Έστω $y=y(x)$ με

(1) $y'' - \frac{2}{x}y' + cy = 0$, με $c>0$

έχουμε: $y'' - \left(\frac{2}{x} + \frac{cx}{\sqrt{c}x\cot(\sqrt{c}x)-1}\right)y' + \frac{cx}{\sqrt{c}x\cot(\sqrt{c}x)-1}y' + cy = 0$ (2)

και πολλαπλασιάζουμε με: $\varphi = \frac{\sin(\sqrt{c}x) - \sqrt{c}x\cos(\sqrt{c}x)}{x^2}$ (3) $\boxed{\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}}$

$\Rightarrow \varphi y'' - \left(\frac{2}{x} + \frac{cx}{\sqrt{c}x\cot(\sqrt{c}x)-1}\right)\varphi y' + \frac{cx}{\sqrt{c}x\cot(\sqrt{c}x)-1}\varphi y' + c\varphi y = 0$ (4)

η φ που ορίσαμε στην (3) έχει την ιδιότητα: $\boxed{\varphi' = -\left(\frac{2}{x} + \frac{cx}{\sqrt{c}x\cot(\sqrt{c}x)-1}\right)\varphi \quad (5)}$

και $\boxed{\left(\frac{\sqrt{c}x}{\sqrt{c}x\cot(\sqrt{c}x)-1}\cdot\varphi\right)' = c\varphi \quad (6)}$

Επομένως η εξίσωση (4), από τις (5),(6) θα γίνει:

$$\varphi y'' + \varphi' y' + \frac{cx\varphi}{\sqrt{c}x\cot(\sqrt{c}x)-1}y' + \left(\frac{cx\varphi}{\sqrt{c}x\cot(\sqrt{c}x)-1}\right)'y = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\varphi y' + \frac{cx\varphi}{\sqrt{c}x\cot(\sqrt{c}x)-1}y\right)' = 0 \Rightarrow \boxed{\varphi y' + \frac{cx\varphi}{\sqrt{c}x\cot(\sqrt{c}x)-1}y = c_1 \quad (7)}$$

Επιπλέον, από την (3), $\frac{\varphi}{\sqrt{c}x\cos(\sqrt{c}x) - \sin(\sqrt{c}x)} = -\frac{1}{x^2}$

Άρα, η (7) γίνεται: $\frac{\sin(\sqrt{c}x) - \sqrt{c}x\cos(\sqrt{c}x)}{x^2}y' - \frac{c\sin(\sqrt{c}x)}{x}y = c_1$

$\Rightarrow (\sin(\sqrt{c}x) - \sqrt{c}x\cos(\sqrt{c}x))y' - cx\sin(\sqrt{c}x)y = c_1x^2$ (8)

Τέλος, διαιρούμε την (8) με $(\sqrt{c}\,x\cos(\sqrt{c}\,x) - \sin(\sqrt{c}\,x))^2 = \mu$ (9)

και έχουμε:

$$\frac{-y'}{\sqrt{c}\,x\cos(\sqrt{c}\,x) - \sin(\sqrt{c}\,x)} - \frac{c\,x\sin(\sqrt{c}\,x)}{(\sqrt{c}\,x\cos(\sqrt{c}\,x) - \sin(\sqrt{c}\,x))^2}\,y = \frac{c_1 x^2}{\mu^2}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{y}{\sqrt{c}\,x\cos(\sqrt{c}\,x) - \sin(\sqrt{c}\,x)}\right)' = -\frac{c_1 x^2}{\mu^2}$$

$$\Rightarrow y = -c_1 \int \frac{x^2}{(\sqrt{c}\,x\cos(\sqrt{c}\,x) - \sin(\sqrt{c}\,x))^2}\,dx + c_2\left[\sqrt{c}\,x\cos(\sqrt{c}\,x) - \sin(\sqrt{c}\,x)\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{y(x) = c_1 \frac{\sqrt{c}\,x\sin(\sqrt{c}\,x) + \cos(\sqrt{c}\,x)}{c\sqrt{c}\left(\sin(\sqrt{c}\,x) - \sqrt{c}\,x\cos(\sqrt{c}\,x)\right)} + c_2\left[\sqrt{c}\,x\cos(\sqrt{c}\,x) - \sin(\sqrt{c}\,x)\right]} \quad (10)$$

Η περίπτωση $c<0$ είναι παρόμοια με $-c$ αντί για c μέσα στην ρίζα.

Στην περίπτωση που η εξίσωση (1) προκύπτει για τη συνάρτηση $h(\rho) = \int_{|x-\xi|\le\rho} u(x)\,dx$, για κάποια λύση της εξίσωσης $\Delta u = cu$, τότε η h ικανοποιεί και τις αρχικές συνθήκες $\lim_{\rho\to0^+} h(\rho) = \lim_{\rho\to0^+} h'(\rho) = 0$ (και από Θεώρημα παραγ. Lebesgue)

Επομένως η c_1 στην (10) είναι μηδέν και έχουμε: $(c_1 = 0)$.

$$h(\rho) = c_2\left[\sqrt{c}\,\rho\cos(\sqrt{c}\,\rho) - \sin(\sqrt{c}\,\rho)\right] = \int_{|x-\xi|\le\rho} u(x)\,dx$$

(όπου u λύση της $\Delta u = cu$)