

Διαφορική Γεωμετρία 2
Πακέτο προβλημάτων 1

Πρόβλημα 1. Να δείξετε ότι κάθε πολλαπλότητα Riemann διάστασης 1 είναι τοπικά ισομετρική με την $(\mathbb{R}, dx \otimes dx)$.

Πρόβλημα 2. Να αποδείξετε ότι η απεικόνιση $A : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$, με $A(p) = -p$, όπου η μοναδιαία σφαίρα $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ εφοδιάζεται με την μετρική Riemann $g_{\mathbb{S}^n}$ που επάγεται από την εμφύτευση στον $\mathbb{R}^{n+1}$ με τη συνήθη μετρική Riemann $g_{\mathbb{R}^{n+1}}$, είναι ισομετρία. Να εξηγήσετε πώς αυτό το γεγονός μας επιτρέπει να ορίσουμε μια μετρική Riemann g στον προβολικό χώρο $\mathbb{R}P^n$, ώστε η απεικόνιση πηλίκου $\pi : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$, $\pi(p) = [p]$, να είναι τοπική ισομετρία.

Πρόβλημα 3. Να δείξετε ότι υπάρχει μετρική Riemann στον τόρο $T^n = \mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1$, ώστε η απεικόνιση $\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow T^n$, με $\pi(\theta_1, \dots, \theta_n) = (e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n})$ να είναι τοπική ισομετρία, όπου ο $\mathbb{R}^n$ εφοδιάζεται με τη συνήθη μετρική Riemann.

Πρόβλημα 4. Έστω G μια ομάδα Lie, δηλαδή

- G είναι μια C^∞ πολλαπλότητα
- Υπάρχει C^∞ απεικόνιση $\cdot : G \times G \rightarrow G$ ώστε $(G, \cdot)$ να είναι ομάδα με την απεικόνιση $a : G \rightarrow G$, $a(g) = g^{-1}$ να είναι C^∞ .

Έστω e το ουδέτερο στοιχείο της G . Για κάθε $g \in G$, ορίζουμε $L_g : G \rightarrow G$ την ομαλή απεικόνιση $L_g(g') = g \cdot g'$. Αφού δείξετε ότι η L_g είναι αμφιδιαφορική, να δείξετε ότι κάθε εσωτερικό γινόμενο στον $T_e G$ επεκτείνεται σε μετρική Riemann στην G ώστε για κάθε $g \in G$ η απεικόνιση να L_g είναι ισομετρία. Μια τέτοια μετρική Riemann στην G ονομάζεται *αριστερά αναλλοίωτη*.

Πρόβλημα 5. Έστω $G = \{f(t) = yt + x, (x, y) \in \mathbb{R}^2, y > 0\}$.

1. Να δείξετε ότι η G με πράξη τη σύνθεση συναρτήσεων, και εφοδιασμένη με κατάλληλη διαφορική δομή, γίνεται ομάδα Lie αμφιδιαφορική με το άνω ημιεπίπεδο $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y > 0\}$. Να εφοδιάσετε το H με κατάλληλη πράξη ώστε να γίνει ομάδα Lie ισομορφική με την G , και ουδέτερο στοιχείο $e = (1, 0)$.
2. Να επεκτείνετε το σύννηδες εσωτερικό γινόμενο στον $T_e H$ (δηλαδή εκείνο για το οποίο η βάση $\left\{ \frac{\partial}{\partial x}|_e, \frac{\partial}{\partial y}|_e \right\}$ είναι ορθοκανονική) σε μια αριστερά αναλλοίωτη μετρική Riemann στο H . Να δείξετε ότι η έκφραση αυτής της μετρικής Riemann ως προς τις συντατεγμένες $\{x, y\}$ είναι

$$\frac{1}{y^2}(dx \otimes dx + dy \otimes dy) = \frac{1}{y^2}g_{\mathbb{R}^2}. \quad (0.1)$$

Ο H με αυτή τη μετρική Riemann είναι απλά το μοντέλο του υπερβολικού χώρου στο άνω ημιεπίπεδο!

Πρόβλημα 6. Έστω (M, g) μια πολλαπλότητα Riemann και $Y \in \mathcal{X}(M)$ ένα C^∞ διανυσματικό πεδίο στην M . Έστω $(U, \varphi), (U, \psi)$ δυο C^∞ -χάρτες με συναρτήσεις συντεταγμένων $\{x^i\}_{i=1}^n$ και $\{y^a\}_{a=1}^n$ αντίστοιχα. Αν στο U

$$Y = Y^i \frac{\partial}{\partial x^i},$$

$$g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j,$$

να δείξετε ότι

1. $\frac{\partial}{\partial y^a} = \frac{\partial x^i}{\partial y^a} \frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y = Y^i \frac{\partial y^a}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^a}$ και $g = h_{ab} dy^a \otimes dy^b$, όπου $h_{ab} = g_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial y^a} \frac{\partial x^j}{\partial y^b}$.
2. Συμβολίζοντας με $\det(g)$ και $\det(h)$ τις ορίζουσες των πινάκων $(g_{ij})_{i,j=1}^n$ και $(h_{ab})_{a,b=1}^n$ αντίστοιχα, και γράφοντας $Y = \tilde{Y}^a \frac{\partial}{\partial y^a}$, να δείξετε ότι στο U

$$\frac{1}{\sqrt{\det(g)}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(Y^i \sqrt{\det(g)} \right) = \frac{1}{\sqrt{\det(h)}} \frac{\partial}{\partial y^a} \left(\tilde{Y}^a \sqrt{\det(h)} \right).$$

Να εξηγήσετε πώς η παραπάνω ισότητα μας επιτρέπει να ορίσουμε την απόκλιση $\operatorname{div} Y \in C^\infty(M)$ του Y ως τη συνάρτηση η οποία σε συντεταγμένες έχει την έκφραση

$$\operatorname{div} Y = \frac{1}{\sqrt{\det(g)}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(Y^i \sqrt{\det(g)} \right).$$

Υπόδειξη: Για να παραγωγίσετε την ορίζουσα θα είναι χρήσιμος ο τύπος του Jacobi: αν $A(t)$ είναι μια C^∞ μονοπαραμετρική οικογένεια τετραγωνικών πινάκων, τότε

$$\frac{d}{dt} \det(A(t)) = \det(A(t)) \operatorname{tr} \left(A(t)^{-1} \cdot \frac{d}{dt} A(t) \right),$$

όπου tr συμβολίζει το ίχνος ενός τετραγωνικού πίνακα.

Πρόβλημα 7. Έστω (M, g) μια συμπαγής πολλαπλότητα Riemann. Για κάθε $u \in C^\infty(M)$ ορίζεται ο τελεστής Laplace Δ ως $\Delta u = \operatorname{div}(\operatorname{grad}(u))$, όπου div είναι ο τελεστής που ορίστηκε στο Πρόβλημα 6. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα της απόκλισης, που για συμπαγείς πολλαπλότητες Riemann δίνει ότι για κάθε $f \in C^\infty(M)$ και $Y \in \mathcal{X}(M)$

$$\int_M f \operatorname{div} Y dV_g = - \int_M \langle \operatorname{grad}(f), Y \rangle dV_g, \quad (0.2)$$

να δείξετε ότι:

1. $\int_M \Delta u dV_g = 0$ και $\int_M u \Delta u dV_g = - \int_M |\text{grad}(u)|^2 dV_g$, για κάθε $u \in C^\infty(M)$, όπου $|\cdot|$ είναι η νόρμα που ορίζει η μετρική Riemann.
2. Αν $u \in C^\infty(M)$ είναι μια ιδιοσυνάρτηση του τελεστή Laplace, δηλαδή $\Delta u = \lambda u$ για κάποιο $\lambda \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι η ιδιοτιμή $\lambda \leq 0$. Να δείξετε επίσης ότι $\Delta u = 0$ αν και μόνο αν η u είναι σταθερή.
3. Να δείξετε ότι αν η απεικόνιση $D : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$

$$D(u) = \frac{1}{2} \int_M |\text{grad}(u)|^2 dV_g$$

παίρνει ελάχιστη τιμή στη συνάρτηση $v \in C^\infty(M)$, τότε $\Delta v = 0$.

Υπόδειξη: Αφού η D παίρνει την ελάχιστη τιμή της στην v , γνωρίζουμε ότι για κάθε $w \in C^\infty(M)$ τότε $\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} D(v + tw) = 0$ (Να εξηγήσετε γιατί η $t \rightarrow D(v + tw)$ είναι παραγωγίσιμη). Χρησιμοποιώντας αυτό, το αποτέλεσμα προκύπτει δείχνοντας επιπλέον - με το θεώρημα της απόκλισης - ότι

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} D(v + tw) = \int_M w \Delta v dV_g.$$