$$\overset{\Theta.M.T.}{=} \frac{1}{\varepsilon^n} \int_0^\varepsilon \tilde{\eta}\left(\frac{\sigma}{\varepsilon}\right) \left[u(x)\, |\partial B(x,\sigma)| \right] d\sigma$$

$$= u(x)\,\frac{1}{\varepsilon^n}\int_0^\varepsilon \tilde{\eta}\left(\frac{\sigma}{\varepsilon}\right) |\partial B(x,\sigma)|\, d\sigma$$

$$= u(x)\,\frac{1}{\varepsilon^n}\int_0^\varepsilon \left(\tilde{\eta}\left(\frac{\sigma}{\varepsilon}\right)\int_{\partial B(x,\sigma)} 1\, dS\right) d\sigma$$

$$= u(x)\,\frac{1}{\varepsilon^n}\int_{B(x,\varepsilon)} \eta\left(\frac{y}{\varepsilon}\right) dy$$

1 (σ 43)

$$= u(x)\int_{B(x,\varepsilon)} \eta_\varepsilon(y)\, dy = u(x).$$

$\overset{(8)}{\Longrightarrow}$

$$u(\cdot)\in C^\infty.$$

□

• Οι Αρμονικές Συναρτήσεις είναι (Πραγματικές) αναλυτικές, C^ω

Θα Χρειαστούμε 2 βήματα:

(α) $$\|D^\alpha u\|_{L^\infty(B(x_0,r))} \le CM\left(\frac{2^{n+1}n^2 e}{r}\right)^{|\alpha|}\alpha!$$

(β) $$\sum_\alpha \frac{D^\alpha u(x_0)}{\alpha!}(x-x_0)^\alpha$$ συγκλίνει απολύτως

Συμβολισμός (Πολυδείκτες)

$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\alpha_i \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$

Πολυδείκτης, $|\alpha| := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$

$D^{\alpha} u(x)$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, ορίζεται

$$\frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

Παράδειγμα

$\alpha = (1, 3)$, $D^{\alpha} u(x_1, x_2) = \dfrac{\partial^4 u(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2^3}$.

Σχόλιο

$$C^{\infty} \subsetneq C^{\omega}$$

Δυναμοσειρές

(9) $$\sum_{\alpha} c_{\alpha} x^{\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{N}^n, \quad c_{\alpha} \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

$(x^{\alpha} = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n})$

Έστω

(9*) $$\mu = \sum_{\alpha} |c_{\alpha}| |z^{\alpha}| < \infty \quad \text{για κάποιο } z$$

Τότε η (9) συγκλίνει απόλυτα $\forall x$ τ.ω

(10) $$|x_i| \leq |z_i| \ , \ i=1,\dots,n$$

και κατά συνέπεια η (9) ορίζει συνεχή

(11) $$f(x) = \sum_{\alpha} c_\alpha x^\alpha$$

στο (10).

Επίσης όλες οι σειρές που προέρχονται από τ-πλή διαφόριση της (9) συγκλίνουν απόλυτα στο <u>εσωτερικό</u> του (10), x τ.ω.

(12) $$|x_i| < |z_i| \ , \ i=1,\dots,n.$$

<u>Άσκηση 5</u> (βλ. John, 4th Edition)

(i) Δείξτε ότι για $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$, $|x_i|<1$ $\forall i=1,\dots,n$ ισχύει ότι

(13) $$\sum_{\substack{\alpha \\ \alpha \geq \beta}} \frac{\alpha!}{(\alpha-\beta)!} x^{\alpha-\beta} = D^\beta \frac{1}{(1-x)^{\mathbb{1}}} = \frac{\beta!}{(1-x)^{\mathbb{1}+\beta}}$$

(ii) Για όλα τα x σε συμπαγές του (12) ισχύει

(14) $$|x_i| \leq q\,|z_i| \qquad i=1,\dots,n$$

για κάποιο $q \in (0,1)$.

$$\frac{1}{(1-x)^{\mathbb{1}}} := \frac{1}{(1-x_1)(1-x_2)\cdots(1-x_n)}$$

(iii) Κάνοντας χρήση της (13) για $x = q$,

$q = (q, \dots, q) = q^{1}$ επαληθεύσατε τα επόμενα:

$$\sum_{\alpha} |D^{\beta} c_{\alpha} x^{\alpha}| \leq \sum_{\alpha \geq \beta} \frac{\alpha!}{(\alpha-\beta)!} |c_{\alpha}| \, q^{|\alpha-\beta|} \, |z^{\alpha-\beta}|$$

$$\overset{(q^{*})}{\leq} \frac{b}{|z^{\beta}|} \sum_{\alpha \geq \beta} \frac{\alpha!}{(\alpha-\beta)!} q^{|\alpha-\beta|}$$

$$= \frac{b}{|z^{\beta}|} \frac{\beta!}{(1-q)^{n+|\beta|}}.$$

$\therefore$ $f(x)$ είναι C^{∞}.

(iv) Δείξτε ότι

$$c_{\alpha} = \frac{1}{\alpha!} D^{\alpha} f(0).$$

$\square$

($\alpha! = \alpha_1! \, \alpha_2! \dots \alpha_n!$

$x^{\alpha} = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$

$\alpha \geq \beta \iff \alpha_i \geq \beta_i, \ i = 1, \dots, n$

$c_{\alpha} = c_{\alpha_1 \dots \alpha_n}$)

Θεώρημα 3

Έστω u αρμονική στο $U \subset \mathbb{R}^n$. Τότε ισχύει

$$(15) \qquad |D^{\alpha} u(x_0)| \leq \frac{C_k}{r^{n+k}} \|u\|_{L^1(B(x_0,r))}$$

$\forall\ B(x_0,r) \subset U$, $|\alpha| = k$, όπου

$$C_0 = \frac{1}{\alpha(n)}, \quad C_k = \frac{(2^{n+1} n k)^k}{\alpha(n)} \leftarrow \text{εμβαδό } S^{n-1}$$

Απόδειξη (Επαγωγή στο k)

$k=0$

$$u(x_0) \overset{\text{ΘΜΤ}}{=} ⨍_{B(x_0,r)} u\,dy \quad \checkmark$$

Παρατήρηση

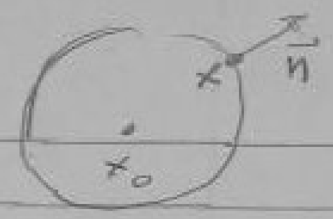
$u_{x_i}(x)$ αρμονική

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i} \Delta u = \Delta (u_{x_i}) \right)$$

$\therefore$

$$(16) \qquad |u_{x_i}(x_0)| \overset{\text{ΘΜΤ}}{=} \left| ⨍_{B(x_0, r/2)} u_{x_i}\, dx \right|$$

$=$



(Θεώρημα απόκλισης με $\vec{V} = (0, 0, \dots, \underbrace{u}_{i\text{-th}}, 0, \dots, 0)$

$$\int_{B(x_0,\frac{r}{2})} \operatorname{div} \vec{V}\, dx = \int_{\partial B(x_0,\frac{r}{2})} \vec{V}\cdot\vec{n}\, dS \quad)$$

$$= \left| \frac{2^n}{\alpha(n) r^n} \int_{\partial B(x_0,\frac{r}{2})} u n_i \, dS \right|$$

$$\le \frac{2n}{r} \|u\|_{L^\infty(\partial B(x_0,\frac{r}{2}))} .$$

Έχουμε ότι

$$x \in \partial B(x_0, r/2) \Rightarrow B(x, r/2) \subset B(x_0, r)$$

$\overset{k=0}{\Rightarrow}$

(17) $$|u(x)| \le \frac{1}{\alpha(n)} \left(\frac{2}{r}\right)^n \|u\|_{L^1(B(x_0, r))}$$

(16), (17) $\Rightarrow$

(18) $$|D^\alpha u(x_0)| \le \frac{2^{n+1}}{\alpha(n)} \frac{1}{r^{n+1}} \|u\|_{L^1(B(x_0,r))}$$

Απόδειξη για $k=1$. Για τον γενικό βήμα, (βλέπε Evans σ 29-30).

∎