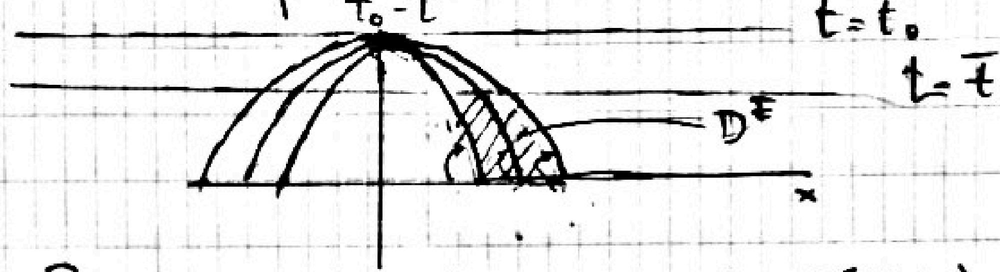
Κατ'οίκον Εξέταση - ΜΔΕ Ι - Ιανουάριος 21

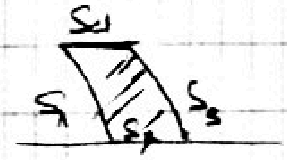
Μέρος ΙΙΙ (Διάχυση)

1) (βλ. Διάλεξη 9, eclass, ελλειπτικό ανάλογο)

Θεωρούμε στο x-t επίπεδο την οικογένεια των παραβολών

$$\rho = \frac{x^2}{t_0 - t}$$





(i) Βρείτε την $\sigma = \sigma(\rho)$ τ.ω. $\sigma = \sigma(\rho(x,t))$ ικανοποιεί την

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} - \frac{\partial \sigma}{\partial t} = 0$$

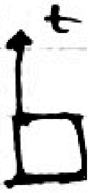
(ii) Έστω $D^{\bar{t}}$ όπως στο σχήμα μεταξύ των παραβολών ρ_1, ρ_2, και έστω $v \in C^2$ τ.ω.

$$v_{xx} - v_t \geq 0 \quad \text{στο } D^{\bar{t}}$$

Δείξτε ότι

$$\max_{D^{\bar{t}}} v = \max_{S_1 \cup S_2 \cup S_3} v = M$$

(Υπόδειξη: Τροποποιήστε κατάλληλα την απόδειξη για ορθογώνιο



(iii) Έστω $u(x,t)$ όπου

$$u_{xx} - u_t \geq 0 \quad \text{στο } D^{\bar{t}}$$

Για $\rho \in [\rho_1, \rho_2]$ ορίζουμε

$$M_1(\rho) = \max_{\substack{x^2 = \rho(t_0 - t) \\ 0 \leq t \leq T}} u(x,t), \quad M_2 = \max_{\sqrt{\rho_1 t_0} \leq x \leq \sqrt{\rho_2 t_0}} u(x,0), \quad M(\rho) = \max(M_1(\rho),$$

Ορίζουμε $\varphi(\rho) = a + b\,\sigma(\rho)$ τ.ω. $(a, b \in \mathbb{R})$

$$\varphi(\rho_1) = M(\rho_1), \quad \varphi(\rho_2) = M(\rho_2)$$

Θέτουμε

$$v = u - \varphi(\rho)$$

Δείξτε ότι

$$v_{xx} - v_t \geq 0 \quad \text{στο } D^{+}$$

και μέσω (ii)

$$(*) \quad M(\rho) \leq \frac{M(\rho_1)[\sigma(\rho_2) - \sigma(\rho)] + M(\rho_2)[\sigma(\rho) - \sigma(\rho_1)]}{\sigma(\rho_2) - \sigma(\rho_1)}$$

$\therefore \ \rho \longrightarrow M(\rho)$ κυρτή.

(iv) <u>Πρόταση</u>: Έστω $u(x,t)$ C^2 λύση της $u_{xx} - u_t = 0$ στο $D: \{-\infty < x < \infty,\ 0 < t < T\}$.

Έστω

$$\begin{cases} |u(x,t)| \leq A e^{cx^2} & (\text{κάποια } A > 0,\ c > 0) \\ u(x,0) = 0, & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Τότε

$$u(x,t) \equiv 0 \quad \text{στο } D.$$

<u>Απόδειξη</u>

Δικαιολογήστε τα επόμενα βήματα:

$$t_0 < \frac{1}{4c}, \quad D_1 = \left\{-\infty < x < \infty,\ 0 \leq t \leq \frac{t_0}{2}\right\}$$

Θεωρούμε την $u_{xx} - u_t = 0$ στο D_1

- $\dfrac{M(\rho_2)}{\sigma(\rho_2)} \longrightarrow 0$ όπως $\rho_2 \to +\infty$ (γιατί;)
- $M(\rho) \leq M(\rho_1)$ (— ״ —)
- $\rho_1 \to 0 \implies \max\limits_{\{x \geq 0,\ 0 \leq t \leq \frac{1}{2}t_0\}} u = \max\limits_{0 \leq t \leq \frac{1}{2}t_0} u(0,t)$ (— ״ —)

• Ανάλογα και για $x \le 0$

∴

$$\max_{D_1} u = \max_{0 \le t \le \frac{1}{2}t_0} u(0,t) \qquad (\text{γιατί;})$$

(γιατί;)

• Ομοίως και για $-u$.

#

2) Θεωρούμε το

$$(\text{ΠΑΤ}) \begin{cases} u_t = u_{xx} & , t>0, x\in\mathbb{R} \\ u(x,0) = \begin{cases} 1, & x>0 \\ 0, & x<0 \end{cases} \end{cases}$$

Δείξτε ότι

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[1 + \phi\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)\right] \quad , \phi(s) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^s e^{-t^2}\,dt.$$

#

3) Η λύση της $u_t = u_{xx}$, $x\in\mathbb{R}$, $t>0$, μπορεί να συνεχιστεί αναλυτικά για $x, t \in \mathbb{C}$ σαν αναλυτική συνάρτηση, για $\operatorname{Re} t > 0$

Υπενθυμίζουμε ότι

$$K(x,y,t) := (4\pi t)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}$$

$$u(x,t) = (4\pi t)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} f(y)\,dy$$

α) $x = \xi + i\eta$, $t = \sigma + i\tau$, $\xi, \eta, y, \sigma, \tau \in \mathbb{R}$

Δείξτε

$$|K(x,y,t)| = \left(1+\frac{\tau^2}{\sigma^2}\right)^{1/4} e^{\frac{\eta^2}{4\sigma}} K\left(\xi+\frac{\tau}{\sigma}\eta,\ \sigma+\frac{\tau^2}{\sigma}\right)$$

$$|u(\xi+i\eta, \sigma+i\tau)| \le \left(\int_{\mathbb{R}} |K(\xi+iy, \sigma+i\tau)|\,dy\right) \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$$

$$= \left(1+\frac{\tau^2}{\sigma^2}\right) e^{\frac{\eta^2}{4\sigma}} \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|.$$

β) Έστω $u(x,0) = f(x) \geq 0$, φραγμένη, συνεχής, $x \in \mathbb{R}$

Δείξτε ότι

$$|u(\xi+i\eta, t)| \le e^{\eta^2/4t}\, u(\xi,t) \qquad (\text{Χρήση του } \alpha))$$

γ) Δείξτε ότι

$$|u_x(x,t)| \le \frac{e^{1/2}}{\sqrt{2t}} \sup_{|y|\le\sqrt{2t}} u(x+y,t)$$

$(x, y, t \in \mathbb{R})$

Υπόδειξη: Κάντε χρήση του τύπου του Cauchy

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{g(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta, \quad g'(z) = \ldots$$

για $u_x(x,t)$ όταν $\gamma = \{|\zeta - x| = \sqrt{2t}\}$.

#

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ