<u>Παράδειγμα</u> : Έστω $\mathbb{R}^n$ η διαφ. πολλ/τα με τη συνηθισμένη διαφορική δομή. Ο $\mathbb{R}^n$ έχει έναν ολικό χάρτη

$$(\mathbb{R}^n, \varphi) \qquad \varphi(x^1, \dots, x^n) = (x^1, \dots, x^n)$$

Η συνηθισμένη μετρική Riemann του $\mathbb{R}^n$, $g_{\mathbb{R}^n}$ είναι η μετρική με αναπαράσταση σε αυτό το χάρτη την

$$g_{\mathbb{R}^n} = \delta_{ij}\, dx^i \otimes dx^j$$

Ισοδύναμα αν $X = \xi^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$, $\eta^j \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p \in T_p\mathbb{R}^n$, για κάποιο $p \in \mathbb{R}^n$, τότε

$$g_{\mathbb{R}^n}(X, Y) = \delta_{ij}\, dx^i \otimes dx^j (X, Y) = \delta_{ij}\, \xi^i \eta^j = \sum_{i=1}^{n} \xi^i \eta^i .$$

Πρόταση: Κάθε διαφορική πολ/ρα δέχεται τουλάχιστον μια μετρική Riemann.

Ιδέα: Αν (U,φ) C^∞ χάρτης της M τότε στο U ορίζεται η μετρική Riemann $g_U = \delta_{ij}\, dx^i \otimes dx^j$ $\quad (\varphi = (x^1, \dots, x^n))$

Καλύπτουμε την M με C^∞-χάρτες $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ $\alpha \in A$ και θα προσπαθήσουμε να "ενώσουμε" τις μετρικές Riemann g_{U_α} σε μια μετρική Riemann g της M.

Για να κάνουμε αυτή την ένωση θα χρειαστούμε μια "διαμέριση της μονάδας".

Έστω M μια διαφορική πολλ/τα και $U_\alpha \subseteq M$, $\alpha \in A$ ανοιχτά ώστε $M = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ ($\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ ανοιχτό κάλυμμα της M)

Διαμέριση της μονάδας συμβατή με το κάλυμμα $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$

είναι μια συλλογή $\{\psi_\alpha\}_{\alpha \in A}$ από C^∞ συναρτήσεις $\psi_\alpha : M \to \mathbb{R}$ ώστε

(1) $0 \leq \psi_\alpha(x) \leq 1 \quad \forall \; x \in M$

(2) $supp(\psi_\alpha) = \overline{\{x \in M, \; \psi_\alpha(x) \neq 0\}} \subseteq U_\alpha \quad , \forall \; \alpha \in A$

(3) $\{supp(\psi_\alpha), \alpha \in A\}$ είναι μια τοπικά πεπερασμένη οικογένεια συνόλων

(δλδ. $\forall \; x \in M \; \exists \; V \subseteq M$ ανοιχτό, $x \in V$ ώστε $V \cap U_\alpha \neq \emptyset$ για πεπερασμένα στο πλήθος $\alpha \in A$)

(4) $\sum_{\alpha \in A} \psi_\alpha(x) = 1 \quad \forall \; x \in M$

Πρόταση: Για κάθε ανοιχτό κάλυμμα $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ μιας διαφορικής πολλ/τας M υπάρχει μια διαμέριση της μονάδας $\{\psi_\alpha\}_{\alpha \in A}$, συμβατή με το $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$

Απόδ: Lee: Intro to smooth manifolds

Ας αποδείξουμε τώρα ότι κάθε διαφορική πολλ/τα δέχεται μετρική Riemann.

Έστω $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ C^∞ χάρτες ώστε $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ ανοιχτό κάλ. της M

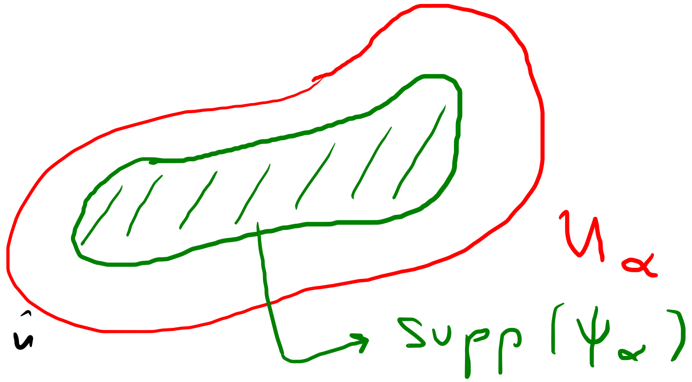
και g_{U_α} οι μετρικές Riemann με $(g_{U_\alpha})_{ij} = \delta_{ij}$ ως προς

κάθε χάρτη $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$. Έστω $\psi_\alpha : M \to \mathbb{R}$ διαμ. της μονάδας

συμβατή με το $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$. Ορίζουμε $g_x = \sum_{\alpha \in A} \psi_\alpha(x)\, g_{U_\alpha}\big|_x$

• $\psi_\alpha \in C^\infty(M)$ και g_{U_α} είναι C^∞ μετρική Riemann στο U_α

ενώ $supp(\psi_\alpha) \subset U_\alpha \to$ ανοιχτό
Lindelöf



$\rightsquigarrow$ κάθε $\psi_\alpha g_{U_\alpha}$ ορίζει C^∞ 2-τανυστή στην M.

• $\forall\ p \in M$ $\quad g_p = \sum_{\alpha \in A} \psi_\alpha(p)\, g_{U_\alpha}\big|_p$ είναι εσ. γινόμενο στο T_pM

(a) διγραμμικό και συμμετρικό άμεσα

(b) <u>θετικά ορισμένο</u> : Έστω $v \in T_pM$

$$g_p(v,v) = \sum_{\alpha \in A} \underbrace{\psi_\alpha(p)}_{\geq 0}\ \underbrace{g_{U_\alpha}\big|_p(v,v)}_{\geq 0} \geq 0$$

. Αν $g_p(v,v) = 0$, τότε $\sum_{\alpha \in A} \psi_\alpha(p) (g_{U_\alpha})_p (v,v) = 0$

$\Rightarrow \psi_\alpha(p)(g_{U_\alpha})_p(v,v) = 0 \quad \forall\ \alpha \in A$

Όμως, αφού $\sum_{\alpha\in A} \psi_\alpha(p) = 1 \Rightarrow \exists\ \beta\in A$ ώστε $\psi_\beta(p) > 0$

Επομένως $p \in \operatorname{supp}(\psi_\beta) \subseteq U_\beta$

Τότε $\psi_\beta(p)(g_{U_\beta})_p(v,v) = 0 \Rightarrow (g_{U_\beta})_p(v,v) = 0$

$\Rightarrow v = 0$ αφού το $(g_{U_\beta})_p$ είναι εσ. γινόμενο

<u>Σημείωση</u>: Μια διαφ. πολλ/τα δέχεται άπειρες μετρικές Riemann. Για παράδειγμα, αν (M,g) πολλ/τα Riemann, τότε και η $g_a = a g$ είναι μετρική Riemann της M, αν $a>0$.

Γενικότερα, αν $f \in C^\infty(M)$, $f(x) > 0 \ \forall x \in M$, $\tilde{g} = f \cdot g$ είναι επίσης μετρική Riemann (Λέμε $\tilde{g}$ είναι σύμμορφη της g)

Pull-back τανυστών

Έστω $F : M \to N$ μια C^∞ απεικόνιση μεταξύ δύο διαφορικών πολλαπλοτήτων και έστω T ένας k-τανυστής στην N.

Ορίζουμε τον k-τανυστή F^*T στην M ως εξής:

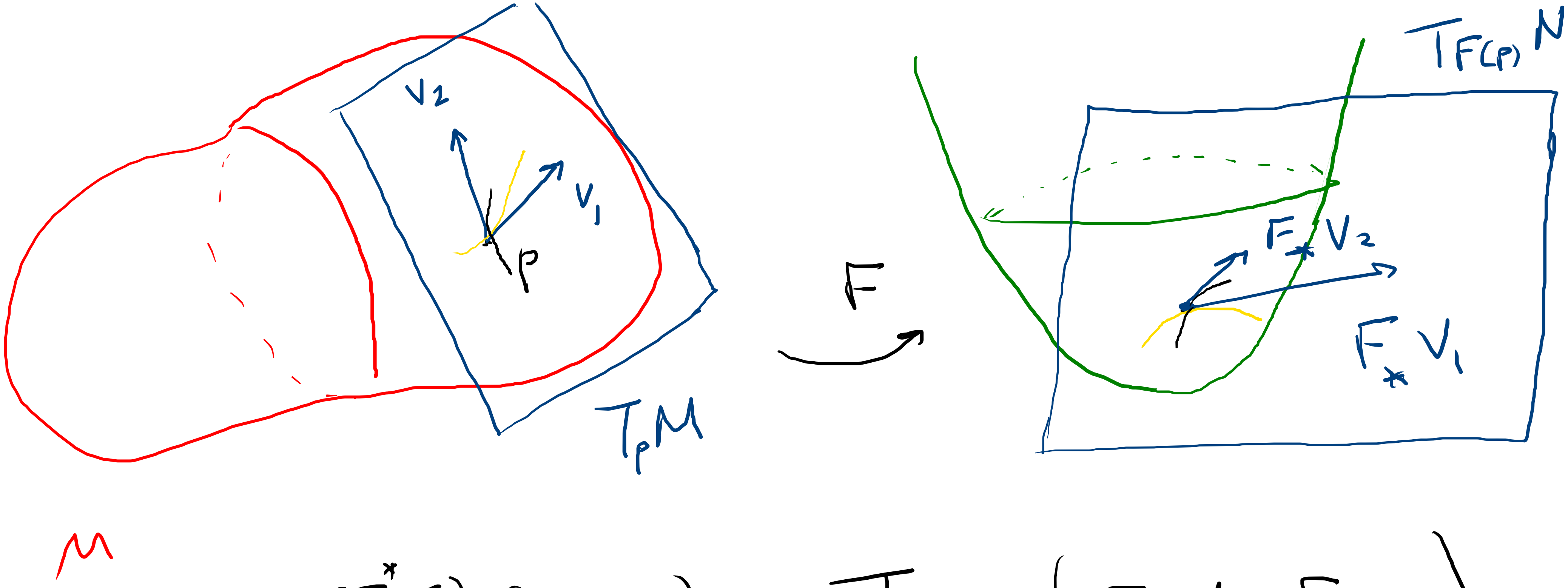
$\forall \; p \in M$ και $V_1, \dots, V_k \in T_pM$

$$(F^*T)_p (V_1, \dots, V_k) = T_{F(p)} (F_* V_1, \dots, F_* V_k)$$

όπου $F_* : T_pM \to T_{F(p)} N$ είναι η απεικόνιση push-forward: $(F_* V)(f) = V(f \circ F)$ για κάθε $V \in T_pM$ και $f \in C^\infty(N)$

Υπενθύμιση: F_* γραμμική απεικόνιση

Ερώτηση: Γιατί ο F^*T είναι C^∞;



$$(F^*T)_p(v_1, v_2) = T_{F(p)}\left(F_*v_1, F_*v_2\right)$$

Pull-back μετρική Riemann

Έστω $F: M \to N$ C^∞ και g μετρική Riemann στην N. Αν η F είναι immersion, δηλαδή $\forall p \in M$

$F_*: T_pM \to T_{F(p)}N$ είναι 1-1, τότε ορίζεται

η pull-back μετρική F^*g στην M.

Παρατήρηση: Αφού $F_*: T_pM \to T_{F(p)}N$ είναι 1-1 $\forall p \in M$

$F_*(T_pM)$ είναι γραμμικός υπόχωρος του $T_{F(p)}N$

ισόμορφος με τον T_pM - μάλιστα $F_*: T_pM \to F_*(T_pM)$

είναι γρ. ισομορφισμός. Επιπλέον

$F_*: (T_pM, (F^*g)_p) \longrightarrow (F_*(T_pM), g|_{F_*(T_pM)})$ είναι γραμμική ισομετρία

Ισομετρίες μεταξύ πολλαπλοτήτων Riemann

<u>Ορισμός</u>: (1) Έστω $(M,\tilde{g})$, (N,g) δύο πολλαπλότητες Riemann, και $F: M \to N$ μια αμφιδιαφόριση τέτοια ώστε $\tilde{g} = F^{*}g$. Λέμε ότι η F είναι μια ισομετρία μεταξύ των $(M,\tilde{g})$, (N,g).

(2) Δύο πολλαπλότητες Riemann λέγονται ισομετρικές αν υπάρχει μια ισομετρία $F: (M,\tilde{g}) \to (N,g)$

(3) Μια C^{∞} απεικόνιση $F: M \to N$ ονομάζεται τοπική ισομετρία αν για κάθε $p \in M$ υπάρχει $U \subseteq M$ ανοιχτό, $p \in U$ ώστε $F|_U : U \to F(U)$ να είναι ισομετρία ανάμεσα στις (ανοιχτές) υποπολλαπλότητες $(U, \tilde{g}|_U)$ και $(F(U), g|_{F(U)})$.

(4) Μια πολ/τα Riemann (M,g) λέγεται επίπεδη αν υπάρχει τοπική ισομετρία $F: (\mathbb{R}^n, g_{\mathbb{R}^n}) \to (M,g)$.

<u>Σημείωση</u>: Δύο ισομετρικές πολ/τες Riemann θα θεωρούνται γεωμετρικά ισοδύναμες

Παραδείγματα

A) Έστω $F: M^m \to \mathbb{R}^n$ immersion. Τότε ορίζεται η μετρική Riemann $g = F^* g_{\mathbb{R}^n}$ στην M.

Παράδειγμα 1 $S^n = \{ (x^1, \ldots, x^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid (x^1)^2 + \cdots + (x^{n+1})^2 = 1 \} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$

S^n διαφορική πολ/τα διάστασης n - σφαίρα ακτίνας 1.

Η $i: S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$, $(x^1, \ldots, x^{n+1}) \mapsto (x^1, \ldots, x^{n+1})$ είναι C^∞, 1-1, immersion και ομοιομορφισμός μεταξύ S^n και $i(S^n)$.

Ορίζουμε $g_{S^n} = i^* g_{\mathbb{R}^{n+1}}$: η συνηθισμένη μετρική στην S^n.

Γενικότερα, κάθε εμφυτευμένη υποπολλαπλότητα του $(\mathbb{R}^n, g_{\mathbb{R}^n})$ ή οποιασδήποτε πολλ/τας Riemann (M,g) δέχεται μια επαγόμενη μετρική Riemann.

$S^m \subseteq M^n$ εμφυτευμένη υποπολλ/τα διάστασης $m<n$: Ισχύουν τα εξής

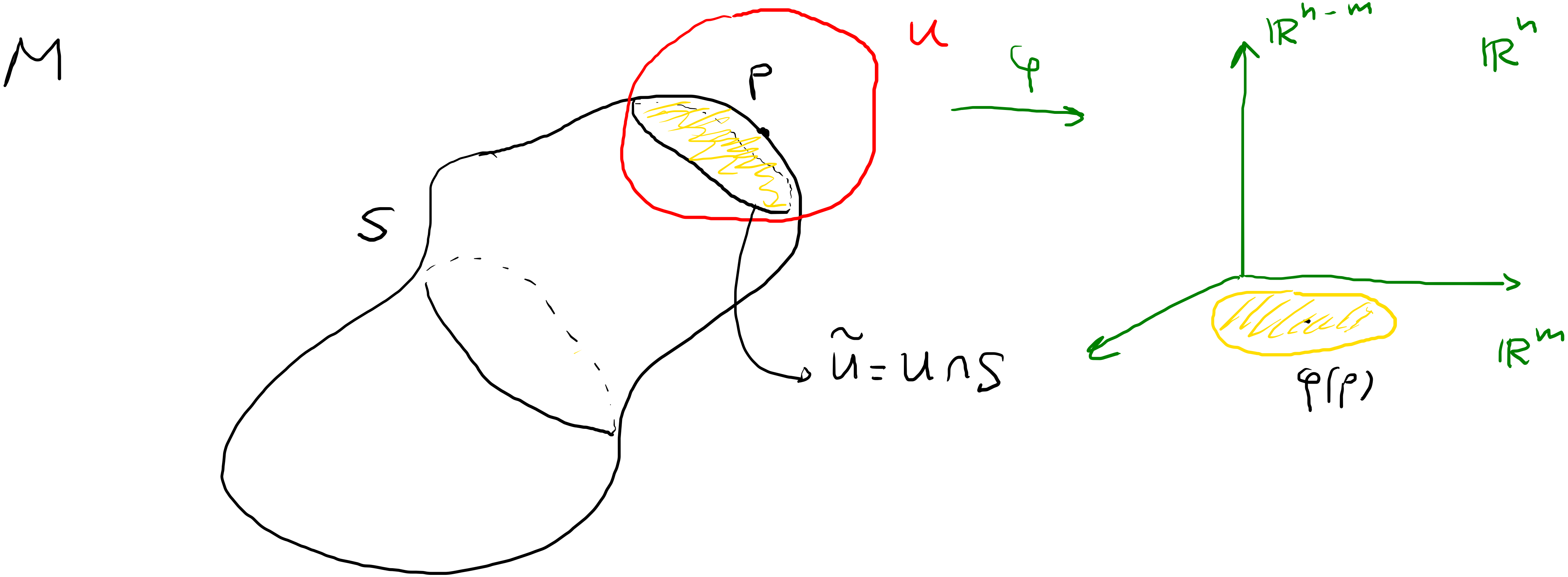
1) S δέχεται διαφορική δομή ώστε η $i : S \to M$ να είναι ομαλή εμφύτευση, δηλ. 1-1, immersion και ομοιομορφισμός στην εικόνα της

2) $\forall$ $p \in S \subseteq M$ υπάρχει χάρτης (U, φ) της M γύρω από το p $\varphi = (x^1, .., x^m, x^{m+1}, ..., x^n)$ ώστε

$$\tilde{U} = S \cap U = \{ p \in U \text{ με } x^{m+1}(p) = \cdots = x^n(p) = 0 \}$$ ανοιχτό στην S

και $\tilde{\varphi} : \tilde{U} \to \mathbb{R}^m$ $\quad \tilde{\varphi}(q) = (x^1(q), \dots, x^m(q))$

είναι C^∞ χάρτης της S.



<u>Παραδείγματα</u>: $F : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ C^{∞}, $\nabla F(q) = \left(\frac{\partial F}{\partial x^1}(q), \dots, \frac{\partial F}{\partial x^{n+1}}(q) \right)$

$\nabla F(q) \neq 0 \in \mathbb{R}^{n+1}$ $\forall$ $q \in \mathbb{R}^{n+1}$

$\Rightarrow S = F^{-1}(0)$ είναι εμφυτευμένη υποπολλαπλότητα του $\mathbb{R}^{n+1}$ διάστασης n. (Lee: Smooth manifolds)

· (M,g) πολ/τα Riemann
· $S \subseteq M$ εμφ. υποπολ/τα , $i : S \to M$ ομαλή εμφύτευση

επαγόμενη μετρική $\tilde{g} = i^* g$.

<u>Παράδειγμα 2</u> (Γραφήματα) Έστω $f : U \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοιχτό

$F : U \to \mathbb{R}^{n+1}$, $F(u^1, \dots, u^n) = (u^1, \dots, u^n, f(u^1, \dots, u^n))$

είναι ομαλή εμφύτευση και $\operatorname{Im} F = G_f$ το γράφημα της f

είναι εμφυτευμένη υποπολ/τα του $\mathbb{R}^{n+1}$.

Μπορούμε να γράψουμε την γενική μορφή της επαγόμενης μετρικής $g = F^* g_{\mathbb{R}^{n+1}}$, ως προς το συνηθισμένο χάρτη $\varphi(u^1, \dots, u^n) = (u^1, \dots, u^n)$ στο U.

$$g_{\mathbb{R}^{n+1}} = dx^1 \otimes dx^1 + \cdots + dx^{n+1} \otimes dx^{n+1}$$

$$F^* g_{\mathbb{R}^{n+1}} = F^*\left(dx^1 \otimes dx^1 + \cdots + dx^{n+1} \otimes dx^{n+1} \right)$$

$$= F^* dx^1 \otimes F^* dx^1 + \cdots + F^* dx^{n+1} \otimes F^* dx^{n+1}$$

$$(F^* dx^i)(V) = dx^i(F_* V) = (F_* V)(x^i) = V(x^i \circ F) = d(x^i \circ F)(V)$$

$$\Rightarrow \quad F^* dx^i = d(x^i \circ F)$$

$$F(u^1, \ldots, u^n) = (u^1, \ldots, u^n, f(u^1, \ldots, u^n))$$

$$\Rightarrow \quad x^i \circ F(u^1, \ldots, u^n) = \begin{cases} u^i, & \text{av} \quad i = 1, \ldots, n \\ f(u^1, \ldots, u^n), & \text{av} \quad i = n+1 \end{cases}$$

$\cdot\ \overset{*}{F} dx^i = du^i$ για $i=1,\dots n$

$\cdot\ \overset{*}{F} dx^{n+1} = d(x^{n+1}\circ F) = df$

$$\to \boxed{g = \overset{*}{F} g_{\mathbb{R}^{n+1}} = du^1 \otimes du^1 + \dots + du^n \otimes du^n + df \otimes df.}$$

(B) Γινόμενα πολ/των Riemann

Έστω $(M_1^{n_1}, g_1)$, $(M_2^{n_2}, g_2)$ δύο πολ/τες Riemann

$M_1 \times M_2$ είναι διαφ. πολ/τα διάστασης n_1+n_2

$\forall\ (U_i, \varphi_i)$ $i=1,2$ C^∞ χάρτη της M_i, ορίζουμε

$$\Phi : U_1 \times U_2 \to \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} = \mathbb{R}^{n_1+n_2},\quad \Phi(p,q) = (\varphi_1(p), \varphi_2(p))$$

Η διαφορική δομή της $M_1 \times M_2$ ορίζεται από αυτούς τους χάρτες

$\forall \ (p,q) \in M_1 \times M_2$

$$\left.\begin{array}{ll} i_q : M_1 \to M_1 \times M_2 , & i_q(x) = (x,q) \\ j_p : M_2 \to M_1 \times M_2 & j_p(y) = (p,y) \end{array}\right\} \text{ immersions}$$

$(i_q)_* : T_p M_1 \to T_{(p,q)}(M_1 \times M_2)$ 1-1 , $\dim \operatorname{Im}(i_q)_* = \dim M_1 = n_1$

$(j_p)_* : T_q M_2 \to T_{(p,q)}(M_1 \times M_2)$ 1-1 $\dim \operatorname{Im}(j_q)_* = \dim M_2 = n_2$

$$\begin{array}{rcl} L : T_p M_1 \oplus T_q M_2 & \longrightarrow & T_{(p,q)}(M_1 \times M_2) \\ \Downarrow & & \\ (v,w) & \longmapsto & (i_q)_*(v) + (j_p)_*(w) \end{array}$$

είναι ισομορφισμός

⌈Γιατί; Ποιός είναι ο πίνακας της L ως προς βάσεις που προκύπτουν από χάρτες της M_1, M_2, $M_1 \times M_2$⌋

Μπορούμε να ορίσουμε στον $T_{(p,q)}(M_1 \times M_2) \simeq T_p M_1 \oplus T_q M_2$

$$g_{(p,q)}\Big((v_1,w_1),(v_2,w_2)\Big) = (g_1)_p(v_1,v_2) + (g_2)_q(w_1,w_2)$$

↳ ορίζει μετρική Riemann στην $M_1 \times M_2$ που τη συμβολίζουμε $g = g_1 \oplus g_2$

Ως προς ένα χάρτη $(U \times V, \Phi)$ $\Phi(a,b) = (\varphi(a), \psi(b))$

αν $(g_1)_{ij}$, $(g_2)_{\alpha\beta}$ είναι οι πίνακες των μετρικών Riemann g_1, g_2

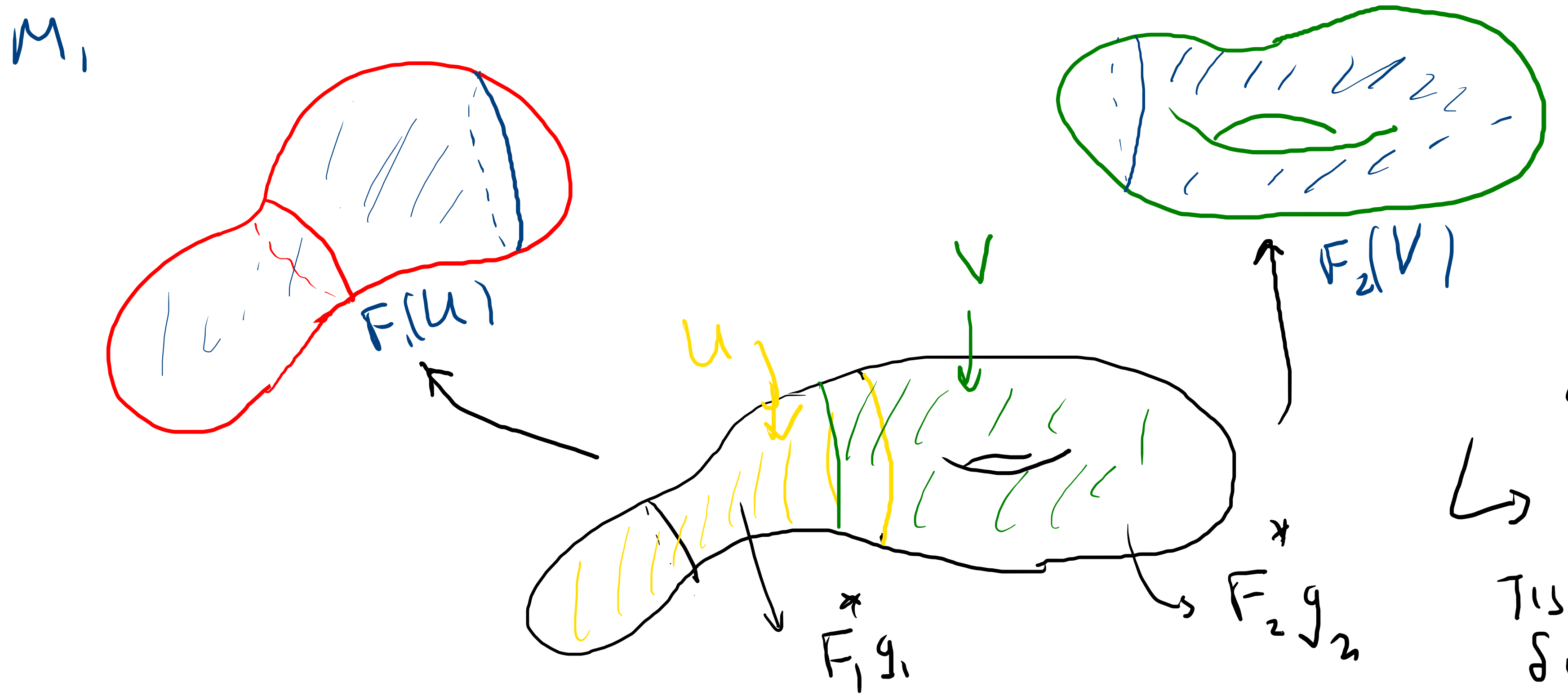
$\Rightarrow$ Ο πίνακας G της $g_1 \oplus g_2$ είναι ο

$$G = \left(\begin{array}{c|c} (g_1)_{ij} & 0 \\ \hline 0 & (g_2)_{\alpha\beta} \end{array}\right)$$

Γ Ένωση πολ/των Riemann (M_1, g_1), (M_2, g_2)

Έστω N διαφορική πολ/τα τέτοια ώστε $N = U \cup V$

$U, V \subseteq N$ ανοιχτά και $F_1 : U \to F_1(U) \subseteq M_1$ αμφιδιαφορίσεις,
$F_2 : V \to F_2(V) \subseteq M_2$ $F_i(U)$ ανοιχτά



Ορίζονται $F_1^* g_1$ μ. Riem στο U και $F_2^* g_2$ μ. Riem στο V.

↳ Μπορούμε να τις ενώσουμε με διαμέριση της μονάδας

Δηλαδή, έστω $\psi_U, \psi_V : N \to \mathbb{R}$ διαμ. της μονάδ

συμβατή με το κάλυμμα $\{U, V\}$

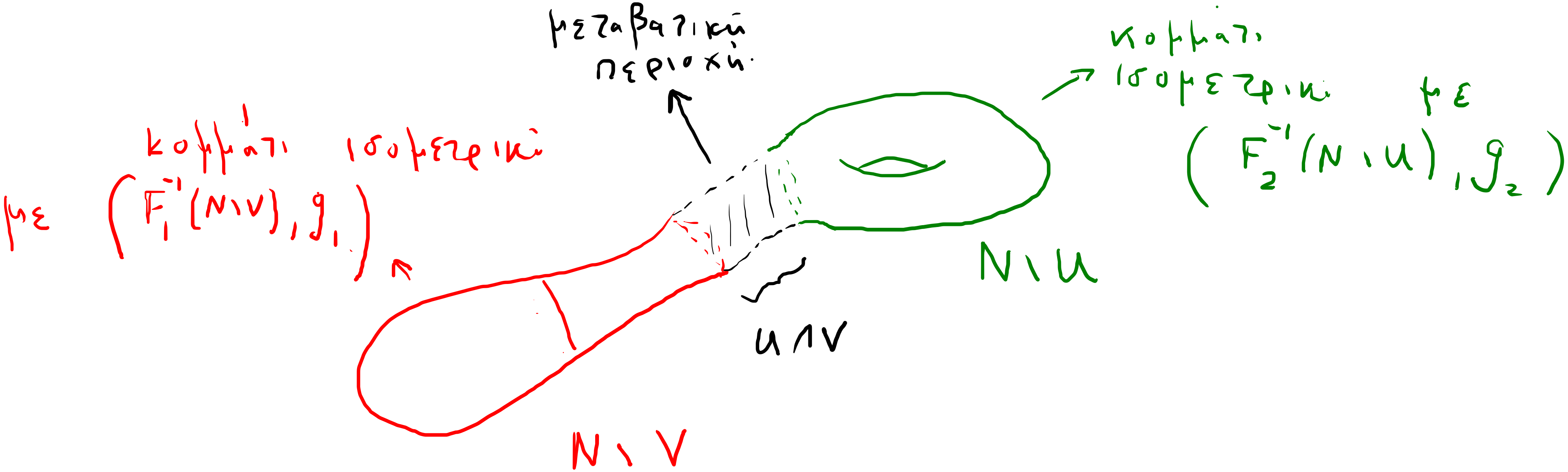
$$\operatorname{supp}\psi_U \subseteq U \quad \text{και} \quad \operatorname{supp}\psi_V \subseteq V$$

$$\Rightarrow \quad \psi_V = 0 \text{ στο } N \setminus V \Rightarrow \psi_U = 1 \text{ στο } N \setminus V$$
$$\psi_U = 0 \text{ στο } N \setminus U \Rightarrow \psi_V = 1 \text{ στο } N \setminus U$$

(επειδή $\psi_U + \psi_V = 1$.)

Ορίζουμε $g = \psi_U \cdot F_1^* g_1 + \psi_V \cdot F_2^* g_2$

$\rightsquigarrow g|_{N \setminus V} = F_1^* g_1|_{N \setminus V}$ και $g|_{N \setminus U} = F_2^* g_2|_{N \setminus U}$


μεταβατική
περιοχή
κομμάτι ισομετρικό
με (F₁⁻¹(N∖V), g₁)
κομμάτι
ισομετρικό με
(F₂⁻¹(N∖U), g₂)
N∖U
U∩V
N∖V