Ασκήσεις

Stampachia

11) $u \in W^{1,p}(U)$, $Du = 0$ a.e., U συνεκτικό $\Longrightarrow$ $u \equiv$ σταθερά.

1. $u^\varepsilon = \eta_\varepsilon * u \Rightarrow Du^\varepsilon = \eta_\varepsilon * Du = 0$

$u^\varepsilon(x) \equiv C_\varepsilon$, $x \in U$ (συνεκτικότητα, $u^\varepsilon \in C^\infty_{loc}(U)$)

2. $\|u^\varepsilon\|_{L^p(K)} \leq \|u^\varepsilon\|_{L^p(K)}$ $\quad K \subset\subset U$

$\Rightarrow |C_\varepsilon| |K| \leq \|u\|_{L^p(K)}$

$\Rightarrow |C_\varepsilon| \leq \dfrac{\|u\|_{L^p(K)}}{|K|}$

i.e. $\underline{|C_\varepsilon| < M}$, indep. of ε.

3. $C_{\varepsilon_n} \longrightarrow C$

$u^{\varepsilon_n} \longrightarrow u$ as $\varepsilon \to 0$

$\Rightarrow \boxed{u \equiv C}$.

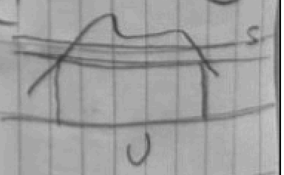
$\square$

---

18 —

---

18) Άσκηση (“Συνέχεια” Συναρτήσεων Sobolev), (Χρυσή 11, 18)
Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό, φραγμένο, συνεκτικό, $\partial A \in C^1$
Έστω ότι



(i) $f \leq \hat{r}$ στο ∂A (Ίχνος)
(ii) $\mathcal{L}^n(A \cap \{\hat{s} < f\}) > 0$, για κάποιο $\hat{s} > \hat{r}$

Δείξτε ότι

$$\mathcal{L}^n(A \cap \{\hat{r} < f \leq \hat{s}\}) > 0$$

Υπόδειξη: $\sigma, \tau : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $\quad \sigma(x) = \min\{f(x), \hat{s}\}$,
$\tau(x) = \max\{\sigma(x), \hat{r}\}$.

I

n = σταθερά

Πορίσματα της $\boxed{\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \le C\, \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}}$, $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p < n$, $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$

$\underline{\theta 1}$: $U \subset \mathbb{R}^n$, φραγμένο, $\partial U \in C^1$ $\Rightarrow$ $W^{1,p}(U) \hookrightarrow L^{p^*}(U)$ $\Leftrightarrow$

(1) $$\|u\|_{L^{p^*}(U)} \le C \|u\|_{W^{1,p}(U)}, \quad C = C(n, p, U)$$

$\underline{\theta 2}$: U ανοικτό, φραγμένο $\subset \mathbb{R}^n$, $u \in W_0^{1,p}(U)$, $1 \le p < n$, $C(p, q, n, U)$
(Ανισότητα Poincaré)

$\Leftrightarrow$

(2) $$\|u\|_{L^q(U)} \le c\, \|\nabla u\|_{L^p(U)}, \quad \forall\, q \in [1, p^*]$$

$\underline{\Sigma \eta \mu}$. (2) δεν ισχύει για $U = \mathbb{R}^n$, διότι $p_2 > p_1$

$$\not\Rightarrow \quad L^{p_2}(\mathbb{R}^n) \subset L^{p_1}(\mathbb{R}^n)$$ (Άσκηση)

Ισχύει όμως $L^{p_2}(U) \subset L^{p_1}(U)$, U φραγμένο (")

($\mathcal{L}^n(U) < \infty$ αρκεί)

Απόδ 1

$$W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n) = W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$$

$u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$

$u^\varepsilon = \eta_\varepsilon * u$, $\nabla u^\varepsilon = \eta_\varepsilon * \nabla u$

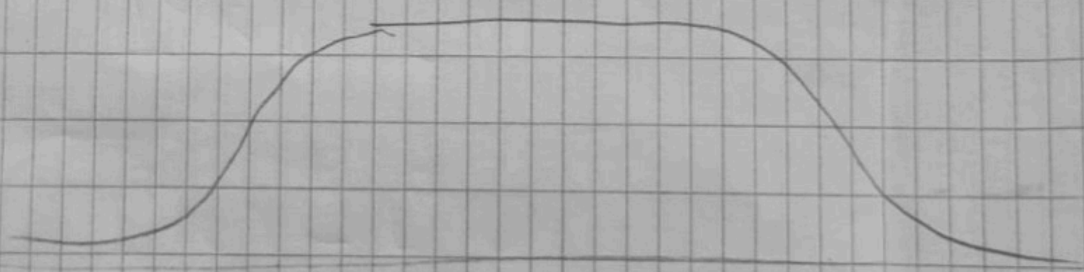
$\|u^\varepsilon\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}$

$u^\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$

$f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$

$z_k f$, $\mathrm{supp}\, z_k \subset B_k(0)$, $z_k \equiv 1$, B_{k-1}

$\nabla(z_k f) = \nabla z_k f + z_k \nabla f$



$\nabla z_k f \to 0$, , $|\nabla z_k f| \leq c|f|$ $\to$ Lebesgue

$z_k \nabla f \to \nabla f$, Lebesgue

$\nabla(z_k f) \xrightarrow{L^p} \nabla f$

Απ Θ 1

1. Extension $E: W^{1,p}(U) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, $Eu\big|_U = u$

$\operatorname{supp} Eu \subset V \supset\supset U$.

(3) $\|Eu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C_2 \|u\|_{W^{1,p}(U)}$.

$\Rightarrow$ (4) $\|Eu\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \overset{\text{Sobolev}}{\leq} C_1 \|\nabla Eu\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \overset{(3)}{\leq} C_1 C_2 \|u\|_{W^{1,p}(U)}$

(5) $\|Eu\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \geq \|u\|_{L^{p^*}(U)}$

$\therefore \implies (1)$. $\square$

$\|u$

Απ Θ 2

$u \in W_0^{1,2}(U) \Rightarrow$

$$\bar{u} = \begin{cases} u, & \text{στο } U \\ 0, & \text{στο } \mathbb{R}^n \setminus U \end{cases} \Rightarrow \bar{u} \in W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$$

$$\nabla \bar{u} = \begin{cases} \nabla u, & \text{στο } U \\ 0, & \text{στο } \mathbb{R}^n \setminus U \end{cases}$$

Sobolev $\Rightarrow$

$\|\bar{u}\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C_1 \|\nabla \bar{u}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$

$\hookrightarrow$ $\|u\|_{L^{p^*}(U)} \leq C_1 \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$. $\square$

Σχόλιο για $p=n$

$$W^{1,n}(U) \not\subset L^\infty(U)$$

$n \geq 2$

$$\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n} = \frac{n-p}{np}$$

$$p^* = \frac{np}{n-p} \to +\infty$$

$p \to n$.

Απ4 $\quad$ $n=1$ o.k.

$u = AC$, $u' \in L^1$

$$u(x) = u(0) + \int_0^x u'(t)\,dt \leq u(0) + \int_0^1 |u'|\,dt$$

$\|u\|_{L^\infty} \leq$

Αντιπαράδειγμα: $u(x) = \log\log\left(1 + \frac{1}{|x|}\right) \in W^{1,n}(U)$

$u \notin L^\infty$

$U = B\{|x|<1\}$

Απ14