

Διαφορική Γεωμετρία 2
Πακέτο προβλημάτων 2
προθεσμία: 10/7/2025

Πρόβλημα 1. Έστω $M \subset \mathbb{R}^n$ μια εμφυτευμένη υποπολλαπλότητα και $g = \iota^* g_{\mathbb{R}^n}$ η επαγόμενη μετρική Riemann, όπου $\iota : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ η εμφύτευση $\iota(x) = x$. Έστω $\gamma : I \rightarrow M$ μια C^∞ καμπύλη και $V \in \mathcal{X}(\gamma)$ ένα διανυσματικό πεδίο κατά μήκος της γ . Αν η παράγωγος D_t ορίζεται ως προς τη Levi–Civita συνοχή ∇ της g και η $\tilde{D}_t$ ορίζεται από τη Levi–Civita συνοχή της $g_{\mathbb{R}^n}$, να δείξετε ότι $D_t V = 0$ αν και μόνο αν $\tilde{D}_t(\iota_* V)(t) \perp \iota_* T_{\gamma(t)} M$, για κάθε $t \in I$ ($\perp$ ορίζεται μέσω της $g_{\mathbb{R}^n}$).

Πρόβλημα 2. Έστω $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ η σφαίρα μοναδιαίας ακτίνας και $c : \mathbb{R} \rightarrow S^2$ ένας παράλληλος κύκλος, $|c'| = 1$. Έστω C ο κώνος στον $\mathbb{R}^3$ που εφάπτεται στην S^2 κατά μήκος του κύκλου c .

1. Να δείξετε ότι η παράλληλη μετατόπιση κατά μήκος του κύκλου c είναι η ίδια, είτε γίνεται πάνω στη σφαίρα είτε πάνω στον κώνο (και οι δυο επιφάνειες είναι εφοδιασμένες με τις αντίστοιχη επαγόμενη μετρική Riemann και συνοχή Levi–Civita)
2. Να υπολογίσετε την παράλληλη μετατόπιση κατά μήκος του c , ανάλογα με το γεωγραφικό πλάτος του c .

Πρόβλημα 3. Έστω $H^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y > 0\}$ και $g_{hyp} = \frac{1}{y^2}(dx \otimes dx + dy \otimes dy)$, η υπερβολική μετρική Riemann.

1. Να δείξετε ότι τα συμβολα Christoffel της Levi–Civita συνοχής είναι $\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{22}^1 = 0$ και $\Gamma_{11}^2 = \frac{1}{y} = -\Gamma_{12}^1 = -\Gamma_{22}^2$.
2. Έστω $v_0 = \frac{\partial}{\partial y} \Big|_{(0,1)} \in T_{(0,1)} H^2$ και $\gamma(t) = (t, 1)$. Να υπολογίσετε την παράλληλη μετατόπιση $V(t) = a(t) \frac{\partial}{\partial x} \Big|_{(t,1)} + b(t) \frac{\partial}{\partial y} \Big|_{(t,1)}$ του v_0 κατά μήκος της γ . Θα βοηθήσει να γράψετε $a(t) = \cos \theta(t)$, $b(t) = \sin \theta(t)$.
3. Να δείξετε ότι η (H^2, g_{hyp}) έχει σταθερή sectional καμπυλότητα -1 .

Πρόβλημα 4. Έστω (M, g) μια πολλαπλότητα Riemann, $p \in M$, και $W \subset M$ μια ομοιόμορφα κανονική περιοχή του p . Έστω $B_\varepsilon(p) \subset W$ γεωδαισιακή μπάλα, και $q_1, q_2 \in B_\varepsilon(p)$, $v \in T_{q_1} M$, $|v| = 1$, ώστε $\gamma(t) = \exp_{q_1}(tv)$, $t \in [0, d]$, η γεωδαισιακή με ελάχιστο μήκος d που ενώνει τα q_1, q_2 .

1. Αν $\{x^i\}_{i=1}^n$ είναι κανονικές συντεταγμένες γύρω από το p , να δείξετε ότι, αν το $\varepsilon > 0$ είναι αρκετά μικρό, η συνάρτηση $f(t) = (r(\gamma(t)))^2 = (d(p, \gamma(t)))^2$, όπου $r(x^1, \dots, x^n) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x^i)^2}$, ικανοποιεί $f''(t) > 0$.

2. Να χρησιμοποιήσετε το παραπάνω για να δείξετε ότι αν $\varepsilon > 0$ είναι μικρό, η γεωδαισιακή μπάλα $B_\varepsilon(p)$ είναι γεωδαισιακά κυρτή, δηλαδή κάθε ζεύγος σημείων της συνδέεται με ένα μοναδικό γεωδαισιακό τμήμα που ελαχιστοποιεί το μήκος και περιέχεται στην $B_\varepsilon(p)$.

Πρόβλημα 5. Έστω (M, g) μια πολλαπλότητα Riemann και $X \in \mathcal{X}(M)$ ένα C^∞ διανυσματικό πεδίο με ροή φ . Αν η φ_t είναι ισομετρία της (M, g) , όπου αυτή ορίζεται, λέμε ότι το X είναι ένα *πεδίο Killing*.

1. Ορίστε την παράγωγο Lie της g ως προς το X ως

$$\mathcal{L}_X g = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi_t^* g - g}{t}.$$

Να δείξετε ότι

$$\mathcal{L}_X g(V, W) = X(g(V, W)) - g([X, V], W) - g(V, [X, W]) = g(\nabla_V X, W) + g(\nabla_W X, V),$$

για κάθε $V, W \in \mathcal{X}(M)$.

2. Αν το X είναι πεδίο Killing, τότε $g(\nabla_V X, W) + g(\nabla_W X, V) = 0$ και επομένως ότι τανυστής ∇X , σαν $(0, 2)$ -τανυστής, είναι αντισυμμετρικός.
3. Έστω X ένα πεδίο Killing και $f = \frac{1}{2}|X|^2$. Να δείξετε ότι

$$\begin{aligned} \text{grad}(f) &= -\nabla_X X, \\ \text{Hess}f(V, V) &= \langle \nabla_V X, \nabla_V X \rangle - \text{Rm}(V, X, X, V), \\ \Delta f &= |\nabla X|^2 - \text{Ric}(X, X). \end{aligned}$$

για κάθε C^∞ διανυσματικό πεδίο V .

4. Αν η M είναι συμπαγής και $\text{Ric}(X, X) \leq 0$, να δείξετε ότι το X είναι παράλληλο, και ότι αν $\text{Ric} < 0$ αναγκαστικά $X = 0$. Επομένως, συμπαγείς πολλαπλότητες Riemann με αρνητική καμπυλότητα Ricci δεν έχουν μονοπαραμετρικές οικογενειες ισομετριών.
Υπόδειξη: ολοκληρώστε την τελευταία σχέση και χρησιμοποιήστε ότι $\int_M \Delta f dV_g = 0$.
Σημείωση: Η ομάδα ισομετριών είναι ομάδα Lie, τα πεδία Killing είναι η αντίστοιχη άλγεβρα Lie, η οποία όταν $\text{Ric} < 0$ έχει διάσταση 0.
5. Να δείξετε ότι το σύνολο των πεδίων Killing είναι άλγεβρα Lie (με $[\cdot, \cdot]$ τη συνηθισμένη αγκύλη Lie των διανυσματικών πεδίων). Με άλλα λόγια, αν X, Y είναι Killing, τότε το $[X, Y]$ είναι Killing.

Πρόβλημα 6. Έστω (M, g) μια πολλαπλότητα Riemann με μηδενική sectional καμπυλότητα, και έστω $B_\varepsilon(p)$ μια γεωδαισιακή μπάλα. Να δείξετε ότι η $\exp_p|_{B_\varepsilon(0)}$ είναι ισομετρία.