Γράψτε τη Δu σε σφαιρικές συντεταγμένες και δείξτε ότι οι όροι που εξαρτώνται από τις γωνίες έχουν μηδενικό μέσο πάνω σε σφαίρες με κέντρο την αρχή του συστήματος συντεταγμένων).

2. Να επαληθευτεί ότι η (3) είναι σωστή στην περίπτωση του παραδείγματος $u(x, y, z, t) \equiv t$.
3. Να λυθεί με χρήση της (3) η κυματική εξίσωση σε τρεις διαστάσεις με τα αρχικά δεδομένα $\phi \equiv 0$, $\psi(x, y, z) = y$.
4. Να λυθεί η κυματική εξίσωση σε τρεις διαστάσεις με τα αρχικά δεδομένα $\phi \equiv 0$ και $\psi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. [*Υπόδειξη*: Να χρησιμοποιηθεί η (5)].
5. Πού πρέπει να μηδενίζεται ένα τριδιάστατο κύμα αν τα αρχικά δεδομένα των ϕ και ψ μηδενίζονται έξω από μια σφαιρική επιφάνεια;
6. (α′) Έστω S σφαιρική επιφάνεια με κέντρο το $\mathbf{x}$ και ακτίνα R. Ποιο είναι το εμβαδό της επιφάνειας $S \cap \{|\mathbf{x}| < \rho\}$, δηλαδή, του τμήματος της S που βρίσκεται στο εσωτερικό της σφαιρικής επιφάνειας με κέντρο το $\mathbf{0}$ και ακτίνα ρ;
   (β′) Να λυθεί η κυματική εξίσωση σε τρεις διαστάσεις για $t > 0$ με τις αρχικές συνθήκες $\phi(\mathbf{x}) \equiv 0$, $\psi(\mathbf{x}) = A$ για $|\mathbf{x}| < \rho$ και $\psi(\mathbf{x}) = 0$ για $|\mathbf{x}| > \rho$, όπου A σταθερά. Σχεδιάστε τις περιοχές του χωρόχρονου που απεικονίζουν την απάντησή σας. (Πρόκειται για πρόβλημα παρόμοιο με εκείνο της κρούσης σφύρας, στην Ενότητα 2.1).
   (γ′) Σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της λύσης (u ως προς $|\mathbf{x}|$) για $t = \frac{1}{2}$, 1 και 2, υποθέτοντας ότι $\rho = c = A = 1$. (Πρόκειται για μια «διαδοχή φωτογραφικών στιγμιοτύπων» της λύσης).
   (δ′) Σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της u ως προς t για $|\mathbf{x}| = \frac{1}{2}$ και 2, υποθέτοντας $\rho = c = A = 1$. (Αυτό είναι ό,τι βλέπει ένας ακίνητος παρατηρητής).
   (ε′) Έστω $|\mathbf{x}_0| < \rho$. Θεωρήστε ότι βρίσκεστε πάνω στο κύμα κατά μήκος μιας ακτίνας φωτός που ξεκινά από το $(\mathbf{x}_0, 0)$. Δηλαδή, εξετάστε τη $u(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}, t)$ όπου $|\mathbf{v}| = c$. Αποδείξτε ότι η ποσότητα

   $$t \cdot u(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}, t) \text{ συγκλίνει καθώς } t \to \infty.$$

   (*Υπόδειξη*: (α′) Θεωρήστε περιπτώσεις που εξαρτώνται από το κατά πόσο η μία σφαιρική επιφάνεια περιλαμβάνει την άλλη ή όχι. Χρησιμοποιήστε τον νόμο των συνημιτόνων. (β′) Χρησιμοποιήστε τον τύπο του Kirchhoff).
7. (α′) Να λυθεί η κυματική εξίσωση σε τρεις διαστάσεις για $t > 0$ με τις αρχικές συνθήκες $\phi(\mathbf{x}) = A$ για $|\mathbf{x}| < \rho$, $\phi(\mathbf{x}) = 0$ για $|\mathbf{x}| > \rho$, και $\psi(\mathbf{x}) \equiv 0$, όπου A σταθερά. (Αυτό το πρόβλημα μοιάζει κάπως με εκείνο της νυσσόμενης χορδής). [*Υπόδειξη*: Παραγωγίστε τη λύση της Άσκησης 6(β′)].
   (β′) Σχεδιάστε τις περιοχές του χωρόχρονου που απεικονίζουν την απάντησή σας. Πού παρουσιάζει η λύση ασυνέχειες άλματος;
   (γ′) Έστω $|\mathbf{x}_0| < \rho$. Θεωρήστε ότι βρίσκεστε πάνω στο κύμα κατά μήκος μιας ακτίνας φωτός που ξεκινά από το $(\mathbf{x}_0, 0)$. Δηλαδή, εξετάστε τη $u(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}, t)$ όπου $|\mathbf{v}| = c$. Αποδείξτε ότι η ποσότητα

   $$t \cdot u(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}, t) \text{ συγκλίνει καθώς } t \to \infty.$$

8. Πραγματοποιήστε την παραγωγή του δεύτερου όρου της (3).

9. (α′) Για οποιαδήποτε λύση της τριδιάστατης κυματικής εξίσωσης με αρχικά δεδομένα που μηδενίζονται στο εξωτερικό κάποιας σφαιρικής επιφάνειας, να δειχθεί ότι $u(x, y, z, t) = 0$ για καθορισμένο σημείο του χώρου (x, y, z) και επαρκώς μεγάλο t.
   (β′) Να αποδειχθεί ότι $u(x, y, z, t) = O(t^{-1})$ *ομοιόμορφα* καθώς $t \to \infty$. Δηλαδή, να αποδειχθεί ότι η $t \cdot u(x, y, z, t)$ είναι φραγμένη συνάρτηση των x, y, z και t. (*Υπόδειξη*: Να χρησιμοποιηθεί ο τύπος του Kirchhoff).
10. Να αποδειχθεί η ιδιότητα της μέσης τιμής αρμονικών συναρτήσεων $u(x, y, z)$ με την ακόλουθη μέθοδο. Αρμονική συνάρτηση είναι ένα κύμα που τυχαίνει να μην εξαρτάται από τον χρόνο, οπότε η μέση τιμή της $\overline{u}(r, t) = \overline{u}(r)$ ικανοποιεί την (5). Να συναχθεί ότι $\overline{u}(r) = u(\mathbf{0})$.
11. Βρείτε όλες τις σφαιρικές λύσεις της τριδιάστατης κυματικής εξίσωσης. Δηλαδή, βρείτε τις λύσεις που εξαρτώνται μόνο από τα r και t [*Υπόδειξη*: Χρησιμοποιήστε την (5)].
12. Να λυθεί η τριδιάστατη κυματική εξίσωση στην περιοχή $\{r \neq 0,\ t > 0\}$ με μηδενικές αρχικές συνθήκες και με την οριακή συνθήκη
$$\lim_{r \to 0} 4\pi r^2 u_r(r, t) = g(t).$$
Υποθέστε ότι $g(0) = g'(0) = g''(0) = 0$.
13. Να λυθεί η κυματική εξίσωση στον ημιχώρο $\{(x, y, z, t) : z > 0\}$ με τη συνθήκη Neumann $\partial u/\partial z = 0$ πάνω στο $z = 0$, και με αρχικά δεδομένα $\phi(x, y, z) \equiv 0$ και τυχαία $\psi(x, t, z)$. [*Υπόδειξη*: Χρησιμοποιήστε την (3) και τη μέθοδο της ανάκλασης].
14. Γιατί η μέθοδος του σφαιρικού μέσου δεν δίνει αποτελέσματα για διδιάστατα κύματα;
15. Να παραχθεί, από την ειδική περίπτωση (18), η σχέση της γενικής λύσης (19) σε δύο διαστάσεις.
16. (α′) Να λυθεί η κυματική εξίσωση σε δύο διαστάσεις για $t > 0$ με τις αρχικές συνθήκες $\phi(\mathbf{x}) \equiv 0$, $\psi(\mathbf{x}) = A$ για $|\mathbf{x}| < \rho$, και $\psi(\mathbf{x}) = 0$ για $|\mathbf{x}| > \rho$, όπου A σταθερά. Μην υπολογίσετε το ολοκλήρωμα.
   (β′) Κάτω από τις ίδιες συνθήκες να βρεθεί, με υπολογισμό του ολοκληρώματος, μια απλή σχέση για τη λύση $u(\mathbf{0}, t)$ στην αρχή των αξόνων.
17. Να χρησιμοποιηθεί το αποτέλεσμα της Άσκησης 16 για να υπολογισθεί το όριο του γινομένου $t \cdot u(\mathbf{0}, t)$ καθώς $t \to \infty$.
18. Για οποιαδήποτε λύση της διδιάστατης κυματικής εξίσωσης με αρχικά δεδομένα που μηδενίζονται στο εξωτερικό κάποιου κύκλου, να αποδειχθεί ότι $u(x, y, t) = O(t^{-1})$ για καθορισμένο (x, y) καθώς $t \to \infty$. Δηλαδή, το γινόμενο $t \cdot u(x, y, t)$ είναι φραγμένη συνάρτηση του t για καθορισμένα x και y. Σημειώστε την αντίθεση με τις τρεις διαστάσεις. [*Υπόδειξη*: Χρησιμοποιήστε τη σχέση (19)].
19. (*δύσκολη*) Να δειχθεί, ωστόσο, ότι αν ενδιαφερόμαστε για ομοιόμορφη σύγκλιση, τότε $u(x, y, t) = O(t^{-1/2})$ *ομοιόμορφα* καθώς $t \to \infty$.
20. «Κατεβαίνουμε» από τις δύο διαστάσεις στη μία ως εξής. Έστω $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ με αρχικά δεδομένα $\phi(x) \equiv 0$ και τυχαία $\psi(x)$. Φανταστείτε ότι δεν γνωρίζουμε τον τύπο του d' Alembert για τη λύση. Θεωρήστε τη $u(x, t)$ ως μια λύση της διδιάστατης εξίσωσης που τυχαίνει να μην εξαρτάται από το y. Αντικαταστήστε αυτήν τη συνάρτηση στη (19) και υπολογίστε το ολοκλήρωμα.

9.3 ΑΚΤΙΝΕΣ, ΙΔΙΟΜΟΡΦΙΕΣ ΚΑΙ ΠΗΓΕΣ

Σ' αυτή την ενότητα μελετάμε τη γεωμετρία των χαρακτηριστικών, τις γεωμετρικές έννοιες που εμφανίζονται στη θεωρία της σχετικότητας και το γεγονός ότι κυματικές ιδιομορφίες διαδίδονται κατά μήκος των χαρακτηριστικών. Επιλύουμε επίσης τη μη ομογενή κυματική εξίσωση.

ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΕΣ

Μια *ακτίνα φωτός* σε τρεις διαστάσεις είναι η διαδρομή ενός σημείου που κινείται ευθύγραμμα με ταχύτητα c. Δηλαδή, $|d\mathbf{x}/dt| = c$, ή

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{v}_0 t \qquad \text{όπου } |\mathbf{v}_0| = c. \tag{1}$$

Μια τέτοια ακτίνα είναι ορθογώνια στη σφαιρική επιφάνεια $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| = c|t|$.

Είδαμε νωρίτερα σ' αυτό το κεφάλαιο ότι η βασική γεωμετρία της κυματικής εξίσωσης είναι ο κώνος φωτός $|\mathbf{x}| = c|t|$ που σχηματίζεται από όλες τις ακτίνες φωτός (1) με $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$.

Θεωρούμε τώρα οποιαδήποτε επιφάνεια S στον χωρόχρονο. Οι *χρονικές φέτες* της συμβολίζονται με $S_t = S \cap \{t = \text{σταθερά}\}$. Συνεπώς η S είναι μια τριδιάστατη επιφάνεια εμβαπτισμένη στον τετραδιάστατο χωρόχρονο και κάθε S_t είναι μια συνήθης διδιάστατη επιφάνεια. Η S ονομάζεται *χαρακτηριστική επιφάνεια* αν είναι μια ένωση ακτίνων φωτός, στον τριδιάστατο χώρο, κάθε μία από τις οποίες είναι ορθογώνια στις χρονικές φέτες S_t.

Για μια πιο αναλυτική περιγραφή μιας χαρακτηριστικής επιφάνειας, ας υποθέσουμε ότι η S είναι η ισοσταθμική επιφάνεια μιας συνάρτησης της μορφής $t - \gamma(\mathbf{x})$. Δηλαδή, $S = \{(\mathbf{x}, t) : t - \gamma(\mathbf{x}) = k\}$ για κάποια σταθερά k. Τότε οι χρονικές φέτες είναι $S_t = \{\mathbf{x} : t - \gamma(\mathbf{x}) = k\}$. Στη συνέχεια δίνουμε την αναλυτική περιγραφή.

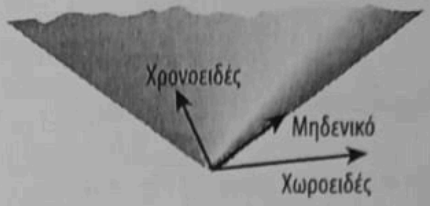
Θεώρημα 1. Όλες οι ισοσταθμικές επιφάνειες της συνάρτησης $t - \gamma(\mathbf{x})$ είναι χαρακτηριστικές αν και μόνο αν $|\nabla\gamma(\mathbf{x})| = 1/c$.

Απόδειξη. Υποθέτουμε αρχικά ότι όλες οι ισοσταθμικές επιφάνειες της $t - \gamma(\mathbf{x})$ είναι χαρακτηριστικές. Έστω $\mathbf{x}_0$ οποιοδήποτε χωρικό σημείο και S η ισοσταθμική επιφάνεια της $t - \gamma(\mathbf{x})$ που περιέχει το σημείο $(\mathbf{x}_0, 0)$. Συνεπώς $S = \{(\mathbf{x}, t) : t - \gamma(\mathbf{x}) = -\gamma(\mathbf{x}_0)\}$. Από τη στιγμή που η S είναι χαρακτηριστική και το $(\mathbf{x}_0, 0) \in S$, υπάρχει μια ακτίνα της μορφής (1) που περιέχεται στην S για την οποία το $\mathbf{v}_0$ είναι ορθογώνιο στην S_t για όλα τα t. Επειδή η ακτίνα ανήκει στην S, ικανοποιεί την εξίσωση

$$t - \gamma(\mathbf{x}_0 + \mathbf{v}_0 t) = -\gamma(\mathbf{x}_0) \tag{2}$$

για όλα τα t. Παραγωγίζοντας αυτή την εξίσωση ως προς t, βρίσκουμε ότι $1 - \mathbf{v}_0 \cdot \nabla\gamma(\mathbf{x}_0 + \mathbf{v}_0 t) = 0$. Θέτοντας $t = 0$, παίρνουμε $\mathbf{v}_0 \cdot \nabla\gamma(\mathbf{x}_0) = 1$.

Από την άλλη, η χρονική φέτα $S_0 = \{\mathbf{x} : \gamma(\mathbf{x}) = \gamma(\mathbf{x}_0)\}$ έχει το $\nabla\gamma(\mathbf{x}_0)$ ως κάθετο διάνυσμα. Ένα άλλο κάθετο διάνυσμα είναι το $\mathbf{v}_0$, οπότε τα $\nabla\gamma(\mathbf{x}_0)$ και $\mathbf{v}_0$ είναι παράλληλα. Συνεπώς, $1 = |\mathbf{v}_0 \cdot \nabla\gamma(\mathbf{x}_0)| = |\mathbf{v}_0||\nabla\gamma(\mathbf{x}_0)| = c|\nabla\gamma(\mathbf{x}_0)|$. Επομένως, $|\nabla\gamma(\mathbf{x}_0)| = 1/c$. Αυτό ακριβώς θέλαμε να αποδείξουμε. Για το αντίστροφο, βλ. Άσκηση 2. □



Σχήμα 1

Παράδειγμα 1.

Ξεκινώντας από οποιαδήποτε επιφάνεια S_0 στον τριδιάστατο χώρο για $t = 0$, μπορούμε να σχεδιάσουμε ευθείες (1) κλίσης c με $\mathbf{x}_0 \in S_0$ για να κατασκευάσουμε μια χαρακτηριστική επιφάνεια S. Για παράδειγμα, το *επίπεδο* $S_0 = \{\mathbf{x} : a_1 x + a_2 y + a_3 z = b\}$ με $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1$ δημιουργεί κατ' αυτό τον τρόπο την επίπεδη χαρακτηριστική επιφάνεια $S = \{(\mathbf{x}, t) : a_1 x + a_2 y + a_3 z - ct = b\}$. Δημιουργεί επίσης την επίπεδη χαρακτηριστική επιφάνεια $S' = \{(\mathbf{x}, t) : a_1 x + a_2 y + a_3 z + ct = b\}$. Ομοίως, η *σφαιρική επιφάνεια* $S_0 = \{\mathbf{x} : |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| = R\}$ δημιουργεί το ζεύγος των χαρακτηριστικών επιφανειών $S = \{(\mathbf{x}, t) : |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| = R \pm ct\}$. □

ΣΧΕΤΙΚΙΣΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Στη θεωρία της σχετικότητας χρησιμοποιείται ευρέως η ακόλουθη ορολογία. Το *παρελθόν* του σημείου $(\mathbf{0}, 0)$ είναι το σύνολο $\{ct < -|\mathbf{x}|\}$, το *μέλλον* του είναι το σύνολο $\{ct > -|\mathbf{x}|\}$ και το *παρόν* του είναι το σύνολο $\{-|\mathbf{x}| < ct < |\mathbf{x}|\}$. Ένα τετραδιάστατο διάνυσμα $(\mathbf{v}, v^0)$ ονομάζεται (βλ. Σχήμα 1)[1]

Χρονοειδές αν $|v^0| > c|\mathbf{v}|$
Χωροειδές αν $|v^0| < c|\mathbf{v}|$
Μηδενικό (ή *χαρακτηριστικό*) αν $|v^0| = c|\mathbf{v}|$.

Μια άλλη περιγραφή μιας χαρακτηριστικής επιφάνειας στον χωρόχρονο είναι ότι το (τετραδιάστατο) κάθετο σ' αυτήν διάνυσμα είναι μηδενικό διάνυσμα. Στην πραγματικότητα, αν η επιφάνεια αναπαρίσταται ως $S = \{t = \gamma(\mathbf{x})\}$, τότε ένα κάθετο τετραδιάστατο διάνυσμα είναι το $(\nabla\gamma(\mathbf{x}), -1)$. Η S είναι χαρακτηριστική αν αυτό το διάνυσμα είναι μηδενικό. Δηλαδή, $1 = |v^0| = c|\mathbf{v}| = c|\nabla\gamma(\mathbf{x})|$, σε συμφωνία με το Θεώρημα 1.

Μια επιφάνεια είναι *χωροειδής* αν όλα τα κάθετα διανύσματά της είναι χρονοειδή, δηλαδή, αν $|\nabla\gamma(\mathbf{x})| < 1/c$. Για παράδειγμα, η αρχική επιφάνεια $\{t = 0\}$, θεωρούμενη ως επιφάνεια στον χωρόχρονο, είναι χωροειδής από τη στιγμή που $\gamma \equiv 0$. *Οι χωροειδείς επιφάνειες είναι απλώς εκείνες πάνω στις οποίες φυσιολογικά ορίζονται οι αρχικές συνθήκες,* όπως διατυπώνεται στο ακόλουθο θεώρημα.

[1]Σ.τΜ.: Στην ελληνική βιβλιογραφία, το μηδενικό διάνυσμα απαντά επίσης ως φωτοειδές διάνυσμα.

Θεώρημα 2. Αν S είναι οποιαδήποτε χωροειδής επιφάνεια, τότε μπορούμε να έχουμε μοναδική λύση στο πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2\Delta u \qquad \text{σε ολόκληρο τον χωρόχρονο} \\ u &= \phi \qquad \text{και} \qquad \frac{\partial u}{\partial n} = \psi \ \textit{πάνω στην } S, \end{aligned} \tag{3}$$

όπου η $\partial/\partial n$ συμβολίζει την παράγωγο κατά την κατεύθυνση που είναι κάθετη στην S.

Αν η S αναπαρίσταται ως $\{t = \gamma(\mathbf{x})\}$, η δεύτερη αρχική συνθήκη στην (3) σημαίνει ότι

$$u_t - \nabla\gamma \cdot \nabla u = [1 + |\nabla\gamma|^2]^{1/2}\psi \qquad \text{για } t = \gamma(\mathbf{x}). \tag{4}$$

(Γιατί;) Παραλείπουμε την απόδειξη του Θεωρήματος 2.

ΙΔΙΟΜΟΡΦΙΕΣ

Θα παρουσιάσουμε τώρα μια άλλη βασική ιδιότητα των χαρακτηριστικών επιφανειών που αποδεικνύεται επίσης σε πιο προχωρημένα βιβλία [CH].

Θεώρημα 3. Οι χαρακτηριστικές επιφάνειες είναι οι μοναδικές επιφάνειες στις οποίες ανήκουν οι ιδιομορφίες λύσεων της κυματικής εξίσωσης.

Η ιδέα είναι ότι η πληροφορία μεταφέρεται κατά μήκος ακτίνων φωτός (πβλ. Ενότητα 2.5) και οι ιδιομορφίες είναι πολύ ειδικές μορφές πληροφορίας. *Ιδιομορφία* μιας λύσης είναι οποιοδήποτε σημείο στο οποίο η λύση, ή μια παράγωγός της κάποιας τάξης, δεν είναι συνεχής. Για παράδειγμα, στη νυσσόμενη χορδή της Ενότητας 2.1, η ιδιομορφία είναι η ασυνέχεια άλματος στην πρώτη παράγωγο και προφανώς συμβαίνει κατά μήκος μιας χαρακτηριστικής.

Παράδειγμα 2.

Ένα πιο ιδιαίτερο παράδειγμα ιδιομορφίας είναι το εξής. Έστω

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}, t) &= \tfrac{1}{2}v(\mathbf{x}, t)[t - \gamma(\mathbf{x})]^2 \qquad &&\text{για } \gamma(\mathbf{x}) \leqslant t \\ u(\mathbf{x}, t) &= 0 &&\text{για } \gamma(\mathbf{x}) \geqslant t, \end{aligned} \tag{5}$$

όπου η $v(\mathbf{x}, t)$ είναι μια μη μηδενική πάνω στην επιφάνεια $S = \{t = \gamma(\mathbf{x})\}$ C^2 συνάρτηση. Η συνάρτηση $u(\mathbf{x}, t)$ είναι απλώς μια C^1 συνάρτηση επειδή οι δεύτερες παράγωγοί της παρουσιάζουν ασυνέχειες άλματος πάνω στην επιφάνεια. Θα δείξουμε ότι *αν η $u(\mathbf{x}, t)$ είναι λύση της κυματικής εξίσωσης, τότε η επιφάνεια πρέπει να είναι χαρακτηριστική.*

Μάλιστα, στη μία όψη $\{\gamma(\mathbf{x}) < t\}$ της επιφάνειας, υπολογίζουμε τα εξής

$$\begin{aligned} u_t &= v(t-\gamma) + \tfrac{1}{2}v_t(t-\gamma)^2, \\ u_{tt} &= v + 2v_t(t-\gamma) + \tfrac{1}{2}v_{tt}(t-\gamma)^2, \\ \nabla u &= -v\nabla\gamma(t-\gamma) + \tfrac{1}{2}\nabla v(t-\gamma)^2, \\ \Delta u = \nabla\cdot\nabla u &= v|\nabla\gamma|^2 - v\Delta\gamma(t-\gamma) - 2\nabla v\cdot\nabla\gamma(t-\gamma) + \tfrac{1}{2}\Delta v(t-\gamma)^2. \end{aligned}$$

Συνεπώς, στην όψη $\{\gamma(\mathbf{x}) < t\}$, έχουμε

$$0 = u_{tt} - c^2\Delta u = v(1 - c^2|\nabla\gamma|^2) + (2v_t + c^2 v\Delta\gamma + 2c^2\nabla v \cdot \nabla\gamma)(t-\gamma) + \frac{1}{2}(v_{tt} - c^2\Delta v)(t-\gamma)^2. \quad (6)$$

Βέβαια, στην άλλη όψη $\{\gamma(\mathbf{x}) > t\}$ όλα είναι μηδέν. Έτσι για να είναι η $u(\mathbf{x}, t)$ μια λύση *και πάνω* στην επιφάνεια, η έκφραση (6) πρέπει να είναι μηδέν *πάνω* στην επιφάνεια $\{t - \gamma(\mathbf{x}) = 0\}$. Θέτουμε $t = \gamma(\mathbf{x})$ στην (6). Τότε πάνω στην S έχουμε $v(1 - c^2|\nabla\gamma|^2) = 0$, ή $|\nabla\gamma| = 1/c$, το οποίο σημαίνει ότι η επιφάνεια S είναι χαρακτηριστική. Αυτό αποδεικνύει τον ισχυρισμό που διατυπώθηκε πιο πάνω. Στη θεωρία διάθλασης η εξίσωση $|\nabla\gamma| = 1/c$ ονομάζεται *εξίσωση εικόνας* και είναι μια μη γραμμική ΜΔΕ πρώτης τάξης ως προς γ.

Επειδή ο πρώτος όρος του δεξιού μέλους της (6) είναι μηδέν, η (6) μπορεί να διαιρεθεί διά $t - \gamma$. Αυτό συνεπάγεται επίσης ότι

$$0 = (2v_t + c^2 v\Delta\gamma + 2c^2\nabla v \cdot \nabla\gamma) + \frac{1}{2}(v_{tt} - c^2\Delta v)(t-\gamma) \quad (7)$$

στη μία όψη της S. Από τη συναρμογή των λύσεων και πάλι πάνω στην S, προκύπτει ότι η (7) πρέπει να ισχύει όταν $t = \gamma(\mathbf{x})$, το οποίο σημαίνει ότι

$$\boxed{v_t + c^2\nabla\gamma \cdot \nabla v = -\frac{1}{2}c^2(\Delta\gamma)v.} \quad (8)$$

Αυτή η σχέση ονομάζεται *εξίσωση μεταφοράς* και είναι μια γραμμική ΜΔΕ πρώτης τάξης που ικανοποιείται από τη v πάνω στην S.

Προκειμένου να γίνει κατανοητή αυτή η εξίσωση, σημειώνουμε ότι η $\mathscr{D} = \partial_t + c^2\nabla\gamma \cdot \nabla$ είναι μια παράγωγος κατά την εφαπτομένη στην S κατεύθυνση. Για την ακρίβεια, η $\mathscr{D}$ είναι η παράγωγος κατά την κατεύθυνση της ακτίνας $d\mathbf{x}/dt = c^2\nabla\gamma$ με $|d\mathbf{x}/dt| = c^2|\nabla\gamma| = c$. Επομένως η $v(\mathbf{x}, t)$ «μεταφέρεται» κατά μήκος της ακτίνας από τη διαφορική εξίσωση (8). Η εξίσωση (8) μπορεί να επιλυθεί με τις μεθόδους της Ενότητας 1.2. Επίσης, η εξίσωση (8) συνεπάγεται ότι $v \neq 0$ παντού κατά μήκος της ακτίνας επειδή, από την υπόθεση, $v \neq 0$ όπου η ακτίνα τέμνει την S. □

ΚΥΜΑΤΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ ΜΕ ΠΗΓΗ

Θα επιλύσουμε τώρα το τριδιάστατο πρόβλημα

$$\begin{gathered} u_{tt} - c^2\Delta u = f(\mathbf{x}, t) \\ u(\mathbf{x}, t) \equiv 0, \qquad u_t(\mathbf{x}, 0) \equiv 0 \end{gathered} \quad (9)$$

με χρήση της μεθόδου των τελεστών από την Ενότητα 3.4.

Η λύση που βρήκαμε στην Ενότητα 9.2 για το *ομογενές* πρόβλημα με αρχικά δεδομένα ϕ και ψ ήταν

$$(\partial_t \mathscr{S}(t_0)\phi)(\mathbf{x}_0) + (\mathscr{S}(t_0)\psi)(\mathbf{x}_0),$$

όπου

$$(\mathscr{S}(t_0)\psi)(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{4\pi c^2 t_0} \iint\limits_S \psi(\boldsymbol{\xi})\, dS_{\boldsymbol{\xi}} \tag{10}$$

και $S = \{\boldsymbol{\xi} : |\boldsymbol{\xi} - \mathbf{x}_0| = ct_0\}$ σφαιρική επιφάνεια. Τώρα ας πάψουμε να χρησιμοποιούμε τους κάτω δείκτες «0». Ο τελεστής $\mathscr{S}(t)$ είναι ο *τελεστής πηγής*.

Ακριβώς όπως και στην Ενότητα 3.4, η μοναδική λύση του προβλήματος (9) μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει του τελεστή πηγής ως

$$\boxed{u(\mathbf{x}, t) = \int_0^t \mathscr{S}(t-s) f(\mathbf{x}, s)\, ds.} \tag{11}$$

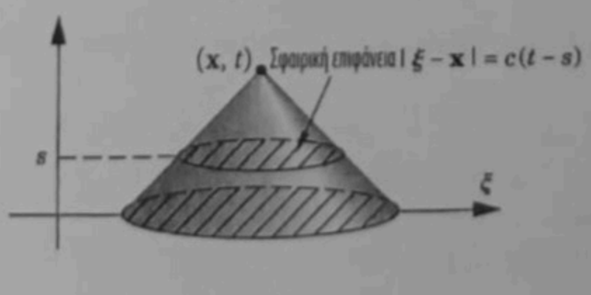
Αυτή η σχέση ονομάζεται ορισμένες φορές *τύπος του Duhamel*. Στο ολοκλήρωμα της (11), ο τελεστής $\mathscr{S}(t-s)$ δρα στην $f(\mathbf{x}, s)$ ως συνάρτησης του $\mathbf{x}$, με το s να παίζει απλώς τον ρόλο μιας παραμέτρου. Η σχέση (11) σημαίνει ότι στη (10) πρέπει να αντικαταστήσουμε το t_0 με $(t-s)$, το $\mathbf{x}_0$ με $\mathbf{x}$ και το $\psi(\boldsymbol{\xi})$ με $f(\boldsymbol{\xi}, s)$. Επομένως

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}, t) &= \int_0^t \frac{1}{4\pi c^2 (t-s)} \iint\limits_{\{|\boldsymbol{\xi}-\mathbf{x}|=c(t-s)\}} f(\boldsymbol{\xi}, s) dS_{\boldsymbol{\xi}} ds \\ &= \frac{1}{4\pi c} \int_0^t \iint\limits_{\{|\boldsymbol{\xi}-\mathbf{x}|=c(t-s)\}} \frac{f(\boldsymbol{\xi}, t - |\boldsymbol{\xi}-\mathbf{x}|/c)}{|\boldsymbol{\xi}-\mathbf{x}|} dS_{\boldsymbol{\xi}} ds, \end{aligned} \tag{12}$$

όπου έχουμε αντικαταστήσει την τιμή της $s = t - |\boldsymbol{\xi}-\mathbf{x}|/c$ πάνω στη σφαιρική επιφάνεια S.

Η τελευταία έκφραση είναι ακριβώς ένα διαδοχικό ολοκλήρωμα σε σφαιρικές συντεταγμένες. Η περιοχή ολοκλήρωσης στον χωρόχρονο είναι η προς το παρελθόν κωνική επιφάνεια που παρουσιάζεται στο Σχήμα 2. Οι συντεταγμένες $\boldsymbol{\xi}$ παίρνουν τιμές στη βάση της κωνικής επιφάνειας, η οποία είναι η σφαιρική επιφάνεια $\{|\boldsymbol{\xi}-\mathbf{x}| = c(t-s)\}$. Ο στοιχειώδης όγκος $d\boldsymbol{\xi}$ είναι ο συνήθης $d\boldsymbol{\xi} = c\, dS_{\boldsymbol{\xi}}\, ds$. Συνεπώς, το διαδοχικό ολοκλήρωμα γίνεται ένα τριπλό ολοκλήρωμα και παράγει τη σχέση που δίνει τη λύση

$$\boxed{u(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi c^2} \iiint\limits_{\{|\boldsymbol{\xi}-\mathbf{x}| \leqslant ct\}} \frac{f(\boldsymbol{\xi}, t - |\boldsymbol{\xi}-\mathbf{x}|/c)}{|\boldsymbol{\xi}-\mathbf{x}|} d\boldsymbol{\xi}.} \tag{13}$$



Σχήμα 2

Σύμφωνα μ' αυτό το αποτέλεσμα, για να επιλύσουμε το πρόβλημα (9) απλώς πολλαπλασιάζουμε την $f(\boldsymbol{\xi}, s)$ επί το «δυναμικό» $1/(4\pi c|\boldsymbol{\xi} - \mathbf{x}|)$ και ολοκληρώνουμε το αποτέλεσμα στον κώνο του παρελθόντος, ο οποίος αποτελείται ακριβώς από το χωρίο εξάρτησης του δεδομένου σημείου $(\mathbf{x}, t)$. Δηλαδή, εκείνα τα σημεία που μπορούν να φτάσουν στο $(\mathbf{x}, t)$ μέσω μιας ακτίνας φωτός από κάποια χρονική στιγμή s στο παρελθόν $(0 \leqslant s \leqslant t)$.

Ενδιαφέρον παρουσιάζει η σύγκριση αυτής της σχέσης με τη λύση της εξίσωσης Poisson σε ολόκληρο τον τριδιάστατο χώρο. Βλ. (7.3.7) χωρίς τον συνοριακό όρο και με $G = -1/(4\pi r)$. Αντικαθιστώντας το $\mathbf{x}_0$ με $\mathbf{x}$, και το $\mathbf{x}$ με $\boldsymbol{\xi}$, η σχέση (7.3.7) υποδηλώνει ότι η φραγμένη λύση της εξίσωσης Poisson $-\Delta w = f$ σε ολόκληρο τον τριδιάστατο χώρο είναι

$$w(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi c} \iiint \frac{f(\boldsymbol{\xi})}{|\boldsymbol{\xi} - \mathbf{x}|} d\boldsymbol{\xi}. \tag{14}$$

Η μοναδική διαφορά μεταξύ των σχέσεων (13) και (14) είναι ότι ο χρόνος «υστερεί» κατά την ποσότητα $|\boldsymbol{\xi} - \mathbf{x}|/c$. Επομένως στη σχέση (13) το δυναμικό ονομάζεται *δυναμικό με υστέρηση* ή «καθυστερημένο» δυναμικό.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Έστω S μια χαρακτηριστική επιφάνεια για την οποία η $S \cap \{(x, y, z) : t = 0\}$ είναι η σφαιρική επιφάνεια $\{x^2 + y^2 + z^2 = a^2\}$. Περιγράψτε την S με γεωμετρικό τρόπο.
2. Να αποδειχθεί το αντίστροφο του Θεωρήματος 1. Δηλαδή, να αποδειχθεί ότι μια ισοσταθμική επιφάνεια της συνάρτησης $t - \gamma(\mathbf{x})$ είναι χαρακτηριστική αν η $\gamma(\mathbf{x})$ ικανοποιεί τη μη γραμμική ΜΔΕ
$$|\nabla\gamma(\mathbf{x})| \equiv \frac{1}{c}. \tag{$*$}$$
(*Υπόδειξη*: Παραγωγίστε την εξίσωση $(*)$ για να αποκτήσετε το $\sum \gamma_{ij}(\mathbf{x})\gamma_j(\mathbf{x}) = 0$, όπου οι κάτω δείκτες συμβολίζουν μερικές παραγώγους. Δείξτε ότι μια καμπύλη, η οποία ικανοποιεί τη ΣΔΕ $d\mathbf{x}/dt = c^2\nabla\gamma(\mathbf{x})$, ικανοποιεί επίσης τη $d^2\mathbf{x}/dt^2 = 0$ και συνεπώς είναι ακτίνα. Δείξτε ότι η $t - \gamma(\mathbf{x})$ είναι σταθερή κατά μήκος μιας ακτίνας. Συμπεράνατε ότι οποιαδήποτε ισοσταθμική επιφάνεια της $t - \gamma(\mathbf{x})$ είναι χαρακτηριστική).
3. Να αποδειχθεί το Θεώρημα 2 στη μονοδιάστατη περίπτωση. Δηλαδή, αν $\mathscr{C}$ είναι μια χωροειδής καμπύλη στο επίπεδο xt, υπάρχει μοναδική λύση της εξίσωσης $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ με $u = \phi$ και $\partial u/\partial n = \psi$ πάνω στη $\mathscr{C}$.
4. Να επαληθευτεί ότι η λύση που δίνεται από την (5) έχει δεύτερες παραγώγους οι οποίες παρουσιάζουν ασυνέχειες άλματος πάνω στην επιφάνεια $S = \{(\mathbf{x}, t) : t = \gamma(\mathbf{x})\}$.
5. Να επαληθευτεί η ορθότητα της (13) για το παράδειγμα $u(x, y, z, t) = t^2$ και $f(x, y, z, t) \equiv 2$.
6. Να δειχθεί ότι η μοναδική λύση της (9) μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει του τελεστή πηγής μέσω της απλής σχέσης (11).
7. (*δύσκολη*) Να λυθεί η εξίσωση $u_{tt} - c^2\Delta u = f(\mathbf{x})$, όπου $f(\mathbf{x}) = A$ για $|\mathbf{x}| < \rho$, $f(\mathbf{x}) = 0$ για $|\mathbf{x}| > \rho$, A σταθερά, και τα αρχικά δεδομένα είναι ταυτοτικά ίσα με μηδέν. Σχεδιάστε τις περιοχές του χωρόχρονου που απεικονίζουν τη λύση. [*Υπόδειξη*: Χρησιμοποιήστε τη (13) και βρείτε τον όγκο της τομής δύο σφαιρών, ή χρησιμοποιήστε την (11) και την Άσκηση 9.2.6(β′)].

8. Πραγματοποιήστε τη μετάβαση από την (11) στη (13) γράφοντας τα ενδιάμεσα βήματα με χρήση σφαιρικών συντεταγμένων.
9. Απλοποιήστε τη σχέση (13) για τη λύση της εξίσωσης $u_{tt} - c^2 \Delta u = f(\mathbf{x}, t)$ στην ειδική περίπτωση που η f έχει σφαιρική συμμετρία $[f = f(r, t)]$.

9.4 Η ΕΞΙΣΩΣΗ ΔΙΑΧΥΣΗΣ ΚΑΙ Η ΕΞΙΣΩΣΗ SCHRÖDINGER

Η ΤΡΙΔΙΑΣΤΑΤΗ ΕΞΙΣΩΣΗ ΔΙΑΧΥΣΗΣ

Θεωρούμε την εξίσωση διάχυσης σε ολόκληρο τον τριδιάστατο χώρο,

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= k\Delta u = k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \quad (1) \\ u(\mathbf{x}, 0) &= \phi(\mathbf{x}). \quad (2) \end{aligned}}$$

Η επίλυση αυτού του προβλήματος είναι πολύ εύκολη αν χρησιμοποιήσουμε όσα μάθαμε στο Κεφάλαιο 2.

Θεώρημα 1. Για οποιαδήποτε φραγμένη συνεχή συνάρτηση $\phi(\mathbf{x})$ η λύση του προβλήματος (1), (2) είναι

$$\boxed{u(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(4\pi kt)^{3/2}} \iiint \exp\left(-\frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2}{4kt}\right) \phi(\mathbf{x}')\, d\mathbf{x}'} \qquad (3)$$

για όλα τα $t > 0$. Οι βωβές μεταβλητές ολοκλήρωσης, $\mathbf{x}' = (x', y', z')$, παίρνουν τιμές σε ολόκληρο τον τριδιάστατο χώρο.

Απόδειξη. Για να καταλήξουμε στη σχέση (3), ας συμβολίσουμε με

$$S(z, t) = \frac{1}{(4\pi kt)^{1/2}} e^{-z^2/4kt}$$

τη *μονοδιάστατη συνάρτηση πηγής*. Έστω

$$S_3(x, y, z, t) = S(x, t)S(y, t)S(z, t) \qquad (4)$$

Συνεπώς η (17) γίνεται

$$u(0,0,t) = \frac{1}{2\pi c} \iint\limits_{x^2+y^2 \leqslant c^2t^2} \frac{\psi(x,y)}{(c^2t^2 - x^2 - y^2)^{1/2}} dx\, dy. \tag{18}$$

Αυτή η σχέση δίνει τη λύση στο σημείο $(0,0,t)$. Για τυχαίο σημείο, η σχέση γίνεται

$$\boxed{\begin{aligned} u(x_0,y_0,t_0) = \iint\limits_D & \frac{\psi(x,y)}{[c^2t_0^2 - (x-x_0)^2 - (y-y_0)^2]^{1/2}} \frac{dx\, dy}{2\pi c} \\ & + \frac{\partial}{\partial t_0}(\text{ίδια έκφραση για τη } \phi). \end{aligned}} \tag{19}$$

όπου D είναι ο δίσκος $\{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \leqslant c^2t_0^2\}$. (Γιατί;)

Η σχέση (19) δείχνει ότι η τιμή $u(x_0,y_0,t_0)$ εξαρτάται από τις τιμές των $\phi(x,y)$ και $\psi(x,y)$ στο *εσωτερικό* του κώνου:

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \leqslant c^2t_0^2.$$

Αυτό σημαίνει ότι *η αρχή του Huygens δεν ισχύει σε δύο διαστάσεις*. Για παράδειγμα, όταν ρίχνουμε ένα βότσαλο σε μια ήρεμη λίμνη, δημιουργούνται επιφανειακά κύματα τα οποία (προσεγγιστικά) ικανοποιούν τη διδιάστατη κυματική εξίσωση με συγκεκριμένη ταχύτητα c, όπου τα x και y είναι οριζόντιες συντεταγμένες. Ένα έντομο του οποίου η απόσταση από το σημείο της πρόσκρουσης του βότσαλου στο νερό είναι δ αισθάνεται για πρώτη φορά ένα κύμα κατά τη χρονική στιγμή $t = \delta/c$ αλλά κατόπιν συνεχίζει να αισθάνεται κυματισμούς. Αυτοί οι κυματισμοί εξασθενούν, ανάλογα του t^{-1} σύμφωνα με την Άσκηση 18, αλλά θεωρητικά συνεχίζονται επ' άπειρον. (Από φυσική άποψη, όταν οι κυματισμοί γίνουν επαρκώς μικροί, η κυματική εξίσωση στην πραγματικότητα δεν ισχύει πια, καθώς αρχίζουν να κυριαρχούν άλλα φυσικά φαινόμενα).

Μπορούμε να εικάσουμε πώς θα έμοιαζε να ζούμε στην Επιπεδοχώρα, έναν διδιάστατο κόσμο. Η επικοινωνία θα ήταν δύσκολη επειδή η διάδοση φωτός και ηχητικών κυμάτων δεν θα έδινε ευκρινή είδωλα. Θα ήταν ένας κόσμος με πολύ θόρυβο! Αποδεικνύεται ότι αν λύσουμε την κυματική εξίσωση σε N διαστάσεις, η διάδοση σημάτων δίνει ευκρινή είδωλα (δηλαδή, η αρχή του Huygens ισχύει) μόνο για τις διαστάσεις $N = 3, 5, 7, \ldots$. Συνεπώς τρεις είναι οι «καλύτερες όλων των δυνατών» διαστάσεων, δηλαδή η μικρότερη διάσταση στην οποία η διάδοση σημάτων δίνει ευκρινή είδωλα!

Για την ακρίβεια, η μέθοδος του σφαιρικού μέσου μπορεί να γενικευθεί σε οποιαδήποτε περιττή διάσταση $\geqslant 5$. Για κάθε περιττή διάσταση $n = 2m+1$ μπορούμε να «κατεβούμε» στην ακριβώς μικρότερή της άρτια διάσταση $2m$ και να πάρουμε μια σχέση που δείχνει ότι η αρχή του Huygens δεν ισχύει σε $2m$ διαστάσεις [CH].

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Αποδείξτε ότι $\Delta(\overline{u}) = (\overline{\Delta u})$ για οποιαδήποτε συνάρτηση. Δηλαδή, η δράση του τελεστή Laplace στον μέσο είναι ο μέσος της δράσης του τελεστή Laplace. (*Υπόδειξη*: