Κατ' οίκον Εξέταση - ΜΔΕ Ι - Ιανουάριος 24

Μέρος ΙΙ (Κυματική Διάδοση)

1) Έστω $\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}$. L, πίνακας 4×4, λέγεται μετασχηματισμός Lorentz αν $L^{-1} = \Gamma L^{T} \Gamma$.

(α') Αν οι L, M Lorentz, δείξτε ότι LM, L^{-1} επίσης Lorentz

(β') L Lorentz $\iff m(Lv) = m(v)$, $\forall\, v \in \mathbb{R}^4$, $v = (x,y,z,t)$, $m(v) = x^2+y^2+z^2-t^2$

(γ') Αν $u(x,y,z,t)$ οποιαδήποτε συνάρτηση, L Lorentz, ορίζουμε $U(x,y,z,t) = u(L(x,y,z,t))$. Δείξτε ότι

$$U_{xx}+U_{yy}+U_{zz}-U_{tt} = u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}-u_{tt}$$

#

2) Θεωρήστε την Klein-Gordon: $u_{tt} - c^2\Delta u + \hat{c}^2(x) = 0$, όπου $\hat{c}^2(x)$ δοσμένη συνάρτηση, c = σταθερά.

(α') Ποια είναι η ενέργεια; Δείξτε ότι είναι σταθερή κατά την εξέλιξη.

(β') Αποδείξτε για την Klein-Gordon την αρχή της αιτιότητας, δηλ. ότι η τιμή $u(x_0, t_0)$ εξαρτάται μόνο από τις τιμές των αρχικών συνθηκών στην μπάλα $\{|x - x_0| \le c t_0\}$.

#

3) Για οποιαδήποτε λύση της διδιάστατης κυματικής εξίσωσης με αρχικά δεδομένα που μηδενίζονται στο εξωτερικό κάποιου κύκλου, να αποδειχθεί ότι $|u(x,y,t)| \le \frac{C}{t}$, για σταθερά (x,y), καθώς $t \to +\infty$.

#

4) Για την Άσκηση 3), αν ενδιαφερόμαστε για ομοιόμορφη σύγκλιση ως προς x, y τότε η καλύτερη εκτίμηση είναι $|u(x,y,t)| \le \frac{C}{\sqrt{t}}$.

#

5) "Κατεβαίνουμε" από τις δυο διαστάσεις στην μία ως εξής: Έστω $u_{tt}=c^2u_{xx}$ με αρχικά δεδομένα $\phi(x)\equiv 0$, $\psi(x)$ αυθαίρετη ($u(x,0)=\phi(x)$, $u_t(x,0)=\psi(x)$). Φανταστείτε ότι δεν γνωρίζουμε τον τύπο του d'Alembert. Θεωρείστε την $u(x,t)$ ως μια λύση της διδιάστατης εξίσωσης που δεν εξαρτάται από το y. Εξαγάγετε την λύση σε μια διάσταση.

#

6) Έστω $d(x,S)$ η απόσταση του x από επιφάνεια S, $\dim S = n-1$, στον $\mathbb{R}^n$, και έστω ότι $x\longrightarrow d(x,S)$ διαφορίσιμη. Δείξτε ότι

$$|\nabla d(x,S)|=1$$

#

7) Για οποιαδήποτε λύση της τριδιάστατης $u_{tt}=\Delta u$, με αρχικά δεδομένα που μηδενίζονται στο εξωτερικό κάποιας σφαιρικής επιφάνειας να δειχθεί ότι

$u(x,y,z,t)=0$ για φιξαρισμένα (x,y,z), $t\to+\infty$

Να αποδειχθεί ότι ισχύει η εκτίμηση

$$|u(x,y,z,t)| \leq \frac{C}{t}$$

όπως $t\to+\infty$, ομοιόμορφα ως προς (x,y,z).

#

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

(Θα ακολουθήσει Μέρος ΙΙΙ).