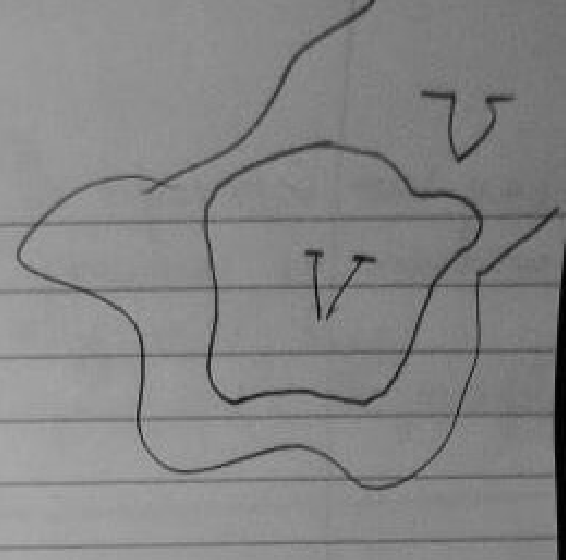


Διάλεξη 8

1. Ανισότητα Harnack

(1) $\Delta u = 0, \ x \in U, \ u \geq 0$

Θεώρημα 1

Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό, $V \subset\subset U$ (συμπαγώς εγκλεισμένο, $\overline{V} \subset U$, $\overline{V}$ συμπαγές)
V ανοικτό, συνεκτικό.
Τότε $\exists\ C$, σταθερά, εξαρτώμενη μόνο από το V και ισχύει

(2) $$\sup_V u \leq C \inf_V u$$

$\forall$ αρμονική $u \geq 0$ στο U.
(η ίδια C για $\forall\ u$ όπως στην (1)). □

Παρατήρηση 1

Δοθέντων $x, y \in V$
$\overset{(2)}{\Longrightarrow}$

(3) $$u(x) \leq \sup_V u \leq C \inf_V u \leq C u(y)$$

Επίσης αντιστρέφοντας τους ρόλους $x \leftrightarrow y$

(4) $$u(y) \leq C u(x)$$

(3),(4) $\Rightarrow$

(5) $$\frac{1}{C} u(y) \leq u(x) \leq C u(y)$$

$$\iff \frac{1}{C} \le \frac{u(x)}{u(y)} \le C,$$
$$\frac{1}{C} \le \frac{u(y)}{u(x)} \le C$$

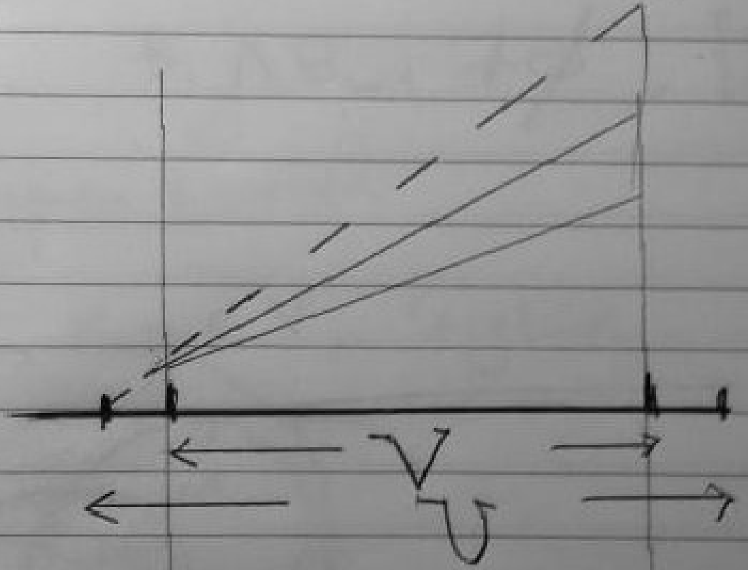
Οι τιμές όλων των $u \geq 0$ αρμονικών σε σημεία $x, y \in V$, είναι ομοιόμορφα "συγκρίσιμες"

Παρατήρηση 2 (Αρμονικές Συναρτήσεις συμπεριφέρονται σαν γραμμικές)

Υπενθυμίζουμε το Θ.Μ.Τ. Lecture 4, $n=1$

Και για την Harnack ισχύει κάτι ανάλογο.

$\mathbb{R}^1$



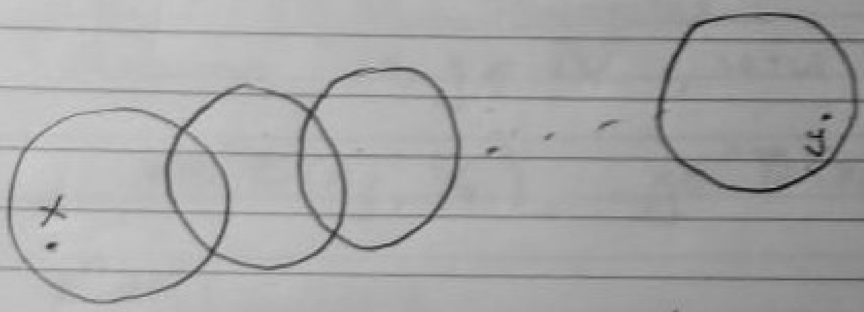
Η $u \geq 0$ στο U φράσει την κλίση στο V! Όλες οι ευθείες, μη αρνητικές στο U, έχουν τις κλίσεις τους ομοιόμορφα φραγμένες στο $V \subset\subset U$ (Άσκηση 7).

Παρατηρηση 3

Απο συμπαγεια του $\bar{V}$ δοθεισης $r>0$

$\exists$ πεπερασμενος αριθμος $B(x_i, r/2)$

$$\bar{V} \subset \bigcup_{i=1}^{N} B\left(x_i, \frac{r}{2}\right) = \bigcup_{i=1}^{N} B_i$$

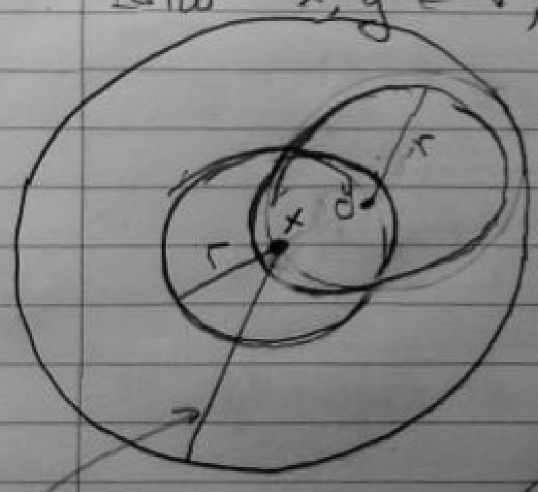


$x, y \in V$

$B_i \cap B_{i-1} \neq \emptyset$, $\{B_i\}$ εξαρταται απο V

Παρατηρηση 4

Εστω $x, y \in V$, $|x-y| \leq r$



2r

$B(y,r) \subset B(x,2r)$

$u \geq 0$

$$(6) \quad u(x) = \fint_{B(x,2r)} u\,dz \geq \frac{1}{|B(x,2r)|} \int_{B(y,r)} u\,dz = \frac{1}{\alpha(n)(2r)^n} \int_{B(y,r)} u\,dz$$

$$= \frac{1}{2^n} \fint_{B(y,r)} u\,dz = \frac{1}{2^n} u(y)$$

$\Rightarrow$

$$2^n u(x) \geq u(y),$$

και αντιστρέφοντας $x \leftrightarrow y$

$$2^n u(y) \geq u(x)$$

$\therefore$

(0) $$2^n u(y) \geq u(x) \geq \frac{1}{2^n} u(y), \quad |x-y| \leq r$$

<u>Συνέχεια Απόδειξης Θεωρήματος 1</u>

Δοθέντων $x, y \in V$, έστω

$$x \in B(x_j, r/2), \quad y \in B(x_i, r/2), \quad i < j$$

$$2^n u(y) \geq u(x_i)$$
$$2^n u(x_i) \geq u(x_{i+1})$$
$$\vdots$$
$$2^n u(x_{j-1}) \geq u(x_j)$$
$$2^n u(x_j) \geq u(x)$$

$\Rightarrow$

$$2^{n(j-i)+2} u(y) \geq u(x)$$

$\Rightarrow$

(8) $$2^{n(N+1)} u(y) \geq u(x)$$

Η (8) ανεξάρτητη i, j, ισχύει $\forall\, x, y \in V$

$\Rightarrow$

(9) $$2^{n(N+1)} u(y) \geq \sup_{x \in V} u(x)$$

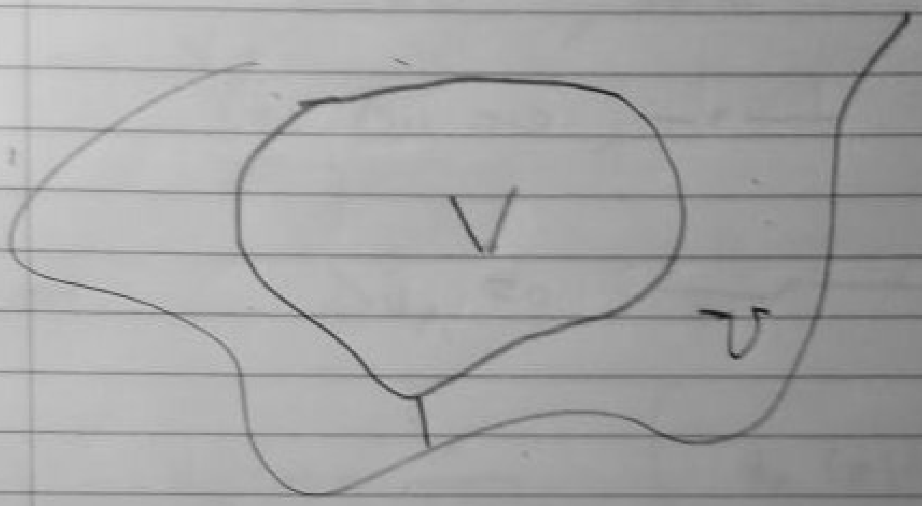
$\Rightarrow$

(10) $$2^{n(N+1)} \inf u(y) \geq \sup_{x \in V} u(x).$$

$\square$

Σημ

Χρειαζόμαστε οι μπάλες να είναι εντός του U



$$r = \frac{1}{4}\operatorname{dist}(V, \partial U).$$

$\square$

2 Το Θεώρημα του Liouville

Θεώρημα 2
Έστω $u: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ αρμονική και φραγμένη
$\Rightarrow$
$u \equiv$ σταθερά

Θεώρημα 2'
Έστω $u: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ αρμονική και φραγμένη από την μία πλευρά. Τότε $u \equiv$ σταθερά.

Απόδειξη Θεωρήματος 2

$|u(x)| < M$. Γνωρίζουμε ότι $u \in C^\infty$

$$\Delta u = 0 \quad , x \in \mathbb{R}^n$$

$\Rightarrow$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \Delta u = 0 \quad , \text{—"—}$$

Θεώρημα απόκλισης

$\Rightarrow$

$$\Delta u_{x_i} = 0 \quad , \text{—"—}$$

(11) $$u_{x_i}(x) = \frac{1}{\alpha(n) r^n} \int_{B(x,r)} u_{x_i}(z)\,dz = \frac{1}{\alpha(n) r^n} \int_{\partial B(x,r)} u \nu_i \, dS$$

(12) $$\left| \int_{\partial B(x,r)} u \nu_i \, dS \right| \leq \int_{\partial B(x,r)} |u \nu_i| \, dS \leq \int_{\partial B(x,r_1)} |u| |\nu_i| \, dS$$

$$\leq M \, |\partial B(x, r_1)|$$

(11), (12) $\Rightarrow$

(13) $$|u_{x_i}(x)| \leq \frac{M}{r} \longrightarrow 0 \quad , r \to \infty .$$

$$u_{x_i} \equiv 0 \quad , i = 1, \dots, n$$

$\Rightarrow$

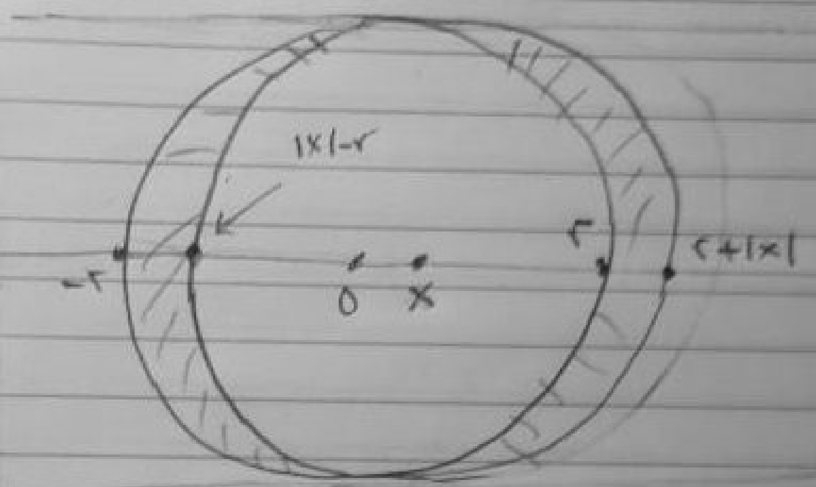
$u(x) \equiv$ σταθερά.

$\square$

Απόδειξη Θεωρήματος 2'

Χωρίς βλάβη της γενικότητας έστω u αρμονική στο $\mathbb{R}^n$, $u \geq 0$.

Φιξάρουμε $x \in \mathbb{R}^n$, και επιλέγουμε $r > |x|$



$$u(x) - u(0) = \frac{1}{|B(0,r)|}\left[\int_{B(x,r)} u(z)\,dz - \int_{B(0,r)} u(z)\,dz\right]$$

$$\Delta_r := B(0,r)\,\triangle\, B(x,r)$$

$$|u(x)-u(0)| \leq \frac{1}{|B(0,r)|}\int_{\Delta_r} u(z)\,dz \qquad (u \geq 0)$$

$$\leq \frac{1}{|B(0,r)|}\int_{B(0,r+|x|)\setminus B(0,r-|x|)} u(z)\,dz$$

$$= u(0)\,\frac{(r+|x|)^n-(r-|x|)^n}{r^n} \xrightarrow[r\to\infty]{} 0$$

$\square$

$u_{x_i x_i} = \phi'' u_{x_i} u_{x_i} + \phi' u_{x_i x_i} = \phi'' |\nabla u|^2 + \phi' \Delta u$

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{στο } U \\ u = g & \text{στο } \partial U \end{cases} \qquad U \text{ ανοικτό, φραγμένο.}$$

$\exists\, C > 0$ ώστε

$$\max_{\bar U} |u| \le C\left(\max_{\partial U} |g| + \max_{\bar U} |f| \right)$$

Απ.

$$\Delta\left(u + \frac{|x|^2}{2n}\lambda\right) = \Delta u + \lambda = -f + \lambda \ge 0, \quad \lambda = \max_{\bar U} |f|$$

$$\left.\begin{array}{ll} \Delta v = 0 & \text{στο } U \\ v = u + \frac{|x|^2}{2n}\lambda, & \text{στο } \partial U \end{array}\right] \overset{①②}{\Rightarrow} v \ge u + \frac{|x|^2}{2n}\lambda \text{ στο } U$$

$$\max_{\bar U} v \le \max_{\partial U} v = \max_{\partial U} \left(g + \frac{|x|^2}{2n}\lambda\right)$$

$$\max_{\bar U} u \le \max_{\bar U} \left(v - \frac{|x|^2}{2n}\lambda\right) \le \max_{\partial U} \left(g + \frac{|x|^2}{2n}\lambda\right)$$

$$\le \max_{\partial U} |g| + C \max_{\bar U} |f|.$$

7) $a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = -u$, $D = \{x^2 + y^2 < 1\}$, $u \in C^1(\bar D)$

Έστω $a(x,y)x + b(x,y)y > 0$ στο ∂D. Δείξτε ότι $u \equiv 0$ ...

Απ.

$M = \max_{\bar D} u = u(x_0, y_0)$