9

ΚΥΜΑΤΑ ΣΤΟΝ ΧΩΡΟ

Σε δύο και τρεις διαστάσεις συνάγουμε την αρχή της ενέργειας και την αρχή της αιτιότητας και στη συνέχεια λύνουμε την κυματική εξίσωση απουσία συνόρων. Στην Ενότητα 9.3 μελετάμε τη γεωμετρία των χαρακτηριστικών. Λύνουμε επίσης την κυματική εξίσωση με όρο πηγής. Στην Ενότητα 9.4 λύνουμε την εξίσωση διάχυσης και την εξίσωση Schrödinger, καθώς και την εξίσωση του αρμονικού ταλαντωτή. Στην τελευταία ενότητα παράγουμε τις ενεργειακές στάθμες του ατόμου του υδρογόνου.

9.1 ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΚΑΙ ΑΙΤΙΟΤΗΤΑ

Σκοπός μας είναι η μελέτη της κυματικής εξίσωσης

$$u_{tt} - c^2 \Delta u = 0 \tag{1}$$

σε δύο και τρεις διαστάσεις απουσία συνόρων. Όπως και προηγουμένως, επικεντρωνόμαστε στην τριδιάστατη περίπτωση

$$u_{tt} = c^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}).$$

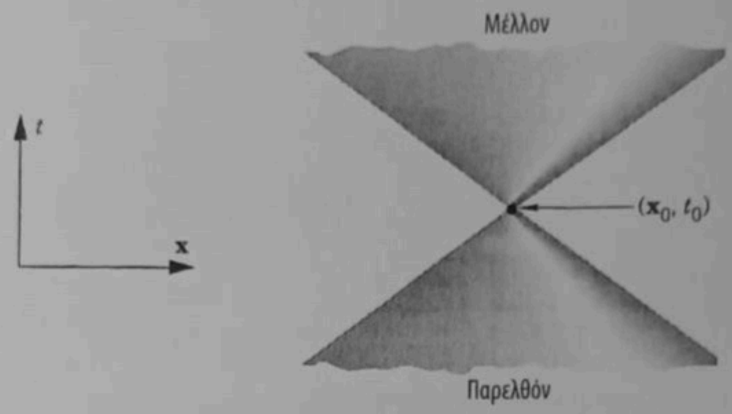
Αυτή η εξίσωση είναι αναλλοίωτη σε (i) μεταθέσεις στον χώρο και τον χρόνο, (ii) στροφές στον χώρο και (iii) μετασχηματισμούς Lorentz (βλ. Άσκηση 4).

Ο ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΟΣ ΚΩΝΟΣ

Η έννοια των χαρακτηριστικών είναι τόσο θεμελιώδης όσο ήταν και σε μία διάσταση, αλλά τώρα *οι χαρακτηριστικές είναι επιφάνειες*. Θεωρούμε, για παράδειγμα, μια χαρακτηριστική ευθεία σε μία διάσταση $x - x_0 = c(t - t_0)$ και την περιστρέφουμε γύρω από τον άξονα $t = t_0$. Έτσι παίρνουμε τον «υπερκώνο»

$$|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| = [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]^{1/2} = c|t - t_0|, \tag{2}$$

ο οποίος είναι κώνος στον τετραδιάστατο χωρόχρονο. Το σύνολο των σημείων στον χωρόχρονο τα οποία ορίζονται από την εξίσωση (2) ονομάζεται *χαρακτηριστικός κώνος* ή *κώνος*



Σχήμα 1

φωτός στο σημείο $(\mathbf{x}_0, t_0)$. Ο λόγος που χρησιμοποιούμε τον τελευταίο όρο είναι ότι αν c είναι η ταχύτητα του φωτός στον ηλεκτρομαγνητισμό, ο κώνος αποτελεί την ένωση όλων των ακτίνων φωτός που ξεκινούν από το σημείο $(\mathbf{x}_0, t_0)$. Ο *στερεός κώνος φωτός* είναι το «εσωτερικό» του κώνου, δηλαδή, $\{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < c|t - t_0|\}$. Πρόκειται για την ένωση του ημικώνου του μέλλοντος με τον ημικώνο του παρελθόντος (βλ. Σχήμα 1). Σε οποιαδήποτε καθορισμένη χρονική στιγμή t, ο κώνος φωτός είναι απλώς μια συνήθης σφαιρική επιφάνεια, και το μέλλον είναι απλώς η σφαιρική επιφάνεια που αποτελείται από τα σημεία στα οποία μπορεί να φτάσει τη χρονική στιγμή t ένα σωματίδιο που ξεκίνησε από το $(\mathbf{x}_0, t_0)$ και κινείται με ταχύτητα μικρότερη από την ταχύτητα του φωτός. Καθώς $t \to +\infty$ η σφαιρική επιφάνεια μεγαλώνει ομόκεντρα με ταχύτητα c. Ο κώνος φωτός είναι η σημαντικότερη χαρακτηριστική επιφάνεια. Στην Ενότητα 9.3 μελετάμε γενικές χαρακτηριστικές επιφάνειες.

Ως γεωμετρική άσκηση, ας υπολογίσουμε το *μοναδιαίο κάθετο στον κώνο φωτός* (2) *διάνυσμα*. Ο κώνος φωτός είναι μια τριδιάστατη επιφάνεια σε τετραδιάστατο χώρο που δίνεται από την εξίσωση

$$\phi(t, x, y, z) \equiv -c^2(t-t_0)^2 + (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = 0.$$

Αυτή είναι μια ισοσταθμική επιφάνεια της ϕ, και έτσι ένα κάθετο διάνυσμα είναι το διάνυσμα της βαθμίδας της $\phi(x, y, z, t)$. (Εδώ μιλάμε για διανύσματα με *τέσσερις* συνιστώσες). Τώρα

$$\operatorname{grad}\phi = (\phi_x, \phi_y, \phi_z, \phi_t) = 2(x - x_0, y - y_0, z - z_0, -c^2(t - t_0)).$$

Τα μοναδιαία κάθετα διανύσματα είναι

$$\begin{aligned}\mathbf{n} &= \pm\frac{\operatorname{grad}\phi}{|\operatorname{grad}\phi|}\\ &= \pm\frac{(x-x_0, y-y_0, z-z_0, -c^2(t-t_0))}{[c^4(t-t_0)^2 + (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2]^{1/2}}.\end{aligned}$$

Έστω $r^2 = (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2$. Με αυτό τον συμβολισμό η εξίσωση του κώνου είναι $r = \pm c(t - t_0)$. Μπορούμε να τη χρησιμοποιήσουμε προκειμένου να απλοποιήσουμε τη σχέση για το $\mathbf{n}$ σε

$$\mathbf{n} = \pm\left(\frac{x-x_0}{\sqrt{(c^2+1)r^2}}, \ldots, \frac{-c^2(t-t_0)}{\sqrt{(c^4+c^2)(t-t_0)^2}}\right)$$

ή

$$\mathbf{n} = \pm\frac{c}{\sqrt{c^2+1}}\left(\frac{x-x_0}{cr}, \frac{y-y_0}{cr}, \frac{z-z_0}{cr}, -\frac{t-t_0}{|t-t_0|}\right). \tag{3}$$

Αυτά είναι τα δύο μοναδιαία, κάθετα στον κώνο φωτός, διανύσματα στον τετραδιάστατο χώρο, με το ένα να κατευθύνεται προς τα μέσα και το άλλο να κατευθύνεται προς τα έξω.

ΔΙΑΤΗΡΗΣΗ ΤΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

Πρόκειται για θεμελιώδη έννοια. Επαναλαμβάνουμε ό,τι κάναμε στην Ενότητα 2.2 ως εξής. Πολλαπλασιάζουμε την κυματική εξίσωση (1) επί u_t και μετά από κάποιες αλγεβρικές πράξεις, έχουμε

$$0 = (u_{tt} - c^2\Delta u)u_t = (\frac{1}{2}u_t^2 + \frac{1}{2}c^2|\nabla u|^2)_t - c^2\nabla\cdot(u_t\nabla u) \tag{4}$$

(βλ. επίσης Ενότητα 7.1) Ολοκληρώνουμε αυτήν τη σχέση σε ολόκληρο τον τριδιάστατο χώρο. Το ολοκλήρωμα του τελευταίου όρου θα μηδενιστεί αν οι παράγωγοι της $u(\mathbf{x},t)$ τείνουν στο μηδέν (κατά μια κατάλληλη έννοια) καθώς $|\mathbf{x}| \to \infty$. Με αυτή την υπόθεση, έχουμε

$$0 = \iiint \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}u_t^2 + \frac{1}{2}c^2|\nabla u|^2\right)d\mathbf{x} \tag{5}$$

(η ολοκλήρωση γίνεται σε ολόκληρο τον τριδιάστατο χώρο $\mathbb{R}^3$). Όμως η χρονική παράγωγος μπορεί να βγει από το ολοκλήρωμα (βλ. Ενότητα A.3). Συνεπώς, η *(ολική) ενέργεια*

$$\boxed{E = \frac{1}{2}\iiint (u_t^2 + c^2|\nabla u|^2)\,d\mathbf{x}} \tag{6}$$

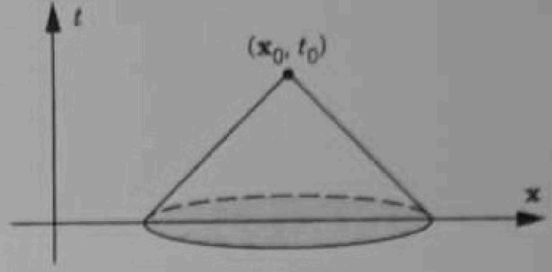
είναι σταθερή (ανεξάρτητη του t). Ο πρώτος όρος είναι η *κινητική ενέργεια* και ο δεύτερος η *δυναμική ενέργεια*.

ΑΡΧΗ ΤΗΣ ΑΙΤΙΟΤΗΤΑΣ

Θεωρούμε μια λύση της κυματικής εξίσωσης με οποιεσδήποτε αρχικές συνθήκες

$$u(\mathbf{x},0) = \phi(\mathbf{x}), \qquad u_t(\mathbf{x},0) = \psi(\mathbf{x}).$$

Έστω $\mathbf{x}_0$ οποιοδήποτε σημείο και $t_0 > 0$ οποιαδήποτε χρονική στιγμή. Σύμφωνα με την αρχή της αιτιότητας, η τιμή $u(\mathbf{x}_0,t_0)$ εξαρτάται μόνο από τις τιμές των $\phi(\mathbf{x})$ και $\psi(\mathbf{x})$ στη σφαίρα $\{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0| \leqslant ct_0\}$. Αυτή η σφαίρα είναι η τομή του στερεού κώνου φωτός με το αρχικό υπερεπίπεδο $\{t=0\}$ (βλ. Σχήμα 2).



Σχήμα 2

Απόδειξη. Ξεκινάμε από τη σχέση (4) γραμμένη στη ρητά εκπεφρασμένη μορφή

$$\partial_t(\frac{1}{2}u_t^2 + \frac{1}{2}c^2|\nabla u|^2) + \partial_x(-c^2 u_t u_x) + \partial_y(-c^2 u_t u_y) + \partial_z(-c^2 u_t u_z) = 0, \quad (7)$$

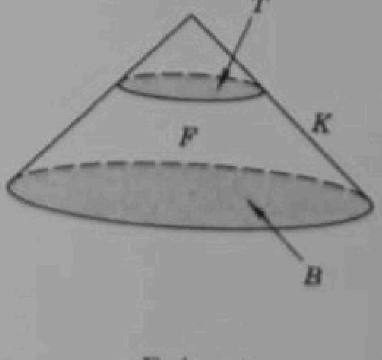
έχοντας γράψει εν συντομία $\partial_t = \partial/\partial t$, και ούτω καθεξής. Ωστόσο, αυτή τη φορά, ολοκληρώνουμε την (7) σε έναν στερεό κόλουρο κώνο F σετον *τετραδιάστατο χωρόχρονο* με πάνω υπερδίσκο T, κάτω υπερδίσκο B και πλευρική υπερεπιφάνεια K. Ο F είναι απλώς τμήμα ενός στερεού κώνου φωτός (βλ. Σχήμα 3).

Σύμφωνα με τη σχέση (7), η απόκλιση ενός συγκεκριμένου τετραδιάστατου διανυσματικού πεδίου μηδενίζεται. Αυτό έχει στηθεί τέλεια για το *θεώρημα της απόκλισης σε τέσσερις διαστάσεις* (βλ. Ενότητα Α.3)! Ο κόλουρος κώνος F είναι τετραδιάστατος και το σύνορό του, ∂F, τριδιάστατο. Έστω (n_x, n_y, n_z, n_t) το μοναδιαίο προς τα έξω κάθετο στο ∂F τετραδιάστατο διάνυσμα, και dV το *τριδιάστατο* ολοκλήρωμα όγκου στο σύνορο ∂F. Τότε έχουμε

$$\iiint_{\partial F} [n_t(\frac{1}{2}u_t^2 + \frac{1}{2}c^2|\nabla u|^2) - n_x(c^2 u_t u_x) - n_y(c^2 u_t u_y) - n_z(c^2 u_t u_z)]\, dV = 0. \quad (8)$$

Τώρα $\partial F = T \cup B \cup K$, το οποίο σημαίνει ότι το ολοκλήρωμα της (8) έχει τρία μέρη και, έτσι, η (8) παίρνει τη μορφή

$$\iiint_T + \iiint_B + \iiint_K = 0.$$



Σχήμα 3

Στον *πάνω* υπερδίσκο T, το κάθετο διάνυσμα κατευθύνεται προς τα πάνω, οπότε $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z, n_t) = (0,0,0,1)$ και έχουμε απλώς

$$\iiint_T (\frac{1}{2}u_t^2 + \frac{1}{2}c^2|\nabla u|^2)\, d\mathbf{x}.$$

Στον *κάτω* υπερδίσκο B, το κάθετο διάνυσμα κατευθύνεται προς τα κάτω, οπότε $\mathbf{n} = (0,0,0,-1)$ και έχουμε απλώς

$$\iiint_B (-1)(\frac{1}{2}u_t^2 + \frac{1}{2}c^2|\nabla u|^2)\, d\mathbf{x} = -\iiint_B (\frac{1}{2}\psi^2 + \frac{1}{2}c^2|\nabla \phi|^2)\, d\mathbf{x}.$$

Το ολοκλήρωμα στην *πλευρική υπερεπιφάνεια* K είναι πιο περίπλοκο, αλλά ισχυριζόμαστε ότι *είναι θετικό* (ή μηδέν). Προκειμένου να αποδείξουμε αυτό τον ισχυρισμό, αντικαθιστούμε τη σχέση (3) για το $\mathbf{n}$ στο ολοκλήρωμα πάνω στην K. Χρησιμοποιούμε το θετικό πρόσημο στην (3) επειδή το *προς τα έξω* κάθετο διάνυσμα έχει θετική συνιστώσα t στην K (βλ. Σχήμα 4). Σημειώνουμε ότι $t < t_0$. Όπως και προηγουμένως, $r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|$. Άρα το ολοκλήρωμα είναι

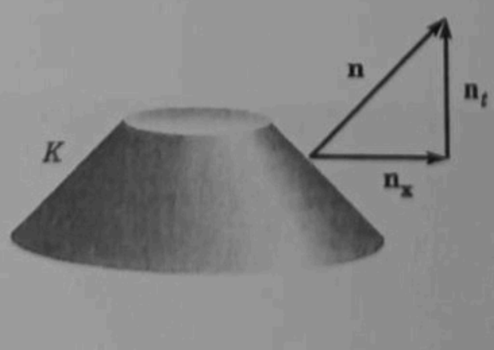
$$\frac{c}{\sqrt{c^2+1}} \iiint_K \Big[\frac{1}{2}u_t^2 + \frac{1}{2}c^2|\nabla u|^2 + \frac{x-x_0}{cr}(-c^2 u_t u_x) + \frac{y-y_0}{cr}(-c^2 u_t u_y) + \frac{z-z_0}{cr}(-c^2 u_t u_z)\Big]\, dV. \quad (9)$$

Η τελευταία υπό ολοκλήρωση ποσότητα μπορεί να γραφεί πιο συνοπτικά ως

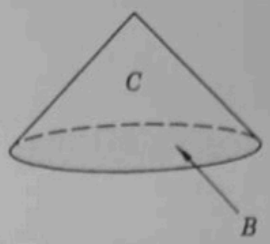
$$I = \frac{1}{2}u_t^2 + \frac{1}{2}c^2|\nabla u|^2 - c u_t u_r, \quad (10)$$

όπου $\nabla u = (u_x, u_y, u_z)$,

$$\hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} = \left(\frac{x-x_0}{r}, \frac{y-y_0}{r}, \frac{z-z_0}{r}\right),$$



Σχήμα 4



Σχήμα 5

ενώ η ακτινική παράγωγος είναι

$$u_r = u_x \frac{\partial x}{\partial r} + u_y \frac{\partial y}{\partial r} + u_z \frac{\partial z}{\partial r} = \hat{\mathbf{r}} \cdot \nabla u.$$

Συμπληρώνοντας το τετράγωνο στη (10), έχουμε

$$I = \frac{1}{2}(u_t - cu_r)^2 + \frac{1}{2}c^2(|\nabla u|^2 - u_r^2) = \frac{1}{2}(u_t - cu_r)^2 + \frac{1}{2}c^2|\nabla u - u_r\hat{\mathbf{r}}|^2, \qquad (11)$$

αποτέλεσμα που είναι προφανώς θετικό. Από τη στιγμή που η υπό ολοκλήρωση ποσότητα είναι θετική, το ολοκλήρωμα (9) είναι επίσης θετικό, όπως επιθυμούσαμε να αποδείξουμε.

Συνεπώς, από την (8) καταλήγουμε στην ανισότητα

$$\boxed{\iiint_T (\frac{1}{2}u_t^2 + \frac{1}{2}c^2|\nabla u|^2)\, d\mathbf{x} \leqslant \iiint_B (\frac{1}{2}\psi^2 + \frac{1}{2}c^2|\nabla \phi|^2)\, d\mathbf{x}.} \qquad (12)$$

Έστω τώρα ότι οι ψ και ϕ μηδενίζονται στον υπερδίσκο B. Από τη (12) και το πρώτο θεώρημα μηδενισμού της Ενότητας A.1, η υπό ολοκλήρωση ποσότητα $\frac{1}{2}u_t^2 + \frac{1}{2}c^2|\nabla u|^2$ μηδενίζεται στον υπερδίσκο T. Επομένως, οι u_t και ∇u μηδενίζονται επίσης στον T. Όμως μπορούμε να μεταβάλλουμε κατά βούληση το ύψος του κόλουρου κώνου F. Άρα, οι u_t και ∇u μηδενίζονται σε ολόκληρο το τμήμα του στερεού κώνου C που κείται πάνω από τον B (βλ. Σχήμα 5). Επομένως η u είναι σταθερή στον στερεό κώνο C. Από τη στιγμή που $u = 0$ στην κάτω υπερεπιφάνεια B, η σταθερά είναι μηδέν. Έτσι $u \equiv 0$ σε ολόκληρο τον C. Ειδικότερα, $u(x_0, y_0, z_0, t_0) = 0$.

Θεωρώντας τη διαφορά δύο λύσεων όπως στην Ενότητα 2.2, συνάγουμε εύκολα ότι αν οι u και v είναι οποιεσδήποτε δύο λύσεις της (1) και αν $u = v$ στον B, τότε $u(x_0, y_0, z_0, t_0) = v(x_0, y_0, z_0, t_0)$. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη της αρχής της αιτιότητας. $\square$

Ο στερεός κώνος C ονομάζεται *χωρίο εξάρτησης* ή *παρελθόν* της κορυφής $(\mathbf{x}_0, t_0)$. Όπως στην Ενότητα 2.2, μπορούμε να διατυπώσουμε εκ νέου το αποτέλεσμα ως εξής. Θέτουμε $t_0 = 0$.

Πόρισμα. Τα αρχικά δεδομένα ϕ, ψ σε ένα χωρικό σημείο $\mathbf{x}_0$ μπορούν να επηρεάσουν τη λύση μόνο στον στερεό κώνο φωτός που έχει κορυφή το σημείο $(\mathbf{x}_0, 0)$.

Δηλαδή, το χωρίο επιρροής *ενός σημείου είναι το πολύ ο στερεός κώνος φωτός που εγείρεται από αυτό το σημείο.* Συνεπώς, έχουμε αποδείξει, *μόνο από τη ΜΔΕ,* ότι κανένα σήμα δεν μπορεί να κινηθεί με ταχύτητα μεγαλύτερη από την ταχύτητα του φωτός!

Η ίδια αρχή της αιτιότητας ισχύει σε δύο διαστάσεις.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

$\boxed{\square = \Delta}$

1. Να βρεθούν όλα τα τριδιάστατα επίπεδα κύματα. Δηλαδή, όλες οι λύσεις της κυματικής εξίσωσης της μορφής $u(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - ct)$, όπου $\mathbf{k}$ καθορισμένο διάνυσμα και f συνάρτηση μίας μεταβλητής. $k^2=1$, $\forall f$

   $g''=0$
2. Να επαληθευτεί ότι η ποσότητα $(c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2)^{-1}$ ικανοποιεί την κυματική εξίσωση παντού, εκτός από την επιφάνεια του κώνου φωτός. Like $n=1$ $\frac{1}{|x|^{n-2}}$
3. Να επαληθευτεί ότι η ποσότητα $(c^2t^2 - x^2 - y^2)^{-1/2}$ ικανοποιεί τη διδιάστατη κυματική εξίσωση παντού, αλλά όχι πάνω στον κώνο $\{x^2 + y^2 = c^2t^2\}$.
4. (*Αναλλοίωτο Lorentz της κυματικής εξίσωσης*) Θεωρώντας τις συντεταγμένες του χωρόχρονου ως τετραδιάστατα διανύσματα (x, y, z, t), έστω Γ ο διαγώνιος πίνακας με τα διαγώνια στοιχεία 1, 1, 1, -1. Ένας άλλος πίνακας L ονομάζεται *μετασχηματισμός Lorentz* αν ο L έχει αντίστροφο και $L^{-1} = \Gamma L^t \Gamma$, όπου L^t είναι ο ανάστροφος πίνακας.

   On diagonal ± 1
   (α') Αν οι L και M είναι μετασχηματισμοί Lorentz, δείξτε ότι οι LM και L^{-1} είναι επίσης μετασχηματισμοί Lorentz. orthogonal

   In Δ.
   (β') Δείξτε ότι ο L είναι μετασχηματισμός Lorentz αν και μόνο αν $m(L\mathbf{v}) = m(\mathbf{v})$ για όλα τα τετραδιάστατα διανύσματα $\mathbf{v} = (x, y, z, t)$ όπου η ποσότητα $m(\mathbf{v}) = x^2 + y^2 + z^2 - t^2$ ονομάζεται *μετρική Lorentz.*
   (γ') Αν η $u(x, y, z, t)$ είναι οποιαδήποτε συνάρτηση και ο L είναι μετασχηματισμός Lorentz, έστω $U(x, y, z, t) = u(L(x, y, z, t))$. Δείξτε ότι
   $$U_{xx} + U_{yy} + U_{zz} - U_{tt} = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} - u_{tt}.$$
   (δ') Εξηγήστε το νόημα ενός μετασχηματισμού Lorentz με πιο γεωμετρικούς όρους. [*Υπόδειξη*: Θεωρήστε τις ισοσταθμικές υπερεπιφάνειες της $m(\mathbf{v})$].
5. Αποδείξτε την αρχή της αιτιότητας σε δύο διαστάσεις.
6. (α') Να δειχθεί η διατήρηση της ενέργειας για την κυματική εξίσωση σε χωρίο D με ομογενείς συνοριακές συνθήκες Dirichlet ή Neumann.
   (β') Τι ισχύει για τη συνθήκη Robin;
7. Για τη συνοριακή συνθήκη $\partial u/\partial n + b\partial u/\partial t = 0$ με $b > 0$, δείξτε ότι η ενέργεια που ορίζεται από την (6) ελαττώνεται.
8. Θεωρήστε την εξίσωση $u_{tt} - c^2\Delta u + m^2u = 0$, όπου $m > 0$, γνωστή ως *εξίσωση Klein–Gordon.*
   (α') Ποια είναι η ενέργεια; Δείξτε ότι αυτή είναι σταθερή.
   (β') Αποδείξτε για αυτή την εξίσωση την αρχή της αιτιότητας.

9.2 Η ΚΥΜΑΤΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ ΣΤΟΝ ΧΩΡΟΧΡΟΝΟ

Αναζητούμε σε ρητά εκπεφρασμένη μορφή τη λύση του προβλήματος

$$u_{tt} = c^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) \tag{1}$$

$$u(\mathbf{x}, 0) = \phi(\mathbf{x}) \qquad u_t(\mathbf{x}, 0) = \psi(\mathbf{x}). \tag{2}$$

x_0

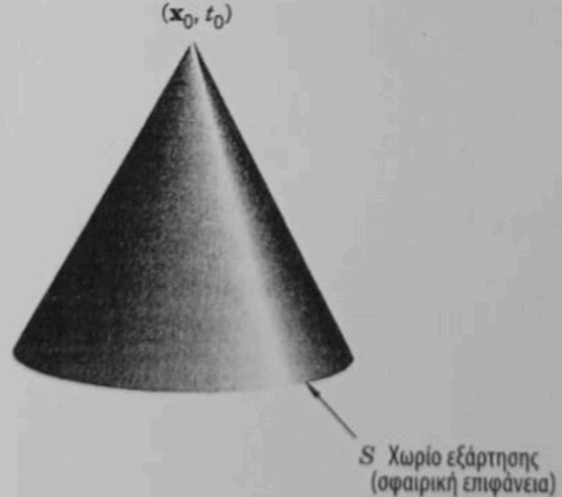
[όπως η λύση d' Alembert (2.1.8)]. Η απάντηση είναι

$$\boxed{u(\mathbf{x}, t_0) = \frac{1}{4\pi c^2 t_0} \iint_S \psi(\mathbf{x}) dS + \frac{\partial}{\partial t_0} \left[\frac{1}{4\pi c^2 t_0} \iint_S \phi(\mathbf{x}) dS \right],} \tag{3}$$

όπου S η σφαιρική επιφάνεια με κέντρο το $\mathbf{x}_0$ και ακτίνα ct_0. Αυτή η διάσημη μαθηματική σχέση οφείλεται στον Poisson αλλά είναι γνωστή ως *τύπος του Kirchhoff*.

Θα αποδείξουμε την (3) σε λίγο, όμως πρώτα ας συγκρίνουμε το αποτέλεσμα με την αρχή της αιτιότητας. Η τιμή $u(\mathbf{x}_0, t_0)$ εξαρτάται, σύμφωνα με την (3), μόνο από τις τιμές των $\psi(\mathbf{x})$ και $\phi(\mathbf{x})$ για $\mathbf{x}$ πάνω στη σφαιρική *επιφάνεια* $S = \{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| = ct_0\}$ αλλά όχι από τις τιμές των $\psi(\mathbf{x})$ και $\phi(\mathbf{x})$ στο *εσωτερικό* αυτής της σφαιρικής επιφάνειας. Αυτός ο ισχυρισμός μπορεί να αναστραφεί και να πούμε ότι οι τιμές των ψ και ϕ σε ένα χωρικό σημείο $\mathbf{x}_1$ επηρεάζουν τη λύση μόνο στην *επιφάνεια* $\{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1| = ct\}$ του κώνου φωτός που εγείρεται από το σημείο $(\mathbf{x}_1, 0)$. Αυτό το γεγονός, που απεικονίζεται στα Σχήματα 1 και 2, ονομάζεται *αρχή του Huygens* και σημαίνει ότι οποιαδήποτε λύση της τριδιάστατης κυματικής εξίσωσης (δηλαδή, οποιοδήποτε ηλεκτρομαγνητικό σήμα στο κενό) διαδίδεται *ακριβώς* με την ταχύτητα c του φωτός, ούτε ταχύτερα και *ούτε βραδύτερα*.

Αυτή είναι η αρχή που μας επιτρέπει να βλέπουμε ευκρινή είδωλα. Σημαίνει επίσης ότι κάθε ήχος διαδίδεται διαμέσου του αέρα με ακριβώς μια καθορισμένη ταχύτητα c χωρίς «ηχώ», υποθέτοντας ότι απουσιάζουν τοιχώματα ή ανομοιογένειες στον αέρα. Έτσι σε κάθε



Σχήμα 1

Σχήμα 2

τής ακούει ακριβώς αυτό που έχει παραχθεί κατά τη χρονική
όσταση μέχρι το μουσικό όργανο, ενώ δεν ακούει ένα μείγμα
σε διάφορες προγενέστερες χρονικές στιγμές.

ου Kirchhoff (3). Θα χρησιμοποιήσουμε τη *μέθοδο του σφαιρι-*
σος (όρος) της $u(\mathbf{x}, t)$ πάνω στη σφαιρική επιφάνεια $\{|\mathbf{x}| = r\}$,
τοτε ακτίνας r, συμβολίζεται με $\overline{u}(r, t)$. Δηλαδή,

$$\begin{aligned}\overline{u}(r,t) &= \frac{1}{4\pi r^2} \iint_{|\mathbf{x}|=r} u(\mathbf{x},t)\, dS \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} u(\mathbf{x},t) \sin\theta \, d\theta \, d\phi, \end{aligned} \qquad (4)$$

εκφράζονται συναρτήσει των σφαιρικών συντεταγμένων r, θ και ϕ. Θα
η ίδια η $\overline{u}$ ικανοποιεί τη ΜΔΕ

$$\boxed{(\overline{u})_{tt} = c^2 (\overline{u})_{rr} + 2c^2 \frac{1}{r} (\overline{u})_r.} \qquad (5)$$

της (5). Για λόγους απλούστευσης, υποθέτουμε ότι $c = 1$. Η εξίσωση (5)
αναλλοίωτο του τελεστή Δ σε στροφές. Πράγματι, από την Άσκηση 1, έχουμε
ı). Δηλαδή, η δράση του τελεστή Laplace στον μέσο είναι ο μέσος της δράσης
ι Laplace. Συνεπώς,

$$\Delta(\overline{u}) = (\overline{\Delta u}) = (\overline{u_{tt}}) = (\overline{u})_{tt}.$$

κανοποιεί την ίδια ΜΔΕ που ικανοποιεί και η u. Σε σφαιρικές συντεταγμένες γνω-
από την (6.1.7), ότι

$$\Delta(\overline{u}) = \overline{u}_{rr} + \frac{2}{r}\overline{u}_r + \text{όροι παραγώγων ως προς τις γωνίες.}$$

Για τη $\overline{u}$, η οποία εξαρτάται μόνο από το r, οι παράγωγοι ως προς τις γωνίες πρέπει να μηδενίζονται, και έτσι αποδεικνύεται η (5).

Προκειμένου να δώσουμε μια εναλλακτική απόδειξη της (5), εφαρμόζουμε το θεώρημα της απόκλισης στην εξίσωση $u_{tt} = \Delta u$ στο χωρίο $D = \{|\mathbf{x}| \leqslant r\}$. Επομένως,

$$\iiint_D u_{tt}\, d\mathbf{x} = \iiint_D \Delta u\, d\mathbf{x} = \iint_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial n} dS. \tag{6}$$

Σε σφαιρικές συντεταγμένες, η (6) μπορεί να γραφεί σε ρητά εκπεφρασμένη μορφή ως

$$\int_0^r \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} u_{tt} \rho^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi\, d\rho = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\partial u}{\partial r} r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi$$

ή

$$\int_0^r \rho^2 \overline{u_{tt}}(\rho, t)\, d\rho = r^2 \frac{\partial \overline{u}(r,t)}{\partial r}. \tag{7}$$

Παραγωγίζοντας την (7) ως προς r, παίρνουμε την υπό ολοκλήρωση ποσότητα στο αριστερό μέλος και δύο όρους στο δεξιό μέλος, ως εξής:

$$r^2 \overline{u_{tt}} = (r^2 \overline{u}_r)_r = r^2 \overline{u}_{rr} + 2r\overline{u}_r.$$

Διαιρώντας διά r^2, παίρνουμε *και πάλι* την εξίσωση (5).

Συνεχίζοντας την απόδειξη της (3), κάνουμε την αντικατάσταση

$$v(r,t) = r\overline{u}(r,t)$$

στη ΜΔΕ (5). Τότε $v_r = r\overline{u}_r + \overline{u}$ και $v_{rr} = r\overline{u}_{rr} + 2\overline{u}_r$. Έτσι, συναρτήσει της $v(r,t)$ η (5) απλοποιείται στην

$$\boxed{v_{tt} = c^2 v_{rr}.} \tag{8}$$

Βεβαίως, η εξίσωση (8) ισχύει μόνο για $0 \leqslant r < \infty$. Η συνάρτηση $v = r\overline{u}$ προφανώς μηδενίζεται στο $r = 0$:

$$v(0,t) = 0 \qquad (\text{στο } r = 0) \tag{9}$$

και ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες

$$v(r,0) = r\overline{\phi}(r) \qquad v_t(r,0) = r\overline{\psi}(r) \qquad (\text{στο } t = 0). \tag{10}$$

Συνεπώς έχουμε περιοριστεί σε ένα πρόβλημα ημιευθείας σε μία διάσταση: τη ΜΔΕ (8), τη ΣΣ (9) και τις ΑΣ (10). Αυτό το πρόβλημα ως προς τη v έχει επιλυθεί στην Ενότητα 3.2 και η λύση του δίνεται από τη σχέση [βλ. (3.2.3)]

$$v(r,t) = \frac{1}{2c} \int_{ct-r}^{ct+r} s\overline{\psi}(s)\, ds + \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2c} \int_{ct-r}^{ct+r} s\overline{\phi}(s)\, ds\right] \tag{11}$$

για $0 \leqslant r \leqslant ct$, και από μια διαφορετική σχέση για $r \geqslant ct$.

Το επόμενο βήμα είναι να ανακτήσουμε τη u στην αρχή του συστήματος συντεταγμένων $r = 0$:

$$\begin{aligned} u(\mathbf{0}, t) = \overline{u}(0, t) &= \lim_{r\to 0} \frac{v(r,t)}{r} \\ &= \lim_{r\to 0} \frac{v(r,t) - v(0,t)}{r} = \frac{\partial v}{\partial r}(0, t). \end{aligned} \tag{12}$$

Παραγωγίζοντας την (11), έχουμε

$$\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{1}{2c}[(ct+r)\overline{\psi}(ct+r) + (ct-r)\overline{\psi}(ct-r)] + \dots,$$

όπου οι ... συμβολίζουν έναν παρόμοιο όρο αλλά εξαρτώμενο από τη $\overline{\phi}$. Όταν θέσουμε $r = 0$, αυτή η σχέση απλοποιείται στη $[\partial v/\partial r](0,t) = (1/2c)[2ct\overline{\psi}(ct)] = t\overline{\psi}(ct)$. Αυτό είναι το δεξιό μέλος της (12). Συνεπώς,

$$u(\mathbf{0}, t) = t\overline{\psi}(ct) = \frac{1}{4\pi c^2 t} \iint_{|\mathbf{x}|=ct} \psi(\mathbf{x}) dS + \dots. \tag{13}$$

Αυτός είναι ακριβώς ο πρώτος όρος της σχέσης (3) (στην περίπτωση που το χωρικό σημείο είναι η αρχή των αξόνων και ο χρόνος συμβολίζεται με t). Πρόκειται απλώς για τον χρόνο t πολλαπλασιασμένο επί τον μέσο όρο της ψ πάνω στη σφαιρική επιφάνεια με κέντρο το $\mathbf{0}$ και ακτίνα ct.

Στη συνέχεια μεταθέτουμε το αποτέλεσμα (13). Αν $\mathbf{x}_0$ είναι *οποιοδήποτε* χωρικό σημείο, τότε έστω

$$w(\mathbf{x}, t) = u(\mathbf{x} + \mathbf{x}_0, t).$$

Αυτή είναι η λύση της κυματικής εξίσωσης με τα αρχικά δεδομένα να είναι $\phi(\mathbf{x} + \mathbf{x}_0)$ και $\psi(\mathbf{x} + \mathbf{x}_0)$. Έτσι μπορούμε να εφαρμόσουμε το αποτέλεσμα (13) στη $w(\mathbf{x}, t)$, προκειμένου να πάρουμε τη σχέση

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}_0, t) = w(\mathbf{0}, t) &= \frac{1}{4\pi c^2 t} \iint_{|\mathbf{x}|=ct} \psi(\mathbf{x} + \mathbf{x}_0) dS + \dots \\ &= \frac{1}{4\pi c^2 t} \iint_{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|=ct} \psi(\mathbf{x}) dS + \dots. \end{aligned} \tag{14}$$

Αυτός είναι ακριβώς ο πρώτος όρος της (3).

Μετά από λίγη σκέψη διαπιστώνουμε ότι ο δεύτερος όρος της (3) προκύπτει κατά τον ίδιο τρόπο. Για την ακρίβεια, αν αντικαταστήσουμε την ψ με τη ϕ στον πρώτο όρο της (11) και θεωρήσουμε τη χρονική παράγωγο, παίρνουμε τον δεύτερο όρο. Οι δύο όροι της (3) πρέπει να έχουν την ίδια σχέση.

□

ΛΥΣΗ ΣΕ ΔΥΟ ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ

Θα δούμε ότι η αρχή του Huygens *δεν ισχύει σε δύο διαστάσεις*! Το πρόβλημα που θέλουμε να λύσουμε είναι το

$$u_{tt} = c^2(u_{xx} + u_{yy}) \tag{15}$$

$$u(x, y, 0) = \phi(x, y), \qquad u_t(x, y, 0) = \psi(x, y). \tag{16}$$

Η κεντρική ιδέα είναι να θεωρήσουμε τη $u(x, y, t)$ ως λύση του τριδιάστατου προβλήματος *το οποίο απλώς τυχαίνει να μην εξαρτάται από το* z και έτσι αυτή πρέπει να δίνεται από τον τύπο του Kirchhoff. Ας υποθέσουμε και πάλι για λόγους απλούστευσης ότι $\phi \equiv 0$ και ότι $(x_0, y_0) = (0, 0)$. Από τη σχέση (13) σε τρεις διαστάσεις έχουμε

$$u(0, 0, t) = \frac{1}{4\pi c^2 t} \iint_{x^2+y^2+z^2=c^2t^2} \psi(x, y)\, dS.$$

Αυτή είναι η σωστή σχέση για τη λύση του προβλήματος (15), (16), αλλά μπορούμε να την απλοποιήσουμε ως εξής. Πρόκειται για το διπλάσιο του ολοκληρώματος στο πάνω ημισφαίριο $z = \sqrt{c^2t^2 - x^2 - y^2}$. Στο ημισφαίριο (βλ. Σχήμα 3) μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη συνήθη σχέση για τη στοιχειώδη επιφάνεια dS συναρτήσει των συντεταγμένων (x, y), λαμβάνοντας το διπλό ολοκλήρωμα

$$u(0, 0, t) = \frac{1}{2\pi c^2 t} \iint_{x^2+y^2 \leqslant c^2t^2} \psi(x, y) \left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]^{1/2} dx\, dy. \tag{17}$$

Ο όρος της (17) μέσα στις αγκύλες ισούται με

$$\Big[\dots\Big] = 1 + \left(\frac{-x}{z}\right)^2 + \left(\frac{-y}{z}\right)^2 = \frac{c^2t^2}{z^2} = \frac{c^2t^2}{c^2t^2 - x^2 - y^2}.$$