Σχόλια σ. 142 Διάλεξη 21

$$U_{rr} = ⨍_{\partial B(x,r)} \Delta u \, dS + \left(\frac{1}{n} - 1\right) ⨍_{B(x,r)} \Delta u \, dy$$

$$\frac{n-1}{r} U_r = \cancel{\frac{n-1}{r} \frac{r}{n}} ⨍_{B(x,r)} \Delta u \, dy$$

$$= \left(1 - \frac{1}{n}\right) ⨍_{B(x,r)} \Delta u \, dy$$

$$\therefore \; \underline{U_{rr} + \frac{n-1}{r} U_r} = ⨍_{\partial B(x,r)} \Delta u \, dS$$

$$= ⨍_{\partial B(x,r)} u_{tt} \, dS$$

$$= \underline{U_{tt}}. \quad \text{(Euler-Poisson-Darboux)} \quad \square$$

Σχόλια σ. 143

$$n=3 \quad U_{tt} = U_{rr} + \frac{(n-1)}{r} U_r$$

$$\tilde{U}_{tt} := r U_{tt} = r U_{rr} + (n-1) U_r$$

$$= \left[r U_r + (n-2) U \right]_r$$

$$\overset{n=3}{=} \left[(\underset{\sim}{rU})_r \right]_r$$

$$= \tilde{U}_{rr}$$

Σχόλιο και της Euler-Poisson-Darboux (EPD)

Η (EPD) είναι απλώς κλασική εξίσωση για τον σφαιρικώς μέσο όρο με κέντρο σημείο x. Αυτό είναι αναμενόμενο διότι η κλασική εξίσωση είναι αναλλοίωτη κάτω από στροφές (λήμμα Λαπλασιανής) και εφόσον στρέφεται την μία ή με όλες τις δυνατές στροφές και παίρνοντας τον μέσο όρο θα οδηγεί σε ... στη λύση.

Σχόλιο σ. 144

1) $$\frac{\tilde{G}(t+r)-\tilde{G}(t-r)}{2r} = \left[\frac{\tilde{G}(t+r)-\tilde{G}(t)}{r} + \frac{\tilde{G}(t)-\tilde{G}(t-r)}{r}\right]\frac{1}{2}$$

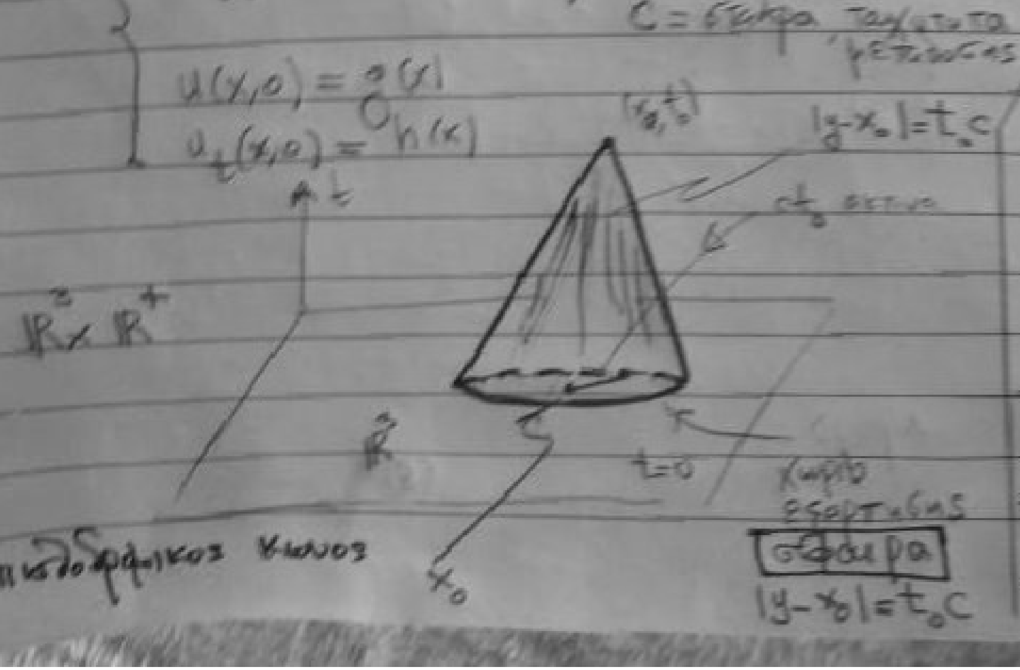
Ομοίως και ο $2^{ος}$ όρος.

2) $$u(x_0,t_0)=\frac{1}{4\pi t_0 c^2}\int_{|y-x_0|=t_0c}\left[t_0 h(y)+g(y)+\nabla g(y)\cdot(y-x_0)\right]dS_y$$

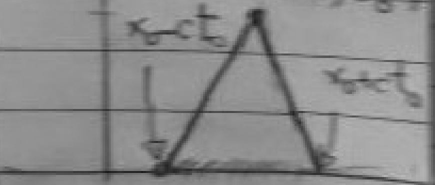
Τύπος Kirchhoff

Λύση της
$$\begin{cases} u_{tt}=c^2\Delta u, & (x,t)\in\mathbb{R}^3\times(0,\infty) \\ u(x,0)=g(x) \\ u_t(x,0)=h(x) \end{cases}$$

c = σταθερά ταχύτητα μετάδοσης



$u_{tt}=c^2u_{xx}$
$u(x,0)=g(x)$
$u_t(x,0)=h(x)$



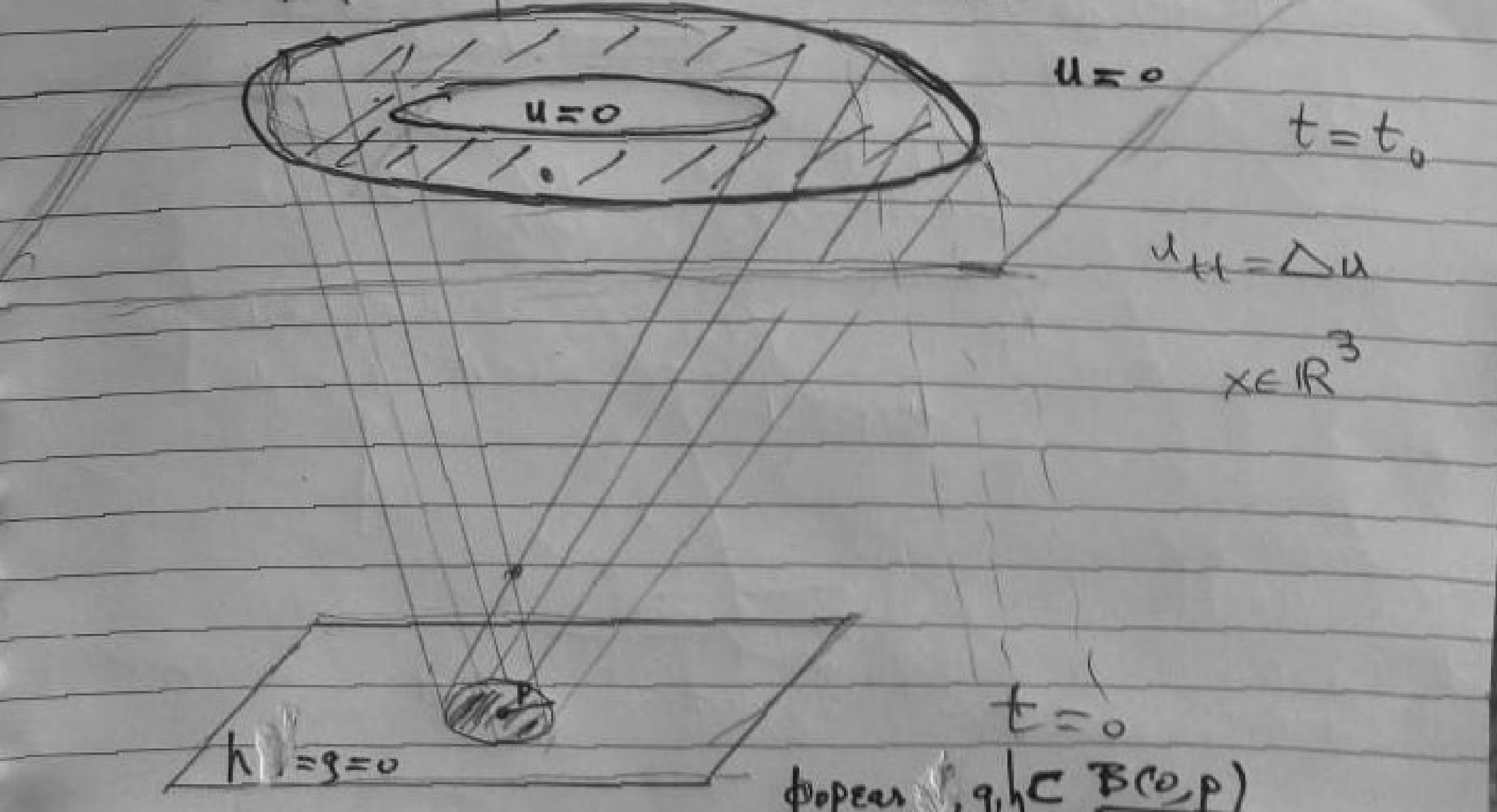
$$u(x_0,t_0)=\frac{1}{2}\left[g(x_0-ct_0)+g(x_0+ct_0)\right]+\frac{1}{2}\int_{x_0-ct_0}^{x_0+ct_0}h(y)\,dy$$

Σημαντικες διαφορες μεταξυ $n=1$ και $n=3$

1) Το χωριο εξαρτησης ειναι διαστημα $[x_0 - ct_0, x_0 + ct_0]$ για $n=1$ (εχει διασταση του χωρου $x \in \mathbb{R}^1$) ενω για $n=3$ το χωριο εξαρτησης ειναι ΣΦΑΙΡΑ, οχι μπαλα (εχει μια διασταση λιγοτερο απο την διασταση του χωρου, $x \in \mathbb{R}^3$).

2) Υπαρχει διαφορα στην ομαλοτητα. Για $n=3$ εαν η u για $t=0$ ειναι C^s τοτε για $t>0$ εν γενει θα ειναι C^{s-1} (λογω της $\nabla g(y)$). Για $n=1$ οι u για $t=0$ και για $t>0$ εχουν την ιδια ομαλοτητα.
Η Φυσικη Ερμηνεια ειναι το φαινομενο της εστιασης (focussing effect) που υπαρχει σε διαστασεις $n>1$.

3) Θεωρουμε τωρα το πεδιο επιρροης



Υποθέτουμε ότι ο φορέας των f, g είναι εντός της $B(0,\rho)$. Η διαταραχή μεταδίδεται και είναι τοπικοποιημένη εντός του δακτυλίου μεταξύ των σφαιρών

$$S(0, ct+\rho) \text{ και } S(0, ct-\rho)$$

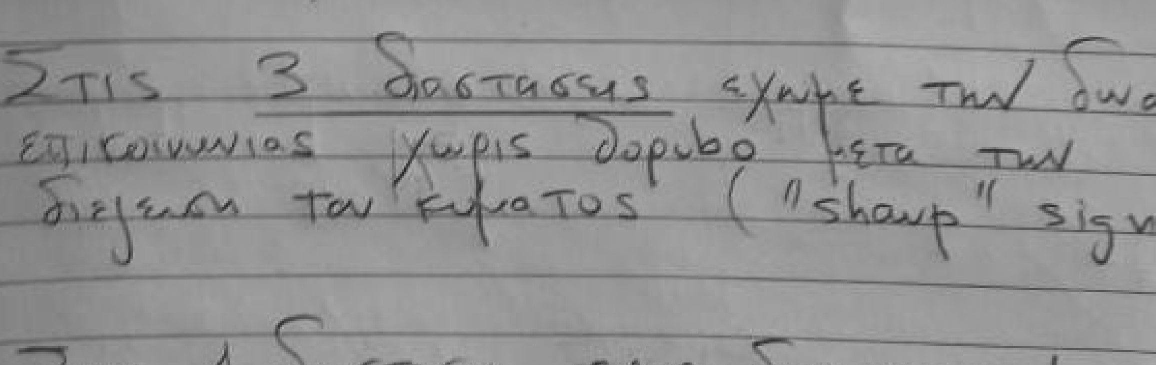
εύρους 2ρ.

Συμπέρασμα. (Αρχή Huygens $n=3$)

Ο παρατηρητής σε οποιοδήποτε σημείο x για $t > (|x|+\rho)/c$ δεν ακούει τίποτε, $u(0,t)=0$.

Στις 3 διαστάσεις έχουμε την δυνατότητα επικοινωνίας χωρίς θόρυβο μετά την διέλευση του κύματος ("sharp" signals).

Στην 1 διάσταση αυτό δεν ισχύει!

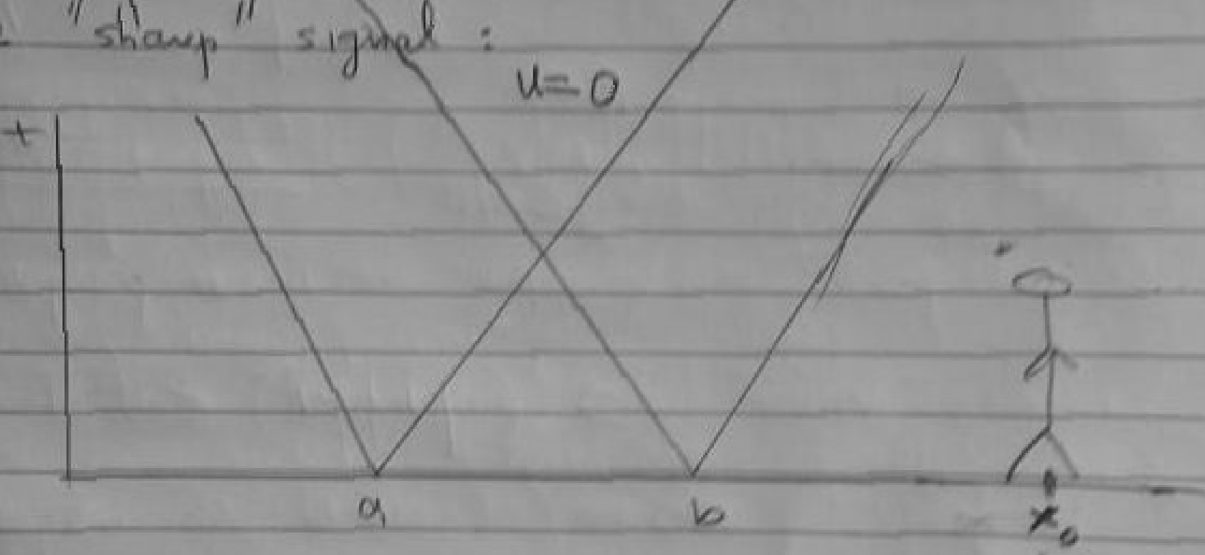


φορέας $g,h \subset [a,b]$

Ο παρατηρητης στο x_0 θα αισθανθει την διαταραχη στο χρονο $b+ct_0 = x_0$, και θα ακουει θορυβο για παντα,

$$u(x_0,t) = \frac{1}{2}\left[g(x_0+ct) + g(x_0-ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x_0-ct}^{x_0+ct} h(y)\,dy$$

Στην περιπτωση που η $h \equiv 0$ τοτε εχουμε "sharp" signal :



Ο παρατηρητης θα αισθανθει την διαταραχη στον χρονο t_1,

$$b+ct_1 = x_0 \iff t_1 = (x_0-b)/c$$

και θα επανελθει σε κατασταση ηρεμιας στον χρονο t_2

$$a+ct_2 = x_0 \iff t_2 = (x_0-a)/c \,.$$

$\square$

<u>Επίλυση για n=2</u> (Μέθοδος Hadamard)

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x_3^2}$$

(αυξάνω των διάσταση)

$$\tilde{u}(x_1, x_2, x_3, t) := u(x_1, x_2, t)$$

$$\begin{cases} \tilde{u}_{tt} = \Delta \tilde{u} & , \mathbb{R}^3 \times (0,\infty) \\ \tilde{u}(\tilde{x},0) = \tilde{g}(\tilde{x}), \quad \tilde{u}_t(\tilde{x},0) = \tilde{h}(\tilde{x}), \end{cases}$$

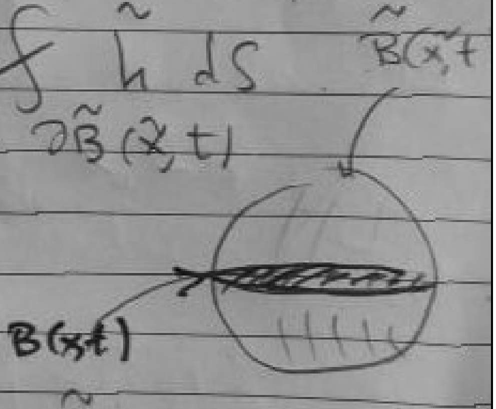
$\tilde{x} = (x_1, x_2, x_3)$

$x = (x_1, x_2, 0)$

$$\tilde{g}(\tilde{x}) = g(x_1, x_2), \quad \tilde{h}(\tilde{x}) = h(x_1, x_2)$$

Τύπος του Kirchhoff:

$$(1) \quad u(x,t) = \tilde{u}(\tilde{x},t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(t \fint_{\partial \tilde{B}(\tilde{x},t)} \tilde{g}\, d\tilde{S} \right) + t \fint_{\partial \tilde{B}(\tilde{x},t)} \tilde{h}\, dS$$



$$\fint_{\partial \tilde{B}(\tilde{x},t)} \tilde{g}\, d\tilde{S} = \frac{1}{4\pi t^2} \int_{\partial \tilde{B}(\tilde{x},t)} \tilde{g}\, d\tilde{S}$$

$\tilde{g} = g(x_1, x_2, 0)$

$$= \frac{2}{4\pi t^2} \int_{B(x,t)} g(y) \left(1 + |D\gamma(y)|^2\right)^{1/2} dy$$

$$\gamma(y) = \left(t^2 - |y-x|^2\right)^{1/2}, \quad y \in B(x,t)$$

$$\left(1+|D\gamma|^2\right)^{1/2} = t\left(t^2-|y-x|^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

(Άσκηση)

$\therefore$

$$\fint_{\partial\tilde{B}(\tilde{x},t)} \tilde{g}\, d\tilde{S} = \frac{1}{2\pi t}\int_{B(x,t)} \frac{g(y)}{(t^2-|y-x|^2)^{1/2}}\, dy$$

$$= \frac{t}{2}\fint_{B(x,t)} \frac{g(y)}{(t^2-|y-x|^2)^{1/2}}\, dy$$

$\therefore$ (1) $\Rightarrow$

$$(2)\quad u(x,t) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(t^2\fint_{B(x,t)} \frac{g(y)}{(t^2-|y-x|^2)^{1/2}}\, dy\right)$$

$$+\frac{t^2}{2}\fint_{B(x,t)} \frac{h(y)}{(t^2-|y-x|^2)^{1/2}}\, dy$$

Στο 1° ολοκλήρωμα αλλάζουμε μεταβλητές $B(x,t) \to B(0,1)$, και μετά διαφορίζουμε και καταλήγουμε στον τύπο Poisson:

$$(3)\quad u(x,t) = \frac{1}{2}\fint_{B(x,t)} \frac{t g(y) + t^2 h(y) + t Dg(y)\cdot(y-x)}{(t^2-|y-x|^2)^{1/2}}\, dy.$$

$\square$