Ορθοκανονικό πλαίσιο

Έστω (M^n, g) μια πολ/τα Riemann, $U \subseteq M$ ανοιχτό. $E_i : U \to TM$ C^∞, $i=1,\dots,n$ ονομάζεται ορθοκανονικό πλαίσιο αν $\forall\, p \in U$ $g_p(E_i, E_j) = \delta_{ij}$

Πρόταση: Έστω (M,g) μια πολ/τα Riemann, $p \in M$. Τότε υπάρχει $U \subseteq M$ ανοιχτό με $p \in U$ και $E_i : U \to TM$ ορθοκανονικό πλαίσιο, $i=1,\dots,n$.

Απόδειξη. Έστω (U,φ) ένας χάρτης γύρω από το $p \in M$.

$\forall\, p \in U$ κάνουμε Gram-Schmidt στη βάση $\left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_p, \dots, \left.\frac{\partial}{\partial x^n}\right|_p$

$$E_1|_p = \frac{1}{|\partial_1|}\left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_p = \frac{1}{\sqrt{g_{11}(p)}} \cdot \frac{\partial}{\partial x^1}$$

από την κατασκευή βλέπουμε ότι E_i είναι C^∞, για κάθε $i=1,\dots,n$.

$$E_i|_p = \frac{\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p - \sum_{j=1}^{i-1} g_p\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p, E_j|_p\right) E_j|_p\right)}{\left|\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p - \sum_{j=1}^{i-1} g_p\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p, E_j|_p\right) E_j|_p\right|}$$

$E_n|_p = \dots$

Riemannian submersions

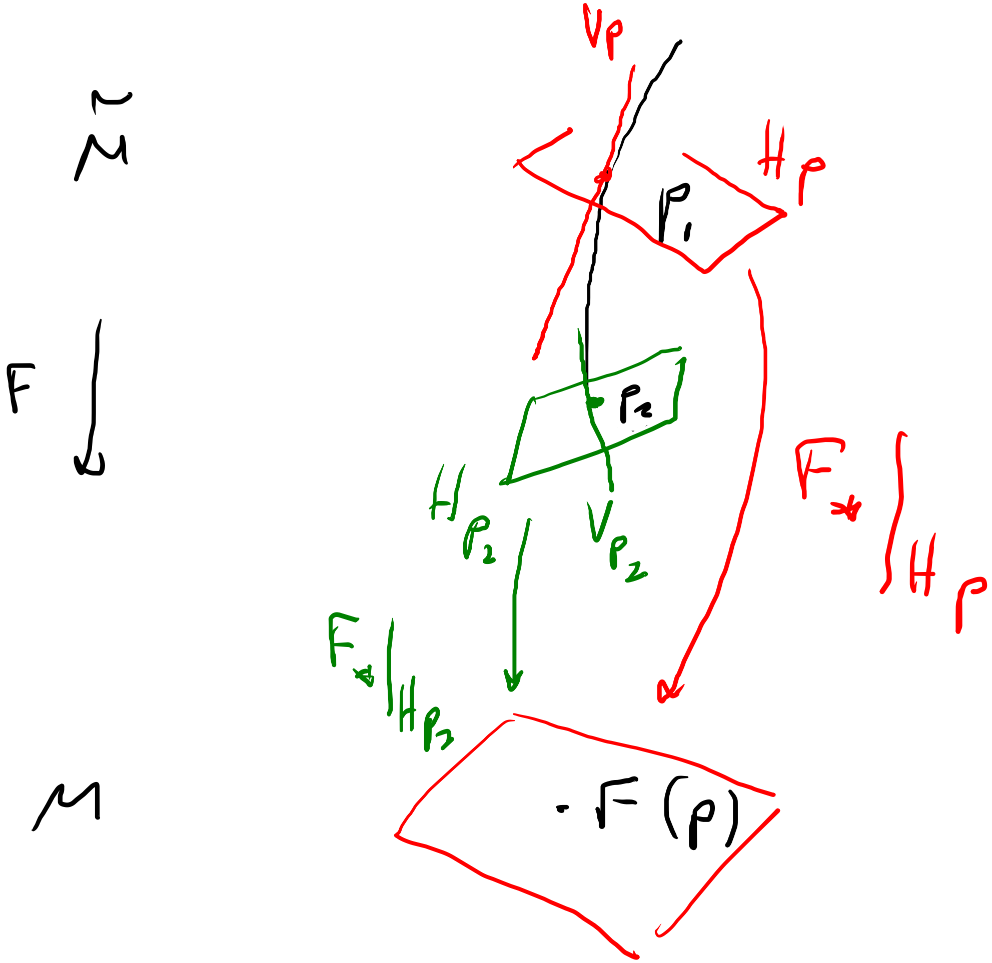
$F: \tilde{M} \to M$ subwersion $\iff \forall\, p \in \tilde{M}$ $\quad F_*: T_p\tilde{M} \to T_{F(p)}M$ επί.

- $\forall\, q \in M$ $\tilde{M}_q = F^{-1}(q) \subseteq \tilde{M}$ είναι εμφυτευμένη υποπολλαπλότητα της $\tilde{M}$ (θεώρημα σταθερής τάξης)
- $\forall\, p \in \tilde{M}$, $T_p\tilde{M}_{F(p)} = \ker F_*\big|_{T_p\tilde{M}} = V_p \rightsquigarrow$ "κάθετος υπόχωρος του $T_p\tilde{M}$"
- Αν $\tilde{g}$ είναι μετρική Riemann της $\tilde{M}$ ορίζεται $\forall\, p \in \tilde{M}$ ο υπόχωρος

$$H_p = V_p^{\perp} = \{ v \in T_p\tilde{M} \mid g_p(v, w) = 0 \quad \forall\, w \in V_p \}$$

$\hookrightarrow$ "οριζόντιος υπόχωρος του $T_p\tilde{M}$"

<u>Ορισμός</u>: Αν $(\tilde{M}, \tilde{g})$, (M, g) πολλαπλότητες Riemann, $F: \tilde{M} \to M$ Riemannian subwersion αν $\forall\, p \in \tilde{M}$ $\quad F_*\big|_{H_p}: H_p \to T_{F(p)}M$ είναι γραμμική ισομετρία (ως προς $\tilde{g}_p|_{H_p}$ και g_p


$\tilde{M}$
V_p
H_p
p_1
F
p_2
H_{p_2}
V_{p_2}
$F_*|_{H_p}$
$F_*|_{H_{p_2}}$
M
$F(p)$

Παραδείγματα

1) $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $m < n$ $\quad \pi(x^1, \ldots, x^n) = (x^1, \ldots, x^m)$

είναι Riemannian submersion, μεταξύ των $(\mathbb{R}^n, g_{\mathbb{R}^n})$, $(\mathbb{R}^m, g_{\mathbb{R}^m})$

2) Γενικά, αν (M, g_M), (N, g_N) πολλ/τες Riemann

$$F : (M \times N, g_M \oplus g_N) \to (M, g_M), \quad F(p,q) = p$$

είναι Riemannian submersion.

Αν $f : M \to \mathbb{R}$, $f > 0$, C^∞ τότε $F : (M \times N, g_M \oplus f g_N) \to (M, g_M)$

είναι Riemannian submersion.

Πρόταση . Έστω $F: \tilde{M}^n \to M^m$ $(m<n)$ submersion, $\tilde{g}$ μετρική Riemann στην $\tilde{M}$

1) κάθε $W \in \mathcal{X}(\tilde{M})$ εκφράζεται μοναδικά ως $W = W_H + W_V$ ώστε $W_H, W_V \in \mathcal{X}(\tilde{M})$ και $\forall\, p \in \tilde{M}$ $W_H|_p \in H_p$, $W_V|_p \in V_p$.

2) $\forall$ $X \in \mathcal{X}(M)$ υπάρχει μοναδικό $Y \in \mathcal{X}(\tilde{M})$ ώστε Y οριζόντιο $(Y|_p \in H_p\ \forall p)$ και $F_* Y_p = X_{F(p)}$ [Y ονομάζεται horizontal lift του X (οριζόντια ανύψωση)]

Απόδειξη: Έστω $p \in \tilde{M}$. $F^{-1}(F(p)) \subseteq \tilde{M}$ εμφ. υποπολλαπλότητα της $\tilde{M}$

$\rightsquigarrow$ Υπάρχει χάρτης της $\tilde{M}$ γύρω από το p, (U, φ) ώστε

$$U \cap F^{-1}(F(p)) = \{x^1 = \dots = x^m = 0\}$$

και $V_p = \operatorname{span}\left(\frac{\partial}{\partial x^{m+1}}\Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}\Big|_p\right)$. Δεν ισχύει απαραίτητα ότι $H_p = \operatorname{span}\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m}\Big|_p\right)$

Κάνουμε Gram-Schmidt στη βάση $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^{m+1}}\Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}\Big|_p, \frac{\partial}{\partial x^1}\Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}\Big|_p \right\}$

E_i στο $\mathcal{U}$, $i=1,\dots,n$. Αυτό θα έχει την ιδιότητα

$$\mathrm{span}\left(E_1|_p, \dots, E_{n-m}|_p\right) = \mathrm{span}\left(\frac{\partial}{\partial x^{m+1}}\Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}\Big|_p\right) = V_p$$

και αφού $\{E_i\}$ ορθοκανονικό πλαίσιο,

$$\Rightarrow H_p = \mathrm{span}\left(E_{n-m+1}, \dots, E_n|_p\right)$$

1) Έστω $W \in \mathcal{X}(\tilde{M})$ $\forall p \in \tilde{M}$ ορίζουμε

$$\left.\begin{aligned} W_V|_p &= \sum_{i=1}^{n-m} g_p(W|_p, E_i|_p)\, E_i|_p \\ W_H|_p &= \sum_{i=n-m+1}^{n} g_p(W|_p, E_i|_p)\, E_i|_p \end{aligned}\right\}$$

μοναδικά $\forall p$, αφού $T_pM = V_p \oplus H_p$ και C^∞ από κατασκευή.

2) Έστω $X \in \mathcal{X}(M)$, $q = F(p) \in M$. $F_*|_{H_p} : H_p \to T_pM$ ισομορφισμός. $\tilde{E}_i|_q = F_* E_i|_p$ $i = n-m+1, \dots, n$

$Y_p = (F_*)^{-1} X_q$ και πρέπει να δείξουμε ότι Y είναι C^∞ χρησιμοποιώντας $E_i, \tilde{E}_i$.

Μετρική Riemann από submersion

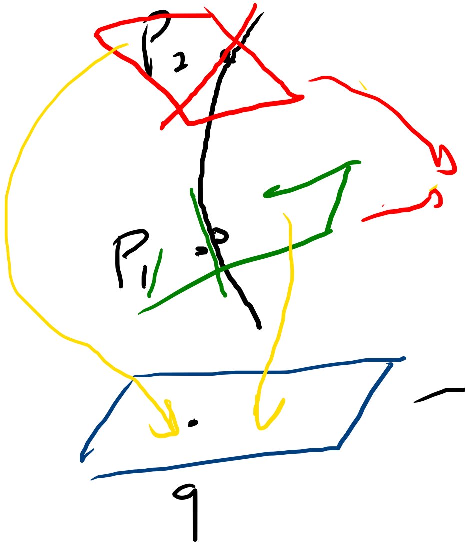
Έστω $F: \tilde{M} \to M$ επί submersion, $\tilde{g}$ μετρική Riemann στην M

το $\forall\ p_1, p_2 \in F^{-1}(q)$ $\quad F_*|_{H_{p_1}}: H_{p_1} \to T_qM \quad F_*|_{H_{p_2}}: H_{p_2} \to T_qM$

είναι γραμμικοί ισομορφισμοί. Αλλά αν ορίσουμε

$$g_q(X,Y) = g_{p_1}\left((F_*|_{H_{p_1}})^{-1}(X), (F_*|_{H_{p_2}})^{-1}(Y) \right)$$ δεν είναι απαραίτητο

να ισχύει ότι $F_*|_{H_{p_2}}: H_{p_2} \to T_qM$ είναι ισομετρία



δ. χώροι με εσ. γινόμενο

$\to F_*|_{H_{p_1}}, F_*|_{H_{p_2}}$ επάγουν εσ. γινόμενα στο T_qM τα οποία μπορεί να μην είναι ίδια.

Δράσεις σε πολλ/τες

- G ομάδα που δρα σε μια C^∞ πολλ/τα $\tilde{M}$
  φ $\quad p \longmapsto \varphi\cdot p \quad \rightsquigarrow C^\infty$ απεικόνιση

- $F:\tilde{M}\to M$ submersion 1) Μια δράση της G λέγεται κάθετη αν $\forall\, p\in F^{-1}(q)$ και $\varphi\in G$ $\quad \varphi\cdot p\in F^{-1}(q)$
  2) Η δράση θα λέγεται μεταβατική στις ίνες αν $\forall\, p_1,p_2\in F^{-1}(q)$ υπάρχει $\varphi\in G$ ώστε $\varphi\cdot p_1=p_2$

- Αν $(\tilde{M},\tilde{g})$ πολλ/τα Riemann, η δράση λέγεται ισομετρική αν $\forall\, \varphi\in G$ η απεικόνιση $p\longmapsto\varphi\cdot p$ είναι ισομετρία της $\tilde{g}$ και λέμε ότι η $\tilde{g}$ μένει αναλλοίωτη κάτω από τη δράση της G.

Θεώρημα: Έστω $F:\tilde{M}\to M$ επί submersion και $\tilde{g}$ μετρική Riemann στην $\tilde{M}$. Έστω G ομάδα που δρα ισομετρικά στην $(\tilde{M},\tilde{g})$, και η δράση της είναι κάθετη και μεταβατική στις ίνες. Τότε υπάρχει μετρική Riem. g της M ώστε η F να είναι Riemannian submersion.

Πόρισμα: Έστω $(\tilde{M}, \tilde{g})$ πολλ/ρα Riemann και G μια ομάδα που δρα ισομετρικά στην $(\tilde{M}, \tilde{g})$. Έστω ότι ο χώρος πηλίκο

$$M = \tilde{M}/G \text{ είναι } C^\infty \text{ πολλ/ρα ώστε η } \pi : \tilde{M} \to \tilde{M}/G, \quad \tilde{p} \mapsto [\tilde{p}]$$

να είναι C^∞ submersion.

Τότε η M δέχεται μετρική Riemann g ώστε η απεικόνιση πηλίκο π να είναι Riemannian submersion.

(*) Υπάρχουν συγκεκριμένες συνθήκες ώστε η $\tilde{M}/G$ να είναι C^∞ πολλ/ρα με C^∞ απεικόνιση πηλίκο.

Εφαρμογή 1) $\tilde{M} = \mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0\} \simeq \mathbb{R}^{2n+2}$, $\tilde{g} = g_{\mathbb{R}^{2n+2}}$

$\mathbb{C}_* = \{\lambda \in \mathbb{C}, \lambda \neq 0\}$ δρα στην $\tilde{M}$: $z \longmapsto \lambda \cdot z$ C^∞

Ο χώρος πηλίκο είναι C^∞ πολλ/τα - ο μιγαδικός προβολικός χώρος $\mathbb{CP}^n$

και $\pi : \mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{CP}^n$, $z \longmapsto [z]$ είναι C^∞ submersion, επί

$S^{2n+1} \subseteq \mathbb{R}^{2n+2} \simeq \mathbb{C}^{n+1}$ και $\tilde{\pi} = \pi\big|_{S^{2n+1}} : S^{2n+1} \longrightarrow \mathbb{CP}^n$ επί submersion

↳ θέλει απόδειξη

Lee: Riem. manifolds

↳ $(z_1, \dots, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1}$

με $|z_1|^2 + \dots + |z_{n+1}|^2 = 1$

$S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} = \{e^{i\theta} \mid \theta \in \mathbb{R}\}$ δρα στην S^{2n+1} :

$$e^{i\theta} \cdot (z_1, \dots, z_n) = (z_1 e^{i\theta}, z_2 e^{i\theta}, \dots, z_n e^{i\theta})$$

η δράση είναι κάθετη και μεταβατική στις ίνες της $\tilde{\pi}$. Είναι επίσης ισομετρική ($z \mapsto e^{i\theta} z$ είναι στροφή στον $\mathbb{C}$ → η δράση είναι μέσω ισομετριών του $\mathbb{C}^{n+1}$

$\Rightarrow$ Ορίζεται με κανονικό τρόπο μια μετρική g_{FS} στον $\mathbb{C}P^n$ που ονομάζεται μετρική Fubini-Study.

Σημείωση: $\mathbb{C}P^1 \simeq S^2$ ~> η παραπάνω διαδικασία ορίζει $\pi: S^3 \to S^2$ submersion
$\downarrow$ όχι προφανές
$\hookrightarrow g_{FS} = g_{S^2(\frac{1}{2})}$

2) $\tilde{M} = S^n$, $G = \{\pm 1\}$ $p \mapsto -p$. $p \in S^n$ ισομετρική δράση

$\pi: S^n \longrightarrow S^n / \{\pm 1\} \simeq \mathbb{R}P^n$ $\rightarrow$ πραγματικός προβολικός χώρος

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad$ is $\quad$ π. επί submersion

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} / \{x \sim \lambda x \mid \lambda \neq 0\}$

$\pi(p) = [p]$. ~> ο $\mathbb{R}P^n$ εφοδιάζεται με μετρική Riemann ώστε π Riem. submersion

(π είναι κατι παραπάνω: Riemannian covering map)

Ο όγκος σε μια πολλ/τα Riemann (M,g),

Έστω (U,φ) χάρτης και $g = g_{ij}\, dx^i \otimes dx^j$ στο U.

<u>Αρχικά</u> ορίζουμε στο U $\quad dV_g = \sqrt{\det(g_{ij})}\, dx^1 \dots dx^n$

με την έννοια ότι αν $f : U \to \mathbb{R}$ C^∞ τότε

$$\int_U f\, dV_g = \int_{\varphi(U)} f \circ \varphi^{-1}(x^1,\dots,x^n) \sqrt{\det(g_{ij})}\, dx^1 \dots dx^n \qquad (*)$$

$\hookrightarrow$ ο ορισμός αυτός καταλήγει να είναι ανεξάρτητος του χάρτη

Απόδειξη: αν (U,φ) $\varphi = (x^1,\dots,x^n)$, (V,ψ), $\psi = (y^1,\dots,y^n)$

δύο χάρτες με $U \cap V \neq \emptyset$, $f : U \cap V \to \mathbb{R}$ C^∞

$$\left.\begin{aligned} g &= g_{ij}\, dx^i \otimes dx^j \text{ στο } U \\ g &= \hat{g}_{ij}\, dy^i \otimes dy^j \text{ στο } V \end{aligned}\right\} \int_{\varphi(U\cap V)} f\circ\varphi^{-1}(x^1,\dots,x^n) \sqrt{\det(g_{ij})}\, dx^1 \dots dx^n =$$

$$= \int_{\psi(U\cap V)} f \circ \psi^{-1}(y^1,\dots,y^n) \sqrt{\det(h_{ij})}\, dy^1 \dots dy^n$$

Μπορεί να ορίσει επομένως ένα μέτρο στην M, το μέτρο Riemann V_g ώστε να ισχύει η $\circledast$

$$\circledast \iff dV_g = \sqrt{\det(g_{ij})}\, d\mathcal{L}^n$$ όπου $\mathcal{L}^n$ το μέτρο Lebesgue στον $\mathbb{R}^n$.

$\circledast$ Αν η M είναι προσανατολισμένη τότε ορίζεται η n-μορφή όγκου dV_g, ώστε τοπικά να έχουμε

$$dV_g = \sqrt{\det(g_{ij})}\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$$

όταν $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$ είναι θετικά προσανατολισμένος χάρτης

(προσανατολισμός $\iff$ υπάρχει n-μορφή ω στην M με $\omega_p \neq 0$ $\forall p \in M$