Κατ'οίκον Εξέταση - ΜΔΕ Ι - Ιανουάριος 23
Μέρος Ι (Ελλειπτικές)

1) Έστω $p(x)$ ομογενής αρμονική συνάρτηση $2^{ου}$ βαθμού
$(p(mx) = m^2 p(x))$, $\quad p: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
Δείξτε την ταυτότητα $\forall\, u \in C^1(\mathbb{R}^n)$
$$B_r(0) = \{|x|<r\}$$

$$\frac{1}{r^{n+2}} \int_{B_r(0)} \frac{1}{2}|\nabla u|^2 dx - \frac{1}{r^{n+3}} \int_{\partial B_r(0)} |u|^2 dS$$
$$= \frac{1}{r^{n+2}} \int_{B_r(0)} \frac{1}{2}|\nabla (u-p)|^2 dx - \frac{1}{r^{n+3}} \int_{\partial B_r(0)} |u-p|^2 dS.$$

2) Έστω w αρμονική συνάρτηση, $w: B_1(0) \to \mathbb{R}$
$B_1(0) = \{|x|<1\} \subset \mathbb{R}^n$.
Θα δείξετε το ακόλουθο αποτέλεσμα ακολουθώντας τα επόμενα βήματα:

$$(1) \quad r \longrightarrow N(r) := r \frac{\int_{B_r(0)} |\nabla w|^2 dx}{\int_{\partial B_r(0)} w^2 dS} \quad \text{αύξουσα}, \quad r \in (0,1)$$

Βήμα Ι

Έστω u αρμονική συνάρτηση. Ορίζουμε τον πίνακα $n \times n$

$$(2) \quad T_{ij} = u_{x_i} u_{x_j} - \delta_{ij}\left(\frac{1}{2}|\nabla u|^2\right), \quad g(u) := \frac{1}{2}|\nabla u|^2$$

$$T = \begin{pmatrix} T_1 \\ \vdots \\ T_n \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} T_1 = (T_{11}, T_{12}, \dots, T_{1n}) \\ \vdots \\ T_n = (T_{n1}, T_{n2}, \dots, T_{nn}) \end{array}$$

Δείξτε ότι

(2) $$\operatorname{div} T_j = 0, \quad j = 1, \dots, n$$

$(T_{ij} = T_{ji})$

<u>Βήμα I</u>

Δείξτε ότι

(3) $$\sum_{i,j} \int_{B_r} (x_i T_{ij})_{x_j} \, dx = -\int_{B_r} \frac{n-2}{2} |\nabla u|^2 \, dx$$

(4) $$\sum_{i,j} \int_{B_r} (x_i T_{ij})_{x_j} \, dx = -r \int_{\partial B_r} \left(g(u) - \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^2 \right) dS$$

$\therefore$

(5) $$\int_{B_r} \frac{n-2}{2} |\nabla u|^2 \, dx = r \int_{\partial B_r} \left(\frac{1}{2} |\nabla u|^2 - \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^2 \right) dS$$

<u>Βήμα II</u>

Έστω

$$D(r) := \int_{B_r} |\nabla u|^2 \, dx, \quad I(r) := \int_{\partial B_r} u^2 \, dS$$

Δείξτε ότι

(6) $$I'(r) = \frac{n-1}{r} I(r) + 2 \int_{\partial B_r} u u_\nu \, dS$$

(7) $$I^2(r) N'(r) \geq 0$$

#

3I) Έστω $w \in C^2(U) \cap C^1(\bar{U})$, $U \subset \mathbb{R}^n$, ανοικτό, φραγμένο

Έστω ότι

$$\begin{cases} \Delta w + c(x)\, w \geq 0 & \text{στο } U \\ w(x) \leq 0 & \text{στο } U \end{cases}$$

$c \in L^\infty(U)$.

Δείξτε ότι είτε

$$w(x) < 0$$

ή

$$w \equiv \text{σταθερά}.$$

3II) Έστω $w \in C^2(U) \cap C^1(\bar{U})$, $U \subset \mathbb{R}^n$, ανοικτό, φραγμένο, C^2 χωρίο

και έστω

$$\begin{cases} \Delta w + c(x)\, w \geq 0 & \text{στο } U \\ w \leq 0 & \text{στο } U \end{cases}$$

$c \in L^\infty(U)$.

Έστω ότι

$$w(\bar{x}) = 0, \quad \bar{x} \in \partial U.$$

Δείξτε ότι είτε

$$\frac{\partial w(\bar{x})}{\partial \nu} > 0$$

ή

$$w \equiv 0.$$

#

4) Εστω

$$\begin{cases} -\Delta u = u - u^3 & \text{στο } U \subset \mathbb{R}^n, \text{ ανοικτο, φραγμενο}, C^2 \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0, & \text{στο } \partial U \end{cases}$$

Δειξτε οτι

$$|u(x)| < 1$$

ή

$$u \equiv 0 \quad , \quad u \equiv 1$$

#

5) Εστω $\{v^\lambda\}$ οικογενεια συναρτησεων, $v^\lambda : \Omega \to \mathbb{R}$, αυξουσα ως προς λ, $\lambda \in [0,1]$, $v^\lambda(x) < v^{\lambda'}(x)$, $\lambda < \lambda'$, και εστω

$$(\lambda, x) \longrightarrow v^\lambda(x) \qquad C^1 \text{ στο } [0,1] \times \overline{\Omega}$$

Επισης υποθετουμε οτι

$$\Delta v^\lambda + f(v^\lambda) \leq 0 \quad \text{στο } \Omega$$

$$\Delta u + f(u) = 0 \quad \text{στο } \Omega \quad , f \in C^1$$

$u, v^\lambda \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, $\quad u \leq v^0$ στο $\partial\Omega$

$u \leq v^1$ στο Ω

Τοτε δειξτε οτι ισχυει

$$u \equiv v^0 \text{ στο } \Omega$$

ή

$$u < v^0 \text{ στο } \Omega$$

<u>Βημα Ι</u>: Αν $u \not\equiv v^1 \Rightarrow u(x) < v^1(x)$, $x \in \Omega$

<u>Βημα ΙΙ</u>: $\Lambda = \{ \lambda \in [0,1] \mid u(x) \le v^{\lambda}(x),\ x \in \Omega \}$
κλειστο συνολο

<u>Βημα ΙΙΙ</u>: Λ ανοικτο.

—//—

<u>ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ</u>

(Θα ακολουθησουν Μερος Ι και Μερος ΙΙ).