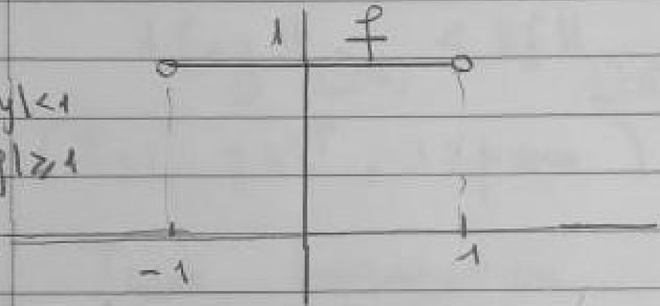
Lecture 6 (Ασκησεις – Σχολια κ.λ.π.)

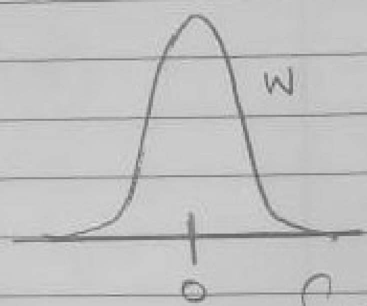
1. Περι συνελιξης.

$$(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\,g(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\,g(x-y)\,dy$$

Η συνελιξη ειναι καποιος μεσος ορος της f σε περιοχη του x κανοντας χρηση της g ως βαρους. Για παραδειγμα

$f=1,\ |y|<1$
$f=0,\ |y|\geq 1$



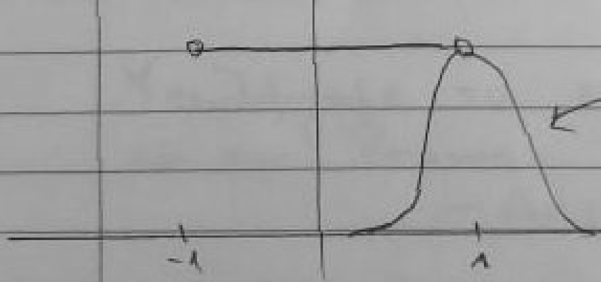


$\int W = 1$

$$(f*w)(x) = \int f(y)\,w(x-y)\,dy$$

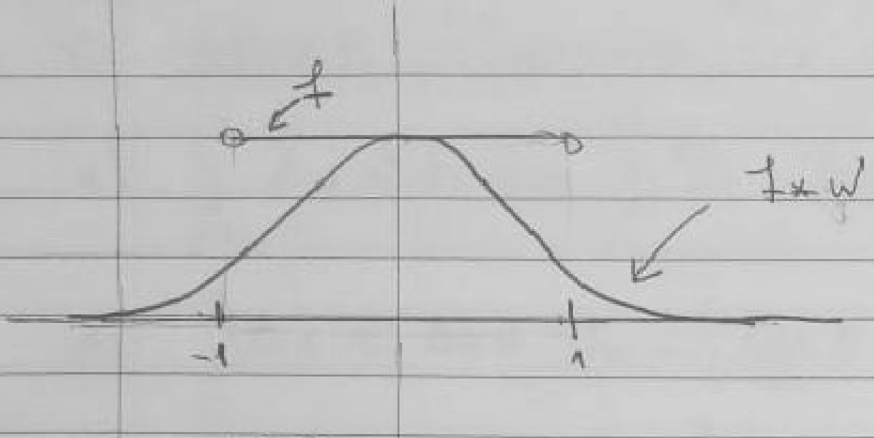
$$(f*w)(1) = \int f(y)\,w(1-y)\,dy \simeq \sum f(y_k)\,w(1-y_k)\,\Delta y$$

$$\simeq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(y_k)\,w(1-y_k) = \frac{1}{n}\Big[\sum_{y_k\leq 1} 1\cdot w(1-y_k) + \sum_{y_k\geq 1} 0\cdot w(1-y_k)\Big]$$



$w(1-y)$ $\big(= w(y-1)\big)$.

$$= \frac{1}{n}\sum_{y_k\leq 1} w(1-y_k) \simeq \frac{1}{2}\int w(1-y)\,dy = \frac{1}{2}$$



Η διαδικασία των μέσων όρων ομαλοποιεί την συνάρτηση (στο βαθμό που το βάρος w επιτρέπει).

Αναφέραμε την <u>ανισότητα Young</u>

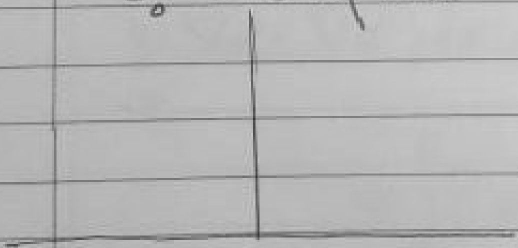
$$\|f*g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

$(f\in L^1,\ g\in L^p,\ 1\le p\le \infty)$

Τέλος φορμαλιστικά

$$(f*\delta_0)(x) = f(x)$$

δ_0 = "συνάρτηση" δέλτα στο $x=0$



$$\delta_0(x)=\begin{cases}\infty, & x=0\\ 0, & x\neq 0.\end{cases} \qquad 1=\int_{\mathbb{R}^n}\delta_0(x)\,dx$$

Υπενθυμίζαμε το επιχείρημα των φυσικών στην σ13 και την Poisson

$$-\Delta u = f$$

$$u(x)=\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(x-y)\,f(y)\,dy = (\Phi*f)(x)$$

Επιλέγαμε $f(y)=\delta_0(y) \Rightarrow u(x)=\Phi(x)$.

$\square$

2. <u>Άσκηση 2</u> (Ταυτότητα του Green)

α) $$\int_\Omega \Delta u\, v\, dx = -\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v\, dS$$

β) $$\int_\Omega (\Delta u\, v - \Delta v\, u)\, dx = \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial n} v - \frac{\partial v}{\partial n} u\right) dS$$

<u>Λύση</u>

<u>Θεώρημα Απόκλισης</u>

$\vec n = (n_1, \dots, n_n)$

$$\vec V(x) = (V_1(x), \dots, V_n(x))$$ Δ.Π.

$$\operatorname{div} \vec V(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V_i}{\partial x_i} =: (V_i)_{x_i}$$ (Einstein συμβολισμός)

(1) $$\int_\Omega \operatorname{div} \vec V(x)\, dx = \int_{\partial\Omega} \vec V \cdot \vec n\, dS$$

$$\int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v)\, dx = \int_\Omega u_{x_i} v_{x_i}\, dx$$

$$= \int_\Omega \left[(u_{x_i} v)_{x_i} - u_{x_i x_i} v \right] dx$$

$$= \int_\Omega \operatorname{div} (u_{x_1} v, \dots, u_{x_n} v)\, dx - \int_\Omega (\Delta u) v\, dx$$

$$\overset{(1)}{=} \int_{\partial\Omega} (u_{x_i} v\, n_i)\, dS = \int_{\partial\Omega} \vec\nabla u \cdot \vec n\, v\, dS = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v.$$

Ασκηση 2 απο Evans (Αναλλοίωτο Δ κατω απο Ορθογωνιους μετασχ.)

Εστω $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ και

(2) $$\Delta_y u(y) = 0$$

$$\left(\sum \frac{\partial^2 u}{\partial y_i^2} = \Delta u \right)$$

Οριζουμε

(3) $$v(x) = u(Ox)$$

$$OO^T = O^T O = I.$$

Τοτε ισχυει

(4) $$\Delta_x v(x) = 0$$

Λυση

$$v(x) = u(Ox) \Rightarrow v_{x_i} = \sum u_{y_k} \frac{\partial y_k}{\partial x_i} = u_{y_k} \frac{\partial y_k}{\partial x_i}$$

$$\Delta_x v = v_{x_i x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(u_{y_k} \frac{\partial y_k}{\partial x_i} \right) = u_{y_k y_l} \frac{\partial y_l}{\partial x_i} \frac{\partial y_k}{\partial x_i} + u_{y_k} \cancel{\frac{\partial^2 y_k}{\partial x_i \partial x_i}}^{\,0}$$

$$= u_{y_k y_l} \frac{\partial y_l}{\partial x_i} \frac{\partial y_k}{\partial x_i}$$

$$y = Ox \Leftrightarrow y_k = O_{k\sigma} x_\sigma \qquad \left(\sum_\sigma O_{k\sigma} x_\sigma \right)$$

$$\frac{\partial y_k}{\partial x_i} = O_{k\sigma} \frac{\partial x_\sigma}{\partial x_i} = O_{ki}$$

$\therefore$

(5) $$\Delta_x v = u_{y_k y_l} O_{li} O_{ki}$$

$$O O^T = I \iff O_{ik} (O^T)_{kj} = \delta_{ij}$$

$\iff$

(6) $$O_{ik} O_{jk} = \delta_{ij}$$

Από (6) έχουμε $O_{li} O_{ki} = \delta_{lk}$

$\Longrightarrow$

$$\Delta v = u_{y_k y_l} \delta_{kl} = u_{y_k y_k} = \Delta_y v .$$

$\square$