Διαφορική Γεωμετρία 2 ⇝ $\boxed{\text{Γεωμετρία Riemann.}}$

M^n διαφορική πολλαπλότητα διάστασης n $(\dim M = n)$

1) M τοπολογικός χώρος, Hausdorff, 2ος αριθμήσιμος → μας επιτρέπουν "διαμερίσεις της μονάδας"
2) Υπάρχουν $U_\alpha \subseteq M$, $\alpha \in A$, ανοιχτά (οικογένεια ανοιχτών $\subseteq M$)

με $M = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ και ομοιομορφισμοί $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \varphi_\alpha(U_\alpha) \subseteq \mathbb{R}^n$

ώστε $\forall\ \alpha, \beta \in A$, $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$.

$$\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \quad \text{αμφιδιαφόριση.}$$

Η οικογένεια $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ ονομάζεται ομαλός άτλαντας ή διαφορική δομή.

$(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ ⇝ χάρτες

- $(M, \mathcal{A})$ διαφορική πολ/τα
- Συνήθως γράφουμε ότι η M είναι διαφορική πολ/τα

(U,φ) $\quad \varphi : U \to \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ χάρτης. $\quad \varphi = (x^1, \dots, x^n)$. $\quad x^i = pr_i \circ \varphi$

$$pr_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad i\text{-προβολή} \quad pr_i(x^1, \dots, x^n) = x^i$$

x^i, $i = 1, \dots, n$ συναρτήσεις συντεταγμένων

Κάθε $\varphi : U \to \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ χάρτης με $\varphi \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U \cap U_\alpha) \to \varphi(U \cap U_\alpha)$ αμφιδιαφόριση, όποτε $U \cap U_\alpha \neq \emptyset$, ονομάζεται ομαλός (ή C^∞) χάρτης.

Μια συνεχής συνάρτηση $f : M \to \mathbb{R}$ ονομάζεται ομαλή (ή C^∞) αν για κάθε C^∞ χάρτη $\varphi : U \to \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ η σύνθεση

$$f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \mathbb{R} \quad \text{είναι} \quad C^\infty.$$

Συμβολίζουμε $C^\infty(M)$ το σύνολο των C^∞ συναρτήσεων της M

<u>Σημείωση</u>: Αν (U,φ), (V,ψ) C^∞ χάρτες με $U \cap V \neq \emptyset$ τότε $f \circ \varphi^{-1}|_{\varphi(U \cap V)}$ C^∞ $\Leftrightarrow$ $f \circ \psi^{-1}|_{\psi(U \cap V)}$ C^∞

$\forall$ $p \in M$ ορίζεται ένας $\mathbb{R}$-δ. χώρος T_pM, διάστασης n

T_pM : εφαπτόμενος χώρος της M στο p.

$$T_pM = \{ X : C^\infty(M) \to \mathbb{R} \ , \ X \text{ παραγώγιση στο } p \}$$

$X : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ παραγώγιση στο p αν
1) Γραμμική
2) Ικανοποιεί Leibniz στο p
$\forall\, f, g \in C^\infty(M)$, $X(fg) = f(p)X(g) + g(p)X(f)$

Αν (U, φ) C^∞ χάρτης, $p \in U$ ορίζονται $\left.\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right|_p \in T_pM$
$\varphi = (x^1, \dots, x^n)$

ως $$\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p (f) = \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i} (\varphi(p))$$

$\rightsquigarrow \left\{ \left.\dfrac{\partial}{\partial x^1}\right|_p, \dots, \left.\dfrac{\partial}{\partial x^n}\right|_p \right\}$ βάση του T_pM.

$\Rightarrow \forall \quad v \in T_pM \quad v = \sum_{i=1}^{n} v^i \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p \quad \left(= v^i \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p \right.$ Σύμβαση Einstein)

<u>Εφαπτόμενη δέσμη:</u> $\quad TM = \bigsqcup_{p \in M} T_pM$

προβολή $\quad \pi : TM \to M \quad , \pi(v) = p \iff v \in T_pM$

<u>TM διαφορική πολ/τα διάστασης $2n$</u> : π συνεχής

· Αν (U, φ) C^∞ χάρτης, $\pi^{-1}(U) \subseteq TM$ ανοιχτό και

$$\Phi : \pi^{-1}(U) \to \varphi(U) \times \mathbb{R}^n$$

$$\Phi\left(v^i \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p \right) = \big(\underbrace{x^1(p), \dots, x^n(p)}_{\varphi = (x^1, \dots, x^n)}, v^1, \dots, v^n \big)$$

$(\pi^{-1}(U), \Phi)$ C^∞ χάρτης της TM.

Διανυσματικά πεδία : $V : M \to TM$ C^∞ απεικόνιση (*)

με την ιδιότητα $V(p) \in T_pM \quad \forall \ p \in M$
$= V_p$

ονομάζεται C^∞-διανυσματικό πεδίο στην M

(*) Γενικά αν $F : M \to N$ συνεχής, ονομάζεται C^∞ αν για κάθε $p \in M$ $\exists$ (U, φ) C^∞ χάρτης της M και (V, ψ) C^∞ χάρτης της N ώστε $F(U) \subseteq V$ και η $\psi \circ F \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V)$ είναι C^∞

Το σύνολο των C^∞ διανυσματικών πεδίων συμβολίζεται με $\mathcal{X}(M)$

$V \in \mathcal{X}(M)$ επάγει $V : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$. $V(f)_p = V_p(f)$ παραγώγιση στην M

Δηλαδή:
- V γραμμική
- $V(fg) = f\,V(g) + g\,V(f)$ (Leibniz)

[$V : M \to TM$, $V(p) \in T_pM$ είναι C^∞ δ. πεδίο αν και μόνο αν για κάθε $f \in C^\infty(M)$, $V(f) \in C^\infty(M)$]

Μετρική Riemann : Έστω M μια διαφορική πολλ/τα διάστασης n.

Έστω ότι για κάθε $p \in M$ υπάρχει $g_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ εσωτερικό γινομ.

Δηλαδή : 1) g_p διγραμμική
2) g_p συμμετρική : $g_p(v,w) = g_p(w,v) \quad \forall \; v,w \in T_pM$
3) g_p θετικά ορισμένη : $g_p(v,v) \geq 0$ και $=0 \Leftrightarrow v=0$.

Επιπλέον ζητάμε η g να είναι C^∞ με την ακόλουθη έννοια

$\forall \; V,W \in \mathcal{X}(M)$ η συνάρτηση $g(V,W) : M \to \mathbb{R}$ είναι C^∞
$$p \longmapsto g_p(V_p, W_p)$$

Το ζεύγος (M,g) ονομάζεται πολλαπλότητα Riemann.

Μια μετρική Riemann είναι η γενίκευση της $1^{\text{ης}}$ θεμ. μορφής στη θεωρία των επιφανειών του $\mathbb{R}^3$.

Έστω (M,g) μια πολλ/τα Riemann

1) Αν $p\in M$ και $V\in T_pM$ τότε ορίζουμε το μήκος $|V|_g$ του V ως

$$|V| = \sqrt{g_p(V,V)}.$$

2) Έστω $\gamma:[a,b]\to M$ μια C^∞ καμπύλη. Ορίζεται το μήκος $\ell(\gamma)$ της γ ως $\ell(\gamma)=\int_a^b |\gamma'(t)|\,dt$

3) (M,g) δίχεται δομή μετρικού χώρου. (M,d_g)

Έστω $p,q\in M$. $d_g: M\times M\to\mathbb{R}$

$$d_g(p,q)=\inf\{\ell(\gamma) \mid \gamma:[0,1]\to M \ C^\infty,\ \gamma(0)=p,\ \gamma(1)=q\}$$

4) Ορίζεται η έννοια της κατευθυνόμενης παραγώγου ενός διαν. πεδίου

$X \in \mathcal{X}(M)$, $p \in M$ και $Y \in T_pM$: $\nabla_Y X \in T_pM$.

Θα χρειαστεί η έννοια της συνοχής ∇ στην TM.
Κάθε μετρική Riemann ορίζει μια μοναδική συνοχή ∇ στην TM που ονομάζεται συνοχή Levi-Civita

5) Η συνοχή ∇ θα οδηγήσει στον ορισμό της καμπυλότητας Riemann
- να γενικεύει την καμπυλότητα Gauss των επιφανειών.
- να παίζει τον ρόλο της "δεύτερης παραγώγου" μιας μετρικής Riemann

6) Θα εξερευνήσουμε την σχέση

Καμπυλότητα της g $\leftrightarrow$ Τοπολογία της M

Τανυστές

Έστω V $\mathbb{R}$-δ. χώρος διάστασης n και V^* ο δυϊκός του V:

$$V^* = \{\omega : V \to \mathbb{R} \text{ γραμμική}\}.$$

- **Δυϊκή βάση**: Αν $\{v_1, \dots, v_n\}$ είναι μια βάση του V ορίζεται η δυϊκή της βάση $\{v^1, \dots, v^n\}$ του V^* ως $v^i(v_j) = \delta_{ij}$.

όπου

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Τότε αν $X = \xi^i v_i \iff \xi^i = v^i(X)$

[Αφού $v^i(X) = v^i(\xi^j v_j) = \xi^j v^i(v_j) = \xi^j \delta_{ij} = \xi^i$]

- Έστω $\langle , \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ ένα εσωτερικό γινόμενο στον V.

Αν $X = \xi^i v_i$, $Y = \eta^j v_j$ τότε από τις ιδιότητες του εσωτερικού γιν.

$$\left.\langle X, Y \rangle = \langle \xi^i v_i, \eta^j v_j \rangle = \xi^i \eta^j \langle v_i, v_j \rangle \right\} \Rightarrow \langle X, Y \rangle = \xi^i \eta^j g_{ij}$$

Ορίζονται $g_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle$, $i,j = 1, \dots, n$

$$= g_{ij} \underline{v^i(X) \cdot v^j(Y)}$$

<u>Τανυστές τάξης k</u>. $T^k(V)$: $T: \overbrace{V \times \cdots \times V}^{k} \to \mathbb{R}$ πολυγραμμική (γραμμική σε κάθε παράγοντα)

Χρησιμοποιώντας τη βάση $\{v_1, \ldots, v_n\}$ του V: $w_1, \ldots, w_k \in V$ εκφράζονται ως $w_i = w_i^j v_j$. Επομένως

$$T(w_1, \ldots, w_n) = w_1^{j_1} w_2^{j_2} \cdots w_k^{j_k} T(v_{j_1}, v_{j_2}, \ldots, v_{j_k})$$

Ορίζοντας $T_{j_1 j_2 \cdots j_k} = T(v_{j_1}, \ldots, v_{j_k})$ και παρατηρώντας ότι

$w_\ell^{j_\ell} = v^{j_\ell}(w_\ell)$ γράφουμε

$$T(w_1, \ldots, w_\ell) = T_{j_1 \cdots j_k} \cdot \underbrace{v^{j_1}(w_1) \cdots v^{j_k}(w_k)}$$

<u>Σημείωση</u>: $T^1(V) = V^*$

<u>Απλοί τανυστές τάξης k</u>. Έστω $\omega_1, \dots, \omega_k \in V^*$. Ορίζουμε

το τανυστικό γινόμενο $\omega_1 \otimes \cdots \otimes \omega_k \in T^k(V)$ ως

$$\omega_1 \otimes \cdots \otimes \omega_k (V_1, \dots, V_k) = \omega_1(V_1) \cdot \omega_2(V_2) \cdots \omega_k(V_k)$$

Με αυτό το συμβολισμό τα προηγούμενα γίνονται

$$T(W_1, \dots, W_n) = T_{j_1 \dots j_n} (v^{j_1} \otimes \cdots \otimes v^{j_n})(W_1, \dots, W_k)$$

$$g(X, Y) = \langle X, Y \rangle = g_{ij} (v^i \otimes v^j)(X, Y)$$

Δηλαδή κάθε τανυστής τάξης k γράφεται ως

$$T = T_{j_1 \dots j_k} v^{j_1} \otimes \cdots \otimes v^{j_k}$$

$\{ v^{j_1} \otimes \cdots \otimes v^{j_n}, \ j_1, \dots, j_n = 1, \dots, n \}$ είναι βάση του $T^k(V)$ $\Rightarrow \dim T^k(V) = n^k$.

Αντίστοιχα $g = g_{ij} v^i \otimes v^j$

Δέσμες τανυστών

Έστω M μια διαφορική πολλαπλότητα. Ορίζουμε

$$\mathcal{T}^k(M) = \bigsqcup_{p\in M} T^k(T_pM).$$ ⇝ δέχεται δομή διανυσματικής δέσμης

$T : M \to \mathcal{T}^k(M)$ με $T_p \in T^k(T_pM)$ ονομάζεται C^∞ τανυστής τάξης k

αν για κάθε $V_1, \dots, V_k \in \mathfrak{X}(M)$, $p \longmapsto T_p\left(V_1|_p, \dots, V_k|_p\right)$ είναι C^∞ συνάρτηση

Γράφουμε και $\mathcal{T}^k(M) = T^*M \otimes \cdots \otimes T^*M$ ⇝ $\mathcal{T}^1(M)$ είναι οι 1-μορφές στην M.

Τοπικά, αν (U, φ) C^∞ χάρτης της M, $p \in U$

$\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1}\Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}\Big|_p \right\}$ βάση του T_pM

Η δυϊκή βάση του T_p^*M είναι η $\left\{ dx^1|_p, \dots, dx^n|_p \right\}$

$$dx^i|_p\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_p\right) = \delta_{ij}$$

$$dx^i|_p(V_p) = V_p(x^i)$$

dx^i: το διαφορικό της x^i

Εφαρμόζοντας τα προηγούμενα, αν T είναι ένας τανυστής τάξης k της M και (U,φ) C^∞ χάρτης, $\varphi = (x^1, \ldots, x^n)$, γράφουμε

$$T = T_{\nu_1 \cdots \nu_k} \, dx^{\nu_1} \otimes \cdots \otimes dx^{\nu_k} \quad \text{στο } U$$

όπου $T_{\nu_1 \cdots \nu_k} = T\left(\partial/\partial x^{\nu_1}, \ldots, \partial/\partial x^{\nu_k} \right)$ C^∞ συναρτήσεις στο U.

Συγκεκριμένα, αν g είναι μια μετρική Riemann τότε στο U, $g = g_{ij} \, dx^i \otimes dx^j$, $g_{ij} : U \to \mathbb{R}$ C^∞

$\forall p \in U$ $(g_{ij}(p))$ είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος πίνακας
(άρα και αντιστρέψιμος)

[Αφού $g_{ij} \xi^i \xi^j = g(X,X) \geq 0$ και $=0 \iff X = 0$
$X = \xi^i \partial/\partial x^i$]

<u>Γραμμικός ισομορφισμός μεταξύ V και V^*</u>, επαγόμενος από εσ. γινόμενο

Έστω $(V, \langle , \rangle)$ $\mathbb{R}$-δ. χώρος με εσωτερικό γινόμενο, $\dim V = n$

$\langle , \rangle$ ορίζει έναν φυσικό ισομορφισμό ανάμεσα στον V και τον V^*

$$L : V \to V^* \qquad [L(X)](Y) = \langle X, Y \rangle$$

$X \in \ker L \iff \langle X, Y \rangle = 0 \quad \forall \; Y \in V \iff X = 0 \rightsquigarrow$ [αφού $\dim V = \dim V^* = n$ $\Rightarrow L$ γρ. ισομ.

Έκφραση ως προς τις βάσεις $\{v_1, \ldots, v_n\}$, $\{v^1, \ldots, v^n\}$ του V και V^* αντίστοιχα

$$[L(\xi^i v_i)](\eta^j v_j) = \langle \xi^i v_i, \eta^j v_j \rangle = \xi^i \eta^j g_{ij} \Rightarrow \boxed{L(\xi^i v_i) = \xi^i g_{ij} v^j}$$

Αντίστροφα, έστω $L(\xi^i v_i) = \alpha \in V^*$. Αν $\alpha = \alpha_j v^j$ τότε $\xi^i g_{ij} v^j = \alpha_j v^j$

$\Rightarrow \xi^i g_{ij} = \alpha_j$, για κάθε $j = 1, \ldots, n$.

Συμβολίζοντας (g^{ij}) τον αντίστροφο πίνακα του (g_{ij}) έχουμε $g_{ij}\, g^{jk} = \delta_i^k$. Επομένως

$$\xi^i g_{ij} = \alpha_j \iff \xi^i g_{ij}\, g^{jk} = \alpha_j\, g^{jk} \quad \forall\ k=1,\dots,n.$$

$$\iff \xi^i \delta_i^k = \alpha_j\, g^{jk} \iff \xi^k = \alpha_j\, g^{jk}$$

δείκτης πάνω

Επομένως $$\boxed{L^{-1}(\alpha_j v^j) = \alpha_j\, g^{jk} v_k \in V.}$$

δείκτης κάτω

Άρα
$$\left.\begin{aligned} X \in V &\longrightarrow L(X) = X_\flat \in V^* \\ \alpha \in V^* &\longrightarrow L^{-1}(\alpha) = \alpha^\sharp \end{aligned}\right\} \text{"μουσικοί ισομορφισμοί"}$$

Επέκταση εσωτερικού γινομένου στις δέσμες $T^k(V)$ Τανυστών

Έστω $(V, \langle , \rangle)$ $\mathbb{R}$-δ.χ. με εσωτ. γιν. Ορίζουμε $(V^*, \langle , \rangle)$

απαιτώντας $L : (V, \langle , \rangle) \to (V^*, \langle , \rangle)$ να είναι ισομετρία

δηλαδή $\forall \; \omega_1, \omega_2 \in V^*$ $\quad \langle \omega_1, \omega_2 \rangle = \langle \omega_1^\#, \omega_2^\# \rangle$

Ως προς τη δυϊκή βάση $\{v^1, \dots, v^n\}$ του V^*

$$v^i = \delta^i_j v^j \Rightarrow L^{-1}(v^i) = \delta^i_j g^{jm} v_m = g^{im} v_m$$

Επομένως $\langle v^i, v^j \rangle = \langle L^{-1}(v^i), L^{-1}(v^j) \rangle = \langle g^{im} v_m, g^{jl} v_l \rangle$

$$= g^{im} g^{jl} \langle v_m, v_l \rangle = g^{im} \underbrace{g^{jl} g_{ml}}_{\delta^j_m} = g^{im} \delta^j_m = g^{ij}$$

$\Rightarrow$ Ο αντίστροφος πίνακας g^{ij} ορίζει εσωτερικό γινόμενο στον V^*!!

Αντίστοιχα, αν $T = T_{j_1 \cdots j_k} v^{j_1} \otimes \cdots \otimes v^{j_k}$, $S = S_{m_1 \cdots m_k} v^{m_1} \otimes \cdots \otimes v^{m_k}$

ορίζουμε $\langle T, S \rangle = T_{j_1 \cdots j_k} S_{m_1 \cdots m_k} \langle v^{j_1} \otimes \cdots \otimes v^{j_k}, v^{m_1} \otimes \cdots \otimes v^{m_k} \rangle$

όπου $\langle v^{j_1} \otimes \cdots \otimes v^{j_k}, v^{m_1} \otimes \cdots \otimes v^{m_k} \rangle = \langle v^{j_1}, v^{m_1} \rangle \cdots \langle v^{j_k}, v^{m_k} \rangle$

$$= g^{j_1 m_1} \cdots g^{j_k m_k}$$

$$\rightsquigarrow \boxed{\langle T, S \rangle = T_{j_1 \cdots j_k} S_{m_1 \cdots m_k} g^{j_1 m_1} \cdots g^{j_k m_k}} \quad (*)$$

Ορισμός του εσωτερικού γινομένου στον $T^k(V)$ - ανεξάρτητος της βάσης

Έστω $w_1 \otimes \cdots \otimes w_k$, $\eta_1 \otimes \cdots \otimes \eta_k \in T^k(V)$ δύο απλοί k-τανυστές

Ορίζουμε: $\langle w_1 \otimes \cdots \otimes w_k, \eta_1 \otimes \cdots \otimes \eta_k \rangle = \langle w_1, \eta_1 \rangle \cdots \langle w_k, \eta_k \rangle$

και επεκτείνουμε γραμμικά σε όλο το $T^k(V)$. $\Big\} \rightarrow$ Να δείξετε ότι ο ορισμός αυτός είναι ισοδύναμος με τον $(*)$

Έστω (M,g) μια πολλαπλότητα Riemann, $\dim M = n$, $\left(\begin{array}{l} g(\cdot,\cdot) = \langle \cdot,\cdot \rangle \\ g_p(\cdot,\cdot) = \langle \cdot,\cdot \rangle_p \end{array} \right.$

1) $\forall$ $X \in \mathcal{X}(M)$ υπάρχει μοναδική 1-μορφή $X_\flat$ ώστε

$$X_\flat(V) = \langle X, V \rangle \quad , \text{ για κάθε } V \in \mathcal{X}(M)$$

2) $\forall$ 1-μορφή ω στην M υπάρχει μοναδικό $\omega^\# \in \mathcal{X}(M)$ ώστε

$$\omega(V) = \langle \omega^\#, V \rangle \quad \text{για κάθε } V \in \mathcal{X}(M)$$

<u>Απόδειξη</u>. Για κάθε $p \in M$, έστω $L_p : T_pM \to T_p^*M$ ο γραμμικός ισομορφισμός με $[L_p(X)](V) = \langle X, V \rangle_p$ $\forall$ $X, V \in T_pM$.

$\forall$ $p \in M$, $V \in T_pM$, ορίζουμε $(X_\flat)_p = L(X_p) \in T_p^*M$ C^∞ συναρτήσεις $\to X_\flat, \omega^\#$ C^∞

και $(\omega^\#)_p = L_p^{-1}(\omega_p) \in T_pM$

Αν (U,φ) C^∞ χάρτης, από τα προηγούμενα προκύπτει

$\varphi = (x^1, \dots, x^n)$ $\quad X = \xi^i \partial/\partial x^i \quad \omega = \eta_i dx^i$

$$X_\flat|_p = \boxed{g_{ij}(p) \cdot \xi^j(p)}\, dx^i|_p$$

$$\omega^\#|_p = \boxed{g^{ij}(p) \eta_j(p)}\, \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p$$

(3) Η T^*M γίνεται δέσμη με C^∞ εσωτερικό γινόμενο, δηλαδή $\forall\ p\in M$ $(T_p^*M, \langle , \rangle_p)$ χώρος με εσ. γινόμενο, όπου

$$\langle \omega_1|_p, \omega_2|_p \rangle = \langle \omega_1^\#|_p, \omega_2^\#|_p \rangle \quad \forall\ p\in M \text{ και } \forall\ \omega_1, \omega_2 \text{ 1-μορφές}$$

και η $p \longmapsto \langle \omega_1|_p, \omega_2|_p \rangle$ είναι C^∞.

(4) Η $T^k(M)$ γίνεται δέσμη με C^∞-εσωτερικό γινόμενο $\langle , \rangle$ τέτοιο ώστε

$$\langle \omega_1|_p \otimes \cdots \otimes \omega_k|_p, \eta_1|_p \otimes \cdots \otimes \eta_k|_p \rangle = \langle \omega_1|_p, \eta_1|_p \rangle \cdots \langle \omega_k|_p, \eta_k|_p \rangle$$

και σε σύστημα συντεταγμένων (U,φ) $g = g_{ij}\, dx^i \otimes dx^j$

και $\langle T, S \rangle(p) = \langle T|_p, S|_p \rangle_p = g^{i_1 j_1}(p)\, g^{i_2 j_2}(p) \cdots g^{i_k j_k}(p)\, T_{i_1 \cdots i_k}(p) \cdot S_{j_1 \cdots j_k}(p)$

όπου $T = T_{i_1 \cdots i_k} dx^{i_1} \otimes \cdots \otimes dx^{i_k}$, $S = S_{j_1 \cdots j_k} dx^{j_1} \otimes \cdots \otimes dx^{j_k}$ στο U

με $T_{i_1 \cdots i_k}$, $S_{j_1 \cdots j_k}$ C^∞ συναρτήσεις στο U.