Τανυστές

S σύνολο $\rightsquigarrow$ ελεύθερος $\mathbb{R}$-δ. χώρος $\tilde{F}(S)$

$$\tilde{F}(S) = \left\{ a_1 s_1 + \dots + a_k s_k \;\middle|\; \begin{array}{l} k \geq 1 \\ a_i \in \mathbb{R} \quad i = 1, \dots, k \\ s_i \in S \end{array} \right\}$$

- $S \subseteq F(S)$ $\qquad s \mapsto 1 \cdot s$
- $0 \in F(S)$ $\qquad \sim 0 \cdot s \;\; \forall \; s \in S$

Γενικά παίρνει τη δομή $\mathbb{R}$-δ. χώρου

$$0 = 0 \cdot s$$

$$as + bs = (a+b) \cdot s$$

—

$V_1, \dots, V_k$ $\quad \mathbb{R}$-δ. χώροι

Ορίζουμε $\quad V_1 \otimes \dots \otimes V_k = \tilde{F}(V_1 \times \dots \times V_k) / \sim$

$a \in \mathbb{R}$

$$a(v_1, \dots, v_k) \sim (v_1, \dots, a v_i, \dots, v_k)$$

$$(v_1, \dots, v_i + v_i', \dots, v_k) \sim (v_1, \dots, v_i, \dots, v_k) + (v_1, \dots, v_i', \dots, v_k)$$

Συμβολίζοντας $[(v_1, \dots, v_k)] =: v_1 \otimes \cdots \otimes v_k$

$$a\, v_1 \otimes \cdots \otimes v_k = v_1 \otimes \cdots \otimes a v_i \otimes \cdots \otimes v_k$$

$$v_1 \otimes \cdots \otimes (v_i + v_i') \otimes \cdots \otimes v_k = v_1 \otimes \cdots \otimes v_i \otimes \cdots \otimes v_k + v_1 \otimes \cdots \otimes v_i' \otimes \cdots \otimes v_k$$

Αν ο V_i, $i = 1, \dots, k$ έχει βάση $E_1^i, \dots, E_{n_i}^i$, $\dim V_i = n_i$

$$\{ E^1_{i_1} \otimes E^2_{i_2} \otimes \cdots \otimes E^k_{i_k} \;/\; 1 \le i_1 \le n_1, \dots, 1 \le i_k \le n_k \}.$$

Ls είναι βάση του $V_1 \otimes \cdots \otimes V_k$

Προσεταιριστική ιδιότητα

$$V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3) \simeq (V_1 \otimes V_2) \otimes V_3 \simeq V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$$

$$v_1 \otimes (v_2 \otimes v_3) \simeq (v_1 \otimes v_2) \otimes v_3 \simeq v_1 \otimes v_2 \otimes v_3$$

$$\mathcal{L}(V_1, \dots, V_k ; \mathbb{R}) = \{ F : V_1 \times \dots \times V_k \to \mathbb{R} \mid F \text{ πολυγραμμική} \}$$

$\circledast$ $\mathcal{L}(V_1, \dots, V_k ; \mathbb{R})$ ισόμορφο με το $V_1^* \otimes \dots \otimes V_k^*$.

$$(\underbrace{\omega^1 \otimes \dots \otimes \omega^k}_{\in V_1^* \otimes \dots \otimes V_k^*})(\underbrace{X_1, \dots, X_k}_{X_i \in V_i}) = \omega^1(X_1) \dots \omega^k(X_k).$$

Έστω V $\mathbb{R}$-δ. χώρος $\dim V = n$

$$T^k(V^*) = V^* \otimes \dots \otimes V^*$$

$\hookrightarrow F : V_1 \times \dots \times V_k \to \mathbb{R}$ πολυγρ.

Αντίστοιχα

$$T^k(V) = \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{k \text{ φορές}} \approx \{\alpha : V^* \times \cdots \times V^* \to \mathbb{R}\}$$

πολυγραμμική απεικόνιση.

$$(X_1 \otimes X_2 \otimes \cdots \otimes X_k)(\omega^1, \ldots, \omega^k) = \omega^1(X_1) \cdots \omega^k(X_k)$$

Γενικά θα συμβολίζονται ως

$$T^{(k,\ell)}(V) = \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{k \text{ φορές}} \otimes \underbrace{V^* \otimes \cdots \otimes V^*}_{\ell \text{ φορές}}$$

→ Τανυστές τύπου (k,ℓ) ή (k,ℓ)-τανυστές

$$\cong$$

$$(X_1 \otimes \cdots \otimes X_k \otimes \omega^1 \otimes \cdots \otimes \omega^\ell)(\eta^1, \ldots, \eta^k, Y_1, \ldots, Y_\ell)$$

$$= \eta^1(X_1) \cdots \eta^k(X_k) \cdot \omega^1(Y_1) \cdots \omega^\ell(Y_\ell)$$

Ειδικές περιπτώσεις

$$T^{(0,0)}(V) = \mathbb{R}$$
$$T^{(0,1)}(V) = T^{1}(V^*) = V^*$$
$$T^{(1,0)}(V) = V.$$

<u>Βάσεις</u>: $V \rightsquigarrow \{E_1, \dots, E_n\}$

$V^* \longrightarrow$ δυϊκή βάση $\{\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n\}$

$T^{(k,l)}(V)$. θα έχει βάση $\longrightarrow \dim T^{(k,l)}(V) = n^{k+l}$.

$$\left\{ E_{i_1} \otimes \cdots \otimes E_{i_k} \otimes \varepsilon^{j_1} \otimes \cdots \otimes \varepsilon^{j_l} \right\},$$

$1 \le i_1 \le n \quad \dots \quad 1 \le i_k \le n$

$1 \le j_1 \le n \quad \dots \quad 1 \le j_l \le n.$

Contraction: Έστω $T \in T^{(k,\ell)}(V)$

$$T = T^{j_1 \cdots j_k}_{i_1 \cdots i_\ell} E_{j_1} \otimes \cdots \otimes E_{j_k} \otimes \varepsilon^{i_1} \otimes \cdots \otimes \varepsilon^{i_k}$$

$$c : T^{(k,\ell)}(V) \longrightarrow T^{(k-1,\ell-1)}(V) \quad \text{πίνακα}$$

Ορίζεται σε απλούς (k,ℓ) τανυστές, και επεκτείνεται γραμμικά

$$c^a_b \left(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k \otimes w^1 \otimes \cdots \otimes w^\ell \right) \quad \left(a = 1, \ldots, k \ , b = 1, \ldots, \ell \right)$$

$$= w^b(v_a) \cdot v_1 \otimes \cdots \otimes \hat{v}_a \otimes \cdots v_k \otimes w^1 \otimes \cdots \otimes \hat{w}^b \otimes \cdots \otimes w^\ell \in T^{(k-1,\ell-1)}$$

Ως προς τις βάσεις των $T^{(k,\ell)}(V)$ και $T^{(k-1,\ell-1)}(V)$

$$c^a_b \left(T^{j_1 \cdots j_k}_{i_1 \cdots i_\ell} E_{j_1} \otimes \cdots \otimes E_{j_k} \otimes \varepsilon^{i_1} \otimes \cdots \otimes \varepsilon^{i_k} \right) = T^{j_1 \cdots j_{a-1}\, m\, j_{a+1} \cdots j_k}_{i_1 \cdots i_{b-1}\, m\, i_{b+1} \cdots i_\ell} \cdot E_{j_1} \otimes \cdots \otimes \hat{E}_{j_a} \otimes \cdots \otimes E_{j_k} \otimes \varepsilon^{i_1} \otimes \cdots \otimes \hat{\varepsilon}^{i_b} \otimes \cdots \otimes \varepsilon^{i_k}$$

σύμβαση Einstein: άθροιση ως προς $m = 1, \ldots, n$

Έστω $T \in T^{(0,2)}(V)$, $X, Y \in V = T^{(1,0)}(V)$

$$T = T_{ij}\, \varepsilon^i \otimes \varepsilon^j \qquad X = X^p E_p \qquad Y = Y^q E_q$$

$$T \otimes X \otimes Y \in T^{(2,2)}(V)$$

$$c_1^1 (T \otimes X \otimes Y) = c_1^1 \left(T_{ij} X^p Y^q \, \varepsilon^i \otimes \varepsilon^j \otimes E_p \otimes E_q \right)$$

$$= \underbrace{T_{mj} X^m}\, Y^q \cdot \varepsilon^j \otimes E_q \in T^{(1,1)}(V)$$

$$c_1^1 \left(c_1^1 (T \otimes X \otimes Y) \right) = c_1^1 \left(T_{mj} X^m Y^q \, \varepsilon^j \otimes E_q \right)$$

$$= T_{mk} X^m Y^k = T(X, Y)$$ αν δούμε το T σαν πλειογραμμική απεικόνιση

$$T : V \times V \to \mathbb{R}$$

Έστω $(V, \langle , \rangle)$ $\mathbb{R}$-δ.χώρος με εσ. γινόμενο

$$g_{ij} = \langle E_i , E_j \rangle \qquad g^{ij} = \langle \varepsilon^i , \varepsilon^j \rangle$$

Ο πίνακας (g^{ij}) είναι ο αντίστροφος του πίνακα (g_{ij})

→ V^* εφοδιάζεται με εσ. γινόμενο ώστε

$$\langle \omega , \eta \rangle = \langle \omega^{\#} , \eta^{\#} \rangle$$

→ Ο $T^{(k,l)}(V)$ εφοδιάζεται επίσης με εσωτ. γινόμενο (επαγόμενο από το V)

Αρκεί να το ορίσουμε σε απλούς τανυστές και να επεκτείνουμε διγραμμικά

$$\langle v_1 \otimes \cdots \otimes v_k \otimes w^1 \otimes \cdots \otimes w^l , \tilde{v}_1 \otimes \cdots \otimes \tilde{v}_k \otimes \tilde{w}^1 \otimes \cdots \otimes \tilde{w}^l \rangle$$

$$= \langle v_1 , \tilde{v}_1 \rangle \cdots \langle v_k , \tilde{v}_k \rangle \langle w^1 , \tilde{w}^1 \rangle \cdots \langle w^l , \tilde{w}^l \rangle$$

Ως προς τις βάσεις $\{E_1, \dots, E_n\}$, $\{\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n\}$

$$T = T^{i_1 \dots i_k}_{j_1 \dots j_l} E_{i_1} \otimes \cdots \otimes E_{i_k} \otimes \varepsilon^{j_1} \otimes \cdots \otimes \varepsilon^{j_l}$$

$$S = S^{p_1 \dots p_k}_{q_1 \dots q_l} E_{p_1} \otimes \cdots \otimes E_{p_k} \otimes \varepsilon^{q_1} \otimes \cdots \otimes \varepsilon^{q_l}$$

$$\langle T, S \rangle = T^{i_1 \dots i_k}_{j_1 \dots j_l} S^{p_1 \dots p_k}_{q_1 \dots q_l} \langle \dots , \dots \rangle$$

$$= T^{\dots}_{\dots} S^{\dots}_{\dots} \underbrace{\langle E_{i_1}, E_{p_1} \rangle}_{g_{i_1 p_1}} \cdots \langle E_{i_k}, E_{p_k} \rangle \underbrace{\langle \varepsilon^{j_1}, \varepsilon^{q_1} \rangle}_{g^{j_1 q_1}} \cdots \langle \varepsilon^{j_l}, \varepsilon^{q_l} \rangle$$

$$= T^{i_1 \dots i_k}_{j_1 \dots j_l} S^{p_1 \dots p_k}_{q_1 \dots q_l} g^{j_1 p_1} \cdots g^{j_l p_l} g_{i_1 q_1} \cdots g_{i_k q_k}$$

Ίχνος (trace) tr_g ως προς το εσωτερικό γινόμενο

$T \in T^{(k,l)}(V)$ $\qquad tr_{a,b}(T) = C^a_b(T^\#) = g^{pq}\, T^{i_1 \cdots i_k}_{j_1 \cdots p \cdots q \cdots j_l}$ (υπό βάση)

θέση a, θέση b

$a = 1, \dots, l$

$b = 1, \dots, l$

$$T = T^{i_1 \cdots i_k}_{j_1 \cdots j_l}\, E_{i_1} \otimes \cdots \otimes E_{i_k} \otimes \varepsilon^{j_1} \otimes \cdots \otimes \varepsilon^{j_l}$$

$\boxed{a = 1, \dots, l}$

$$T^\# \in T^{(k+1,\, l-1)}(V)$$

$$T^\# = \tilde{T}^{i_1 \cdots i_k m}_{j_1 \cdots \hat{j_a} \cdots j_l}\, E_{i_1} \otimes \cdots \otimes E_{i_k} \otimes E_m \otimes \varepsilon^{j_1} \otimes \cdots \otimes \hat{\varepsilon}^{a} \otimes \cdots \otimes \varepsilon^{j_l}$$

$$\hookrightarrow\ = g^{m j_a}\, T^{i_1 \cdots i_k}_{j_1 \cdots j_a \cdots j_l}.$$

$h \in T^{(0,2)}(V)$ $\qquad$ $h = h_{ij}\, \varepsilon^i \otimes \varepsilon^j$

$\mathrm{tr}_g h = g^{ij} h_{ij}$ $\qquad$ $g = g_{ij}\, \varepsilon^i \otimes \varepsilon^j$

$$\langle g, h \rangle = g^{ia} \underbrace{g^{jb} g_{ij}}_{\delta^b_i} h_{ab} = \underbrace{g^{ia} \delta^b_i}_{= g^{ab}} h_{ab} = g^{ab} h_{ab} = \mathrm{tr}_g h.$$

Δέσμες (k,ℓ) τανυστών.

M διαφ. πολ/τα

$$T^{(k,\ell)}(M) = \bigsqcup_{x\in M} T^{(k,\ell)}(T_xM) = \bigsqcup_{x\in M} T_xM\otimes\cdots\otimes T_xM\otimes T_x^*M\otimes\cdots\otimes T_x^*M$$

↳ C^∞ πολ/τα και έχει δομή δ. δέσμης πάνω από την M τάξης $n^{k+\ell}$

$U\subseteq M$ ανοιχτό $\quad \pi^{-1}(U) \overset{\Phi}{\simeq} U\times\mathbb{R}^{n^{k+\ell}}$

↳ αμφιδιαφόριση

$\pi^{-1}(U)\ni x \quad \Phi\big|_{T^{(k,\ell)}(T_xM)} : T^{(k,\ell)}(T_xM) \to \{x\}\times\mathbb{R}^{n^{k+\ell}}$

γρ. ισομ.

Αν η (M,g) είναι πολ/Riemann, η δέσμη $T^{(k,l)}(M)$

γίνεται δέσμη με εσωτ. γινόμενο

$\sigma, \tau \in \Gamma(T^{(k,l)}(M))$ τομές (ονομάζονται (k,l)-τανυστές στην M)

$\langle \sigma, \tau \rangle_x = \langle \sigma_x, \tau_x \rangle_x$. $\rightsquigarrow$ $x \longmapsto \langle \sigma, \tau \rangle_x$ C^∞.

Την επόμενη φορά αν ∇ είναι συνοχή της TM

τότε η ∇ επεκτείνεται σε συνοχή της $T^{(k,l)}(M)$.

(Γιατί τα θέλουμε $f : M \to \mathbb{R}$ C^∞

$\underbrace{df}$ $\in T^{(0,1)}(M)$

$? \ni \nabla df = ?$

| μ. Riemann
$g \in T^{(0,2)}(M)$

$\nabla g = ?$